Вятский государственный гуманитарный университет

ВЕСТНИК ВЯТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ГУМАНИТАРНОГО УНИВЕРСИТЕТА

Информатика
Математика
Язык

Научный журнал

№ 4

Киров
2007

ББК 32.97 я 54

В 38

Главный редактор

В. С. Данюшенков

Редакционная коллегия:

В. Т. Юнгблюд (зам. главного редактора),
М. С. Судовиков (отв. секретарь),
К. С. Лицарева, Л. А. Мосунова,
Н. И. Поспелова, В. Н. Оношко,
Т. Я. Ашихмина, Г. И. Симонова,
М. И. Ненашев

Выпуск готовили: С. М. Окулов, С. И. Калинин, Е. Н. Колодкина

Адрес редакции: 610002, г. Киров, ул. Красноармейская, 26,
тел.: (8332) 678-860 (научный отдел), (8332) 673-674 (Издательский центр)

Редакторы: Т. Котельникова, О. Коробкова, Ю. Болдырева
Компьютерная верстка: Ю. Боброва

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
(Министерство по делам печати, телерадиовещания
и средств массовых коммуникаций)
ПИ № 77-14376 от 17 января 2003 г.

ISBN 978-5-93825-450-3

© Вятский государственный гуманитарный университет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАТИКА

Бушмелева Н. А., Разова Е. В. Применение модульно-рейтинговой технологии обучения в образовательном процессе вуза 6

Васенина Е. А. Компьютер на уроке информатики как инструмент индивидуализации интеллектуального развития школьников 12

Васенина Е. А. Основные идеи методики обучения информатике на основе программирования 15

Веснин Р. А. О приближенном решении NP-полных задач 22

Кротова Н. А. Индивидуализация обучения на уроках информатики 29

Ефремов А. В., Семенов А. Н. Об использовании метода хеширования при решении геометрических задач 32

Зверева Е. А. Методика обучения будущих учителей информатики использованию средств информационно-коммуникационных технологий в учебно-образовательном процессе 34

Зяблицев С. В. Модификация алгоритма сортировки Джона фон Неймана 37

Клестов А. А. Теория NP-полноты: современный этап развития 40

Колеватов В. Ю. Отсечение на плоскости 42

Корчемкин М. А. Метод поиска эвристик при решении задач по информатике 45

Корякина И. А. Реализация теоретической концепции курса «Информационные системы в банковском деле» 49

Корякина И. А. Инновационные технологии совершенствования образовательного процесса, нацеленного на потребности бизнеса 52

Котельников Е. В., Ямшанов М. Л. Метод Support Vector Machine для решения задач классификации 55

Ланшакова О. В. Особенности использования метода проектов при изучении дисциплины «Компьютерная анимация» 61

Лялин А. В. Исследовательские задачи на уроках информатики 63

Лялин А. В. Математика и информатика. Два урока одной задачи 70

Матанцев И. В. О поиске эвристик при решении задач 76

Мельникова М. Ю. Использование корпоративных информационных систем в системе организации учебного процесса при подготовке IT-специалистов 79

Петухова М. В. Презентационная поддержка лекций: по обе стороны проектора 81

Соболева Е. В. Тренинг педагогического общения для учителей информатики 83

Суворова Т. Н. О проблеме развития мыслительных операций учащихся на уроках информатики 86

Суворова Т. Н. Формирование умственных действий учащихся при изучении информатики на основе метода проектов 93

Токмакова О. В. Проблемы и перспективы использования презентаций на учебных занятиях 98

Токмакова У. А. Методика спецификации требований к сайту (на основе модели прецедентов) 100

Тупицына О. Н. Методические аспекты изучения студентами экономических специальностей дисциплины «Информационные системы в банковском деле» 105

Шарыгин Р. В. Искусство преобразования пространства описания задачи при поиске эффективного алгоритма ее решения 107

Югрина Е. В. Методика изучения программы 1С:Торговля и склад 115

Ямшанов М. Л. Алгоритм обучения SVM-классификатора с гауссовым ядром для автоматической рубрикации текстовых документов 124

МАТЕМАТИКА

Акимова И. В. Некоторые аспекты подготовки будущих учителей математики к использованию информационных технологий в обучении 129

Акчурина Э. А. Усиление развивающего характера обучения на основе решения задач с криптографическим содержанием 130

Ананьина Т. А. Уточнение аналога неравенства Иенсена для логарифмически выпуклых функций и его применения 133

Андрианов В. Л. К вопросу об интерполировании целых функций конечными разностями 136
Аниськина Л. В. Конструктивный учебный диалог как средство обучения доказательствам 138
Батяйкина Ю. В. Роль математических знаний в обучении физике студентов первых курсов технических специальностей 140
Бердников М. С. О выпуклых и квазивыпуклых функциях 142
Вечтомов Е. М. От теории множеств к понятию категории 145
Горюнова Т. Ю. Принципы дифференцированного обучения математике студентов с использованием компьютерных технологий 149
Додунова Л. К., Тебекина Е. Е. Универсальные ряды по многочленам Фабера и их обобщение 151
Жиленкова Ю. С. Педагогические условия организации математической подготовки студентов-экологов 153
Зотиков С. В. Об одном свойстве континуальных аналогов ортонормированных систем функций Радемахера, Уолша и Хаара 155
Калинин С. И. К анализу трактовок феномена фундаментализации математического образования 156
Костромитина Е. В. Обучение школьников умению опровергать доказательства на первых уроках геометрии 161
Локоть В. В. Относительные проекционные константы одного класса подпространств коразмерности 2 пространства l_∞^n 164
Лукин М. А. О полукольцах с обратимой суммой обратимых элементов 165
Онегов В. А. Вычислительные модели. Особенности построения и реализации 168
Панкратова Л. В. Метод средних как эффективный способ решения задач и средство развития познавательного интереса школьников 175
Прокушкина Е. А. Некоторые применения неравенства Гюйгенса 178
Садовников Н. В. Фундаментальная направленность спецкурса «Основы двузначной, бесконечнозначной и порядковой логик» для студентов педагогического вуза 182
Саймуков Д. С. Метод Mihaly Bencze в уточнении неравенства Коши для k-кратных среднего арифметического и среднего геометрического положительных чисел 185
Симонова А. А. Одно доказательство неравенства Коши *188*
Соколова А. Н. К исследованиям по уточнению положения промежуточной точки в формуле Тейлора 189
Старостина О. В. Инъективные идеалы абелево-регулярных положительных полуколец 197
Турская С. В. Методы доказательства математических утверждений в курсе дискретной математики 199
Храмова Н. Н. О формировании тематического пакета самостоятельных работ учащихся в курсе математики средней школы 203
Черанева А. В. Кольцо разностей полутела 205

ЯЗЫК

Агалакова Т. Б. Становление лексико-семантического поля синестетических прилагательных в английском языке 208
Бардовская А. И., Юшкетова В. В. Исследование синэстемических словосочетаний с компонентом-цветообозначением в современном английском языке 210
Кипрская Е. В. Манипулятивные возможности масс-медиа: виды манипуляции, семантические средства ее выражения 214
Кожина Н. С. Коммуникативные стратегии и тактики речевого воздействия 216
Колодкина Е. Н. Метафора, метонимия и «метафоро-метонимический переход» в трактовке Ренаты Бартш 220
Немчанинова Н. К., Свицова А. А. Проблемы перевода и понимания английских пословиц 223
Свицова А. А. Лингвокультурный подход к изучению концепта 225
Шиляева А. М., Бухтоярова Т. А. Реформы спеллинга английского языка – от зари стандартизации до наших дней 228

НОВОСТИ

Бушмелева Н. А. Межвузовская научно-практическая конференция «Использование современных технологий в вузовском образовании» 230
Котельников Е. В. Конференция по искусственному интеллекту КИИ-2006 235
Петухова М. В. Современные тенденции обучения студентов специальности «Прикладная информатика» (по материалам научно-методической конференции и заседания УМО) 239

Среди разнообразных форм проявления человеческого интеллекта информатика, математика и язык, возможно, полнее всего характеризуют научно-информационный потенциал нашей эпохи, ее динамизм и инновационные ресурсы. Символично, что в этой цепочке язык и математика соседствуют – их близость не означает стирания граней между филологией и миром цифр, рациональностью и духовностью. Речь идет о глубокой интеграции наук, нацеленной на получение новых знаний, способных благотворно воздействовать на социальные и образовательные процессы нашего общества.

ИНФОРМАТИКА

Н. А. Бушмелева, Е. В. Разова

ПРИМЕНЕНИЕ МОДУЛЬНО-РЕЙТИНГОВОЙ ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ ВУЗА

В статье представлены основные идеи и принципы модульно-рейтинговой технологии обучения и анализ ее использования в образовательном процессе на факультете информатики.

Стратегическое направление в подготовке по специальности 080801.65 – Прикладная информатика (по областям) отражено в п. 1.3 Государственного образовательного стандарта: «Основные виды деятельности информатика (с квалификацией в области) – это организационно-управленческая, проектно-технологическая, маркетинговая, экспериментально-исследовательская, консалтинговая, аналитическая, эксплуатационная деятельность». Выпускник в своей профессиональной деятельности «...анализирует, прогнозирует, моделирует и создает информационные процессы и технологии...». Таким образом, Государственный образовательный стандарт декларирует подготовку информатика-исследователя и аналитика, способного к осуществлению творческой деятельности. На практике это может быть достигнуто путем переноса центра тяжести в учебном процессе на самостоятельную научно-исследовательскую работу студента и на индивидуальную работу с ним преподавателя.

В настоящее время в организации и проведении занятий внедряются новые педагогические технологии, позволяющие повысить эффективность, качество обучения, нацеливающие на непрерывное самообразование и основанные на двух важных принципах: «самостоятельность изучения» и «индивидуализация обучения». Эти два принципа лежат в основе модульной-рейтинговой технологии обучения, схожей с используемой в университетах Европы системой зачетных единиц и являющейся одним из главных пунктов Болонской декларации.

БУШМЕЛЕВА Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре прикладной математики ВятГГУ
РАЗОВА Елена Владимировна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре прикладной математики ВятГГУ
© Бушмелева Н. А., Разова Е. В., 2007

Основой построения учебного процесса при модульно-рейтинговой технологии обучения является модуль – логически завершенный, информационно и методически обеспеченный блок учебной программы (дидактическая единица). Число и объем модулей зависит от сложности и значимости учебного материала. Каждый модуль обязательно сопровождается всесторонним контролем работы студента: посещение студентом занятий, выполнение им аудиторных и внеаудиторных заданий, исходный, этапный и итоговый уровень учебных достижений студента.

Модуль содержит теоретическую и практическую части. Первая формирует теоретические знания, вторая – профессионально важные умения и навыки. Для повышения эффективности обучения для каждого модуля необходимо ясно представлять его структурные элементы: цель, задачи, уровень овладения, содержание учебного материала, формы, виды, методы учебной деятельности студента, направленные на овладение учебным материалом, рекомендации по организации и методике самостоятельной работы студента по данному модулю, задания для самоконтроля и самооценки результатов обучения.

Примерная модульная программа дисциплины «Информатика и программирование»

Предмет дисциплины «Информатика и программирование» представлен в качестве конструкции взаимосвязанных модулей, каждый с собственными целями и с общей схемой, и, в большинстве случаев, с содержанием, расписанным с некоторой степенью подробности. Указаны взаимосвязи с предшествующими модулями.

Основное требование к организации изучения курса – это практический опыт. Все относящиеся к программированию модули должны включать от трех до пяти часов лабораторных работ на каждый час лекций.

Цели курса

После завершения обучения по программе модуля студенты должны

- владеть некоторой методологией разработки алгоритмов и решения задач;
- иметь практическое знание распространенных языков программирования;
- быть в состоянии проектировать, писать, отлаживать и документировать короткие программы в рациональном стиле программирования.

Модуль 1. Базовые понятия информатики

Цели и задачи

Введение элементарных понятий, представлений из области теоретической информатики, используемых во многих областях информатики в качестве обычного средства формального описания и систематического рассуждения.

Уровень овладения материалом

Студент должен знать:

• основные понятия информатики и теории информации;

• место и роль информатики в системе наук;

• понятие систем счисления, их виды;

• требования, предъявляемые к кодированию информации.

Студент должен уметь:

• переводить число из одной системы счисления в другую, выполнять арифметические действия в позиционных системах счисления;

• применять различные подходы к измерению информации.

Содержание модуля

Информатика как наука и как вид практической деятельности.

История развития информатики. Информатика – единство науки и технологии. Структура современной информатики и ее место в системе наук. Социальные, правовые и этические аспекты информатики.

Информация. Формализация интуитивного понятия информации, необходимой для принятия решений, понятие об информационных процессах. Схема передачи информации. Непрерывная и дискретная информация. Свойства информации.

Измерение информации. Подходы к измерению информации (вероятностный, объемный). Понятие энтропии. Единицы измерения информации. Формулы Шеннона и Хартли для измерения информации.

Системы счисления. Понятия, виды. Основные характеристики позиционных систем счисления и организация вычислений в них.

Кодирование информации и методы ее защиты. Абстрактный алфавит. Постановка задачи кодирования. Требования, предъявляемые к кодированию. Теоремы Шеннона. Проблема защиты информации.

Рекомендации

Все понятия должны быть выведены из примеров повседневной жизни. Некоторые доказательства важных теорем, а также типичные с точки зрения методики доказательства надо давать подробно. Надо постоянно указывать на применение далее в курсе введенных понятий, методов и теорем.

Задания для самоконтроля

1. Объяснить, в чем заключается основное преимущество двоичного кодирования.

2. Приведите примеры процессов, используемых при передаче информации.

3. Объяснить, в чем состоит и как проявляется несимметричность непрерывной и дискретной форм информации.

4. Объяснить, почему в определении энтропии как меры неопределенности выбрана логарифмическая зависимость между h и m.

5. Выполнить действия $10011101{,}101_2 + 12{,}301_4 * *6A{,}BF_{16}$.

6. Если досье на преступников занимают 45 Мб и каждое из них имеет объем 12 страниц (48 строк по 64 символа в каждой), то чему равно число досье?

Модуль 2. Архитектура компьютера

Цели и задачи

Понять основы устройства компьютера с точки зрения логики; понять механизм представления данных, обработки данных и управления в цифровом компьютере; понять архитектуру компьютера (организация и устройство основных аппаратных узлов компьютеров).

Уровень овладения материалом

Студент должен знать:

• основные принципы устройства вычислительной техники;

• элементарную базу компьютеров разных поколений.

Студент должен уметь:

• реализовывать элементарные логические операции в виде логических схем.

Содержание модуля

История развития вычислительной техники.

Компьютер как универсальное устройство обработки информации. Понятие архитектуры ЭВМ. Принципы Дж. фон Неймана. Процессор, назначение, состав и основные характеристики. Память, ее виды и основные характеристики. Внешние устройства ЭВМ. Принцип открытой архитектуры.

Логические основы ЭВМ.

Элементы алгебры логики. Логические схемы. Реализация элементарных логических операций. Пример электронной реализации логического элемента.

Рекомендации

Три главных части модуля (логика, представление данных и архитектура) надо преподавать не одну за другой, а перемежая в модуле. Логическое устройство компьютера надо преподавать с функциональной точки зрения. Все темы надо прорабатывать с глубиной, необходимой для понимания на уровне данного модуля. Технические детали следует оставлять в стороне.

Задания для самоконтроля

1. Рассказать последовательность работы элементов ЭВМ при обработке информации.

2. Перечислить периферийные устройства, входящие в состав ЭВМ, и их назначение.

3. В чем отличие ПЭВМ от ЭВМ других классов?

4. С какими целями создаются вычислительные сети?

5. Раскрыть шинную организацию ЭВМ.

Модуль 3. Программное обеспечение ЭВМ

Цели и задачи

Систематизация знаний о программном обеспечении на основе современных принципов его построения и использования.

Уровень овладения материалом

Студент должен знать:

• классификацию программного обеспечения;

• назначение, виды и взаимосвязь различных видов программного обеспечения ЭВМ;

• о современном состоянии и тенденциях развития программного обеспечения.

Студент должен уметь:

• осуществлять выбор необходимых программных продуктов для решения конкретных прикладных задач.

Содержание модуля

Программное обеспечение ЭВМ. Основные понятия, классификация, характеристика программного продукта. Понятие об экономических и правовых аспектах информационных технологий.

Системное программное обеспечение. Операционная система, ее назначение, структура. Файловая система организации информации. Сервисное программное обеспечение, архивация файлов, программы обслуживания дисков, компьютерные вирусы и защита от них.

Прикладное программное обеспечение. Универсальные и специализированные программы. Виды, назначение, основные возможности. Примеры.

Введение в искусственный интеллект. Исторические аспекты, тест Тьюринга, физическая символьная система, гипотезы, перцептроны, методы искусственного интеллекта.

Рекомендации

При изучении данного модуля необходимо акцентировать внимание студентов на целесообразности выбора того или иного программного средства для решения конкретной практической задачи.

Задания для самоконтроля

1. Рассказать о классификации программного обеспечения ЭВМ. Привести примеры.

2. В чем состоят преимущества и недостатки интегрированных пакетов прикладных программ?

3. Что такое библиотека стандартных программ?

4. Как называется описание предметных областей, выполненное в логических языках?

5. Охарактеризовать назначение и возможности операционных систем.

6. Охарактеризовать типы задач, решаемых экспертными системами в химии, электронике, экологии, медицине и компьютерных системах.

Модуль 4. Языки программирования

Цели и задачи

Развить понимание организации языков программирования, особенно поведения программ при исполнении; дать представление о формальных методах в исследованиях по спецификации и анализу языков программирования.

Уровень овладения материалом

Студент должен знать:

• классификацию и особенности некоторых языков программирования;

• классификацию структур данных;

• принципы объектно-ориентированного программирования;

• основные алгоритмические конструкции.

Студент должен уметь:

• выполнять трассировку алгоритмов.

Содержание модуля

История развития языков программирования. Классификация языков программирования.

Языки программирования высокого уровня. Алфавит, синтаксис, семантика. Способы описания основных алгоритмических конструкций. Объектно-ориентированное программирование. Объекты. Методы. Классы. Наследование. Передача сообщений.

Типы и структуры данных. Обзор основных типов данных. Конструкции для задания типов данных и манипулирования ими. Особенности языка, которые сказываются на управлении статическим и динамическим размещением данных.

Управляющие структуры. Конструкции языков программирования для задания передачи данных и управления в программе, включая FOR ... DO, WHILE ... DO, REPEAT ... UNTIL, подпрограммы, процедуры, модули, итерацию и рекурсию.

Рекомендации

Этот модуль по конструкциям языков программирования заостряет внимание на поведении программ при исполнении. Он должен дать соответствующую подготовку для прохождения продвинутых курсов, включающих формальные и теоретические аспекты языков программирования и/или процесса компиляции.

Материал в этой схеме не предназначен для последовательного изложения.

Задания для самоконтроля

1. Задан двумерный массив $x[1..n, 1..n]$. Какая задача решается с помощью следующего фрагмента алгоритма?

```
For i := 1 To n Div 2 Do
    For j := 1 To n Do
      Begin
          c := a[i, j];
          a[i, j] := a[n − i + 1, j];
          a[n − i + 1, j] := c
      End;
```

2. Чем является объект по отношению к своему классу в объектно-ориентированном программировании?

Модуль 5. Алгоритмизация и программирование

Цели и задачи

Развитие навыков решения задач на ЭВМ: ввести основные понятия обработки строк, рекурсии, техники внутреннего поиска/сортировки и простые структуры данных; формирование представления об анализе алгоритмов

Уровень овладения материалом

Студент должен знать:

• синтаксис основных алгоритмических конструкций;

• правила записи программ;

• принципы структурного программирования;

• этапы решения задач на ЭВМ;

• классификацию типов данных и принципы работы с ними.

Студент должен уметь:

• составлять простейшие диалоговые программы;

• выполнять программную реализацию основных методов сортировки и поиска;

• решать типовые задачи по обработке массивов и строк;

• использовать динамические структуры данных при решении задач;

• осуществлять перебор вариантов с использованием методов его сокращения.

Содержание модуля

Разработка алгоритмов. Методы решения задач. Блок-схемы алгоритмов. Пошаговое уточнение. Простые численные примеры.

Программирование. Представление целых и действительных чисел, символов, команд. Типы данных, константы, переменные. Арифметические выражения. Оператор присваивания. Логические выражения. Последовательное, альтернативное и итерационное выполнение. Массивы. Подпрограммы и параметры. Простой ввод/вывод. Методы отладки.

Понятие структурного программирования. Поток управления. Инварианты цикла. Пошаговое уточнение операторов и структуры данных, или программирование сверху вниз.

Отладка, тестирование, верификация. Просмотр текста программы. Семантический анализ. Конструирование тестов. Верификация программы. Генерация и исполнение тестов.

Обработка массивов. Одномерные и двумерные массивы. Алгоритмы поиска (линейный, бинарный), сортировки (методом обмена, вставок), слияние упорядоченных массивов.

Обработка строк. Операции над строками. Алгоритмы обработки текстовой информации.

Динамические структуры данных. Линейные списки. Стеки, очереди. Двунаправленные списки, инвертированные списки. Операции на всех этих структурах и приложения, такие, как стековый и табличный синтаксический анализ.

Методы программирования. Рекурсия, перебор с возвратом, динамическое программирование.

Рекомендации

Темы этого модуля надо давать по мере надобности в контексте одного или нескольких проектов, в которые входит написание больших программ. Важно продолжать делать упор на хороший стиль программирования, выразительность и документацию. Надо дать представление об анализе алгоритмов, но на этом уровне такой анализ должен делать преподаватель для студента.

Предпочтительно, чтобы изучение основывалось на большом количестве примеров, в которых должно заостряться внимание на пространственно-временных требованиях методов, описанных в модуле.

Задания для самоконтроля

1. Найти все трехзначные числа, сумма цифр которых равна заданному числу.

2. Даны три числа. Определить, можно ли построить треугольник с такими длинами сторон. Если да, то определить вид треугольника. Разработать систему тестов для проверки программы решения данной задачи. Каково минимально необходимое число тестов.

3. Описать основные способы повышения эффективности реализации алгоритмов.

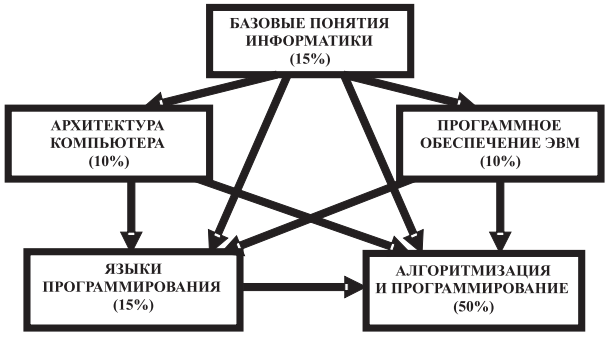
4. Сформулировать основные принципы структурного программирования.

5. Сформулировать задачу перебора и охарактеризовать методы его сокращения.

6. Преобразовать рекурсивную процедуру в нерекурсивный вариант.

7. Написание программ для обработки стека, дека, очереди, некоторые числовые примеры, относящиеся к манипулированию массивами и полиномами.

Взаимосвязь модулей и их доля в курсе



Из схемы видно:

1. Последовательность изучения модулей может быть различной, однако модули «Языки программирования» и «Алгоритмизация и программирование» должны быть завершающими.

2. Доля модулей в курсе тоже различная, что, естественно, должно учитываться в итоговой оценке при контроле знаний.

Основной целью контроля является определение степени достижения задач обучения, воспитания и развития. Контроль по модулю может быть содержательным, деятельностным или содержательно-деятельностным. Результаты контроля являются основой для оценивания. Одной из современных организационно-методических форм контроля является рейтинговый контроль. Рейтинг выражается в баллах, по 100-балльной системе. Затем полученная рейтинговая оценка перерассчитывается в академическую 4-балльную или зачетную 2-балльную:

Балльная оценка (100 баллов)	0–55	56–70	71–85	86–100
Академическая оценка	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Зачет	Не зачтено	Зачтено		

В любой точке образовательной траектории рейтинг представляет сумму баллов, полученных студентом в результате прохождения контроля, который осуществляется непрерывно.

При подсчете балльной оценки усвоения студентом учебного материала используются весовые коэффициенты модулей, которые определяются исходя из числа часов, отведенных на его изучение, анализа межпредметных связей и значимости модуля в изучаемой дисциплине. Сумма коэффициентов всех модулей дисциплины равна 1.

Модульно-рейтинговая оценка носит кумулятивный характер за счет суммирования результатов различных видов контроля: дисциплинарного и качественного. Максимальная сумма рейтинговых баллов модуля составляет 100 баллов.

Дисциплинарный контроль предназначен для оценки систематичности работы студентов. Его баллы складываются из таких составляющих, как

• активность (коэффициент 0,2) – посещаемость, активность на аудиторных занятиях и т. д.;

• самостоятельная работа (коэффициент 0,8) – выполнение учебного графика (сроки выполнения заданий для самостоятельной работы).

По результатам этого вида контроля формируется дисциплинарный рейтинг. Его доля в рейтинге накопительном – 30%.

Качественный контроль предназначен для оценки объема и качества приобретенных знаний по модулю. Это может быть контрольная работа, письменное или компьютерное тестирование, составление опорных конспектов. При подсчете качественного рейтинга может учитываться выполнение творческой работы – написание реферата, составление вопросов для самоконтроля, схем, алгоритмов, аннотирование и рецензирование специальной литературы и т. д. Причем выполнение творческого блока заданий – дело сугубо добровольное. Доля творческого блока в качественном рейтинге – 20%.

По результатам дисциплинарного и качественного рейтинга высчитывается накопительный рейтинг студента по дисциплине за семестр.

Кроме того, студенты имеют возможность повысить свой рейтинг за счет премиальных баллов, которые начисляются за успешное участие в предметных олимпиадах, за научные публикации и т. д. Студенты, чей накопительный рейтинг ниже 56 баллов, дорабатывают учебный материал, выполняют предусмотренные учебным планом практические работы, индивидуальные задания.

Итоговый контроль – зачет или экзамен в форме компьютерного тестирования в конце семестра. Но студент может быть освобожден от итогового контроля, если накопительный рейтинг является достаточным для получения положительной академической оценки, т. е. в случае положительной аттестации по каждому модулю. Студент может отказаться от предложенной ему «автоматической» оценки, если оценка его не устраивает.

Особый эффект достигается в «сильных группах» – до 80% студентов в группе получают по результатам итогового контроля «автоматический» зачет.

Практика внедрения описанной системы в учебный процесс на факультете информатики Вятского государственного гуманитарного университета показала, что ее использование наиболее эффективно в учебных группах сокращенной формы обучения. Сокращение сроков проводится на основе имеющихся знаний, умений и навыков студентов, полученных на предыдущем этапе профессионального образования. Учебный план содержит ряд учебных дисциплин, изученных студентами ранее в средних специальных образовательных учреждениях. По этим дисциплинам в значительной мере увеличена доля самостоятельной работы, что видно из следующих таблиц.

Увеличение доли самостоятельной работы студентов приводит к возникновению ряда проблем, связанных с самоорганизацией студентов, своевременностью выполнения контрольных мероприятий. Для решения этих проблем и для оптимизации учебного процесса в целом каждому студенту надо ясно представлять содержание, объем изучаемого материала и сроки промежуточной и итоговой отчетности по изучаемым дисциплинам. Таким образом, наиболее эффективной в данных условиях является именно модульно-рейтинговая технология обучения.

Экспериментальная работа и ее анализ позволили выделить ряд положительных и отрицательных сторон использования модульно-рейтинговой системы обучения.

Таблица 1

Доля самостоятельной работы по блокам дисциплин

Блок дисциплин	Трудоемкость по ГОС ВПО	Полная форма обучения			Сокращенная форма обучения		
		Аудиторных часов	Самостоятельная работа	%	Аудиторных часов	Самостоятельная работа	%
ГСЕ	1800	1036	764	42,4	526	1274	70,8
ЕН	1400	734	666	47,6	478	922	65,8
ОПД	1840	928	912	49,6	704	1136	61,7
СД	1572	726	846	53,8	570	1002	63,7

Таблица 2

Доля самостоятельной работы по дисциплинам

Наименование дисциплины	Трудоемкость по ГОС ВПО	Полная форма обучения		Сокращенная форма обучения	
		Аудиторных часов	Самостоятельная работа	Аудиторных часов	Самостоятельная работа
Иностранный язык	388	194	194	72	316
Русский язык и культура речи	108	50	58	34	74
Философия	108	50	58	32	76
Математика	600	304	296	144	456
Информатика и программирование	200	108	92	72	128
Концепции современного естествознания	72	60	12	36	36
Теория вероятностей и математическая статистика	146	72	74	36	110
Вычислительные машины, сети и системы телекоммуникаций	128	64	64	36	92
Базы данных	66	36	30	4	62
Операционные системы, среды и оболочки	50	26	24	4	46
Информационные технологии	80	40	40	18	62
Разработка и стандартизация программных средств и информационных технологий	70	36	34	18	52
Бухгалтерский учет	108	54	54	36	72
Статистика	108	54	54	36	72
Имитационное моделирование экономических процессов	104	52	52	36	68
Сетевое администрирование и управление сетью	204	104	100	54	150
Менеджмент	192	108	84	72	120
Маркетинг	104	52	52	36	68
Основы бизнеса	144	72	72	36	108
Налогообложение	164	82	82	36	128
Предметно-ориентированные экономические информационные системы	116	58	58	36	80
Банковское дело	144	72	72	36	108
Страхование	104	54	50	36	68

Положительные

• Более эффективная организация самостоятельной деятельности студентов за счет более эффективного осуществления индивидуального подхода к обучению;

• формирование навыков самоконтроля и самооценки у всех студентов;

• повышение прочности знаний благодаря наличию ближайших ориентиров, мотивации к регулярным, планомерным занятиям и активизации здоровой конкуренции между студентами;

• обеспечение эффективного мониторинга успешности обучения и качества знаний студентов за счет учета большего числа видов учебной деятельности;

• обеспечение в значительной мере снятия элементов случайности в оценке знаний при сдаче экзаменов и зачетов;

• возможность варьировать порядок изучения модулей в зависимости от обстоятельств;

• возможность определения индивидуального темпа изучения материала;

• обеспечение возможности получения семестровой оценки по результатам рейтинговой оценки без сдачи экзамена или зачета.

Отрицательные

• Деление содержания на отдельные смысловые части может привести к некоторой потере его системности в построении курса в целом. Осознание логики и преемственности в формировании понятий и способов деятельности является прерогативой самих студентов, что для многих из них оказывается серьезной проблемой;

• субъективность в создании модульно-рейтинговой системы, так как действующий стандарт определяет только итоговые результаты обучения, а значимость конкретных дидактических единиц определяется с позиции отдельного преподавателя;

• увеличение трудозатрат преподавателя при разработке вариантов контролирующих материалов, проверке результатов контроля, обновлении материалов.

В завершение отметим, что для эффективности использования модульно-рейтинговой технологии обучения считаем необходимым выполнение следующих условий:

• доведение до сведения студентов сущности модульно-рейтинговой технологии обучения, ее принципов и возможностей;

• знакомство каждого студента с рейтинг-планом, календарным графиком изучения модулей;

• наличие соответствующего учебно-методического обеспечения (программа курса; материалы для самостоятельной работы студентов; материалы для контроля усвоения учебного материала (письменные задания); темы творческих заданий; рейтинг-план; методические указания по изучению курса).

Примечания

1. *Байденко, В. И.* Болонский процесс и высшая школа России: время выбора [Текст] / В. И. Байденко // Высшее образование сегодня. 2003. № 1. С. 2–7.

2. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность «Прикладная информатика (по областям)» [Текст]. М., 2000.

3. *Ерунов, В. П.* Оценочно-критериальная система учебного процесса в вузе [Текст] / В. П. Ерунов. Оренбург: Изд-во ОГУ, 2002. 238 с.

Е. А. Васенина

КОМПЬЮТЕР НА УРОКЕ ИНФОРМАТИКИ КАК ИНСТРУМЕНТ ИНДИВИДУАЛИЗАЦИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО РАЗВИТИЯ ШКОЛЬНИКОВ

Данная статья посвящена вопросам обеспечения условий для эффективного интеллектуального воспитания учащихся в процессе обучения информатике.

Сложность проблемы интеллектуального воспитания может сравниться только с ее актуальностью. Сегодняшний день делает эту проблему особенно насущной. Отметим следующие ключевые моменты, положенные в основу дальнейших рассуждений:

1. Один из основных приоритетов личностно-ориентированного образования – развитие интеллектуальных способностей ребенка [1].

2. Необходимым условием эффективного интеллектуального воспитания является познавательная активность ученика, обучение через деятельность [2]. Деятельностный подход к обучению для информатики является наиболее естественным и соответствует как основным целям и содержанию учебной деятельности, так и средствам обучения – компьютерным и коммуникационным системам [3].

3. Наиболее перспективной в плане интеллектуального воспитания является деятельность по разработке алгоритмов и программ, позволяющая выполнять разнообразные, сложные по своей структуре действия и овладевать методами, присущими в целом науке информатике [4].

4. Развитие интеллектуальных способностей, равно как и других личностных качеств, сугубо индивидуально, поэтому процесс обучения требует максимальной индивидуализации, которую достаточно сложно реализовать в условиях классно-урочной системы. Однако использование компьютера (здесь и далее этот термин трактуется как целостный программно-аппаратный комплекс, адаптированный к целям обучения) позволяет в определенной мере решить данную проблему [5].

Подробно рассмотрим последнее положение. Применение компьютера позволяет ученику некоторое, подчас достаточно долгое, время работать без явного вмешательства учителя, т. е. заниматься самостоятельной работой в индивидуальном режиме. Это возможно, поскольку в силу своей способности реагировать на действия ученика компьютер предоставляет ученику инфор-

ВАСЕНИНА Елена Александровна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Васенина Е. А., 2007

мацию, которую прежде он мог получить только от учителя.

С одной стороны, это информация об объекте познания – некоторой совокупности знаний и способов действий, подлежащих усвоению. Появляется возможность заменить усвоение готовой суммы знаний их самостоятельным добыванием в ходе экспериментальной работы с компьютером. Эксперимент становится источником информации, которую ученик получает по обратной связи, воздействуя на объект познания (например, на компьютерную программу). В ходе решения задач, поставленных учителем (***NB!***), ученик ищет метод, строит план (алгоритм) действий, описывает этот алгоритм, используя строгие формальные правила, и при этом в первую очередь соотносит свои действия с реакцией компьютера.

С другой стороны, ученик получает от компьютера информацию о самом себе: о правильности своих действий, достигнутом уровне знаний и умений и т. д. В соответствии с реакцией компьютера он изменяет направление поиска, проверят логику своих действий, корректирует алгоритм, а главное, отмечает, какие именно корректировки приводят к достижению цели, а какие оказываются безрезультатными – так накапливается опыт, который в конечном итоге перерастает в теоретическое знание, а рост этот сопровождается формированием абстрактного мышления.

А что же учитель? Переложив рутинную часть своей работы на «плечи» компьютера, он получил дополнительный ресурс времени и сил, который может направить на индивидуальную работу с учениками, на непосредственное взаимодействие с каждым из них. Недаром, заглянув в кабинет информатики, вы далеко не сразу увидите учителя. Часто его место не у доски, где он «объясняет материал», и не посреди класса, где он «наблюдает за ходом работы», а рядом с учеником за компьютером, где они вместе решают задачу.

Хотя не стоит пренебрегать и пассивным наблюдением за деятельностью учеников. Поскольку информация с экрана монитора воспринимается учителем оперативно и без больших временных затрат, ему легко отслеживать результаты этой деятельности, темп работы, степень усвоения, ошибки и пробелы, даже направление мысли. А это позволяет столь же оперативно реагировать на полученную информацию и использовать ее в целях корректировки тактики обучения.

И все же наиболее эффективно интеллектуальное воспитание осуществляется в ходе непосредственного взаимодействия учителя и ученика. При этом интересна роль компьютера, который, в силу своей способности к информационному обмену, становится своеобразным субъектом учебного процесса, с которым взаимодействуют учитель и ученик и который в определенной мере участвует в их взаимодействии между собой. Как это ни покажется странным, именно «бессловесная машина» порой задает стиль и правила общения, в соответствии с которыми не надо бояться ошибки – надо ее исправлять; не важно, кто предложил решение – важно, верно ли оно; не стоит помнить, сколько раз ты ошибся – стоит радоваться, что из каждой ошибки извлечена польза и в конечном итоге цель достигнута.

Совместное решение задачи, обсуждение проблемы, живое общение с учеником позволяет учителю получить весьма большой объем информации об уровне, достигнутом учеником, об индивидуальных особенностях протекания когнитивных процессов и интеллектуальных предпочтениях, о том, какое воздействие именно на данного ученика будет наиболее эффективным. В итоге выстраивается «индивидуальная траектория интеллектуального развития» [6].

Главным образом, эта траектория находит свое воплощение в системе индивидуальных задач и заданий, которые определяют план деятельности конкретного ученика. (Выше говорилось, что в основе самостоятельной познавательной деятельности ученика лежит *задача, поставленная учителем.*) Кроме того, индивидуальность траектории поддерживается:

– выбором личностно значимой мотивации;

– стилем общения с учеником;

– объемом и формой оказываемой помощи;

– стимулированием оптимального темпа работы.

Попытаемся выполнить формальное описание схемы взаимодействия учителя и ученика в целях интеллектуального воспитания последнего. Рассмотрим систему «Ученик», которая может находиться в некотором состоянии (имеется в виду достигнутый интеллектуальный уровень личности, выраженный в определенном уровне учебных достижений), взятом в общем случае из бесконечного количества возможных состояний. Однако имеется только N состояний, для которых вероятность реализации достаточно велика – больше некоторого наперед заданного $\varepsilon (p>\varepsilon)$, и состояние может быть спрогнозировано.

Таким образом, можно считать, что множество M возможных состояний системы «Ученик» конечно и имеет мощность, равную N.

Пусть система «Ученик» находится в некотором начальном состоянии $m_0 \in M$. Учитель, исходя из результатов наблюдений и диагностических экспериментов, а также из накопленного опыта, определяет состояние m_0 и прогнозирует состояние $m_1 \in M$. При прогнозе учитываются следующие факторы:

– максимальная вероятность состояния m_1, которая обусловлена начальным состоянием m_0

(в том числе индивидуальными характеристиками ученика, его способностью к обучению и развитию);

– максимальная желаемость состояния m_1, т. е. его соответствие выбранным критериям уровня интеллектуального развития и учебных достижений.

Данные факторы в определенной мере противоречат друг другу, но искусство состоит как раз в нахождении компромисса.

Следующим шагом учитель подбирает систему воздействий, которые, по его представлениям, могут перевести систему «Ученик» из состояния m_0 в состояние m_1, и осуществляет эти воздействия. Однако, как правило, система переходит в состояние m_1', которая отличается, и порой значительно, от запланированного состояния m_1. Разница между состояниями $\Delta=m_1'-m_1$ характеризует точность прогноза учителя и эффективность осуществленных воздействий, а характеристики состояния m_1' снова определяются из наблюдений и диагностики. Наибольший успех достигается в случае, если состояние m_1 попадает в зону ближайшего развития ученика.

Далее процесс повторяется многократно. При этом необходимые воздействия на следующем шаге подбираются с учетом $\Delta=m_1'-m_1$.

В общем случае схема такова:

1. Система «Ученик» находится в состоянии $m_i \in M$.

2. Учитель предполагает перевести ее в состояние $m_{i+1} \in M$, для чего подбирает и осуществляет систему воздействий. Состояние m_{i+1} прогнозируется как результат компромисса между его наибольшей вероятностью, определяемой исходным состоянием m_i, и желаемостью как с позиций учебных достижений, так и с позиций интеллектуального развития (попадание m_{i+1} в зону ближайшего развития ученика), а также с учетом предыдущего значения Δ – разницы между реальным и прогнозируемым состояниями системы на предыдущем шаге.

3. Ученик переходит в состояние m_{i+1}', которое отличается от состояния m_{i+1}, т. е. не совпадает с прогнозом учителя. Это состояние диагностируется и определяется $\Delta=m_{i+1}'-m_{i+1}$.

4. Состояние m_{i+1}' принимается за новое состояние m_i, и процесс повторяется снова.

В соответствии с приведенной схемой определяются задачи учителя.

1. Диагностика состояния системы «Ученик»:

– начального состояния m_0;

– текущего состояния m_i, которое принимает система в результате воздействия (на предыдущем шаге оно определялось как m_{i+1}');

– разницы между прогнозируемым и реальным состояниями $\Delta=m_{i+1}'-m_{i+1}$, а также исследование причин отклонения.

2. Поиск набора воздействий с учетом:

– состояния m_i, которое определилось на предыдущем шаге как m_{i+1}';

– требований к новому состоянию системы «Ученик» m_{i+1};

– модели перехода из состояния m_i в состояние m_{i+1};

– анализа причин отклонения $\Delta=m'_{i+1}-m_{i+1}$.

Надо отметить, что показателем эффективности работы учителя является последовательное уменьшение Δ. С одной стороны, учитель более точно прогнозирует новое состояние, с другой стороны, подбирает более результативные воздействия.

Важно, что как диагностика, так и поиск и осуществление воздействий реализуются одновременно в ходе взаимодействия учителя и ученика с непременным участием компьютера.

Главное воздействие (неотрывное от диагностики) – система задач.

Стержень составляют задачи, которые ученик должен уметь решать – это показывает как уровень сформированности знаний и учебных умений, так и достижение определенного уровня интеллектуального развития – сформированности определенных качеств ума. Стержневые задачи представлены двумя группами: разбираемые совместно с учителем в ходе экспериментальной работы (воздействие) и решаемые самостоятельно (диагностика). Кроме того, предлагаются задачи-ступеньки – они подводят к пониманию решения стержневых задач, служат тренировке, выработке навыка. Особая группа – задачи эвристического характера, сложные задачи, задачи-проблемы, задачи-исследования.

В ходе решения задач реализуются и другие способы воздействий: подсказка, дозированная помощь, составление плана решения с записью на естественном языке, трассировка алгоритма (совместно с учителем и самостоятельно), тестирование – подбор такой совокупности исходных данных, которая укажет на ошибку, а также примеры, ассоциации, аналогии – они особенно хороши, когда на бытовом уровне выявляют абсурдность ошибки.

Наблюдение за решением задач и общение с учеником позволяют учителю достаточно точно диагностировать его состояние. При этом учитель обращает внимание на следующие моменты:

– какого рода ошибки совершает ученик;

– умеет ли находить ошибку и как именно ищет – анализирует ли результат или действует случайным образом;

– как оформляет программу – стиль оформления показывает, видит ли ученик структуру программы, насколько он способен к структурированию;

– в какой степени ученик способен к построению плана деятельности как для себя, так и для

другого (компьютера), насколько может поставить себя на место формального исполнителя;

– как умеет выразить свои мысли и на естественном языке, и (особенно) на языке формальном.

Интересно изменение роли учителя в сравнении с традиционным обучением. Функция передачи знаний перестает быть основной, на первый план выходит функция управления познавательной (и максимально самостоятельной) деятельностью учеников. Учитель все менее воспринимается учеником как источник информации, а как помощник, от которого можно получить дельный совет, подсказку, помощь, хотя таковые раздаются не щедро, по минимуму, но подталкивают собственную мысль. При этом со временем приходит понимание, что учитель, главным образом, помощник в выстраивании плана собственного образования: определения приоритетов в познании, анализа своих интеллектуальных качеств, подлежащих совершенствованию, планирования познавательной деятельности.

Важно помнить, что все вышеописанное происходит на обычном уроке в рамках классно-урочной системы. Следовательно, требуется учитывать и другие виды взаимодействия: учеников между собой и учителя с группой учеников. Даже с применением компьютера и максимальной самостоятельностью учеников на уроке трудно работать с каждым индивидуально. Выход в группировании учеников и работе с группой детей, имеющих сходные интеллектуальные характеристики, существенные для данного вида деятельности. Лучше, если ученики не догадываются о своей принадлежности к той или иной группе, тем более что эта принадлежность весьма подвижна, а объединение в группы учитель производит с учетом самых разных критериев. Разнообразие критериев группирования и подвижность групп по максимуму обеспечивают адаптацию процесса обучения индивидуальности учеников.

Действительно, если рассмотреть ряд критериев и по каждому из них выделить хотя бы три уровня выраженности данного критерия для каждого ученика (слабый, средний, сильный), то комбинация выраженности разных критериев с определенной степенью приближения промоделирует индивидуальность ученика.

К таким критериям, или характеристикам, можно отнести, во-первых, личностные когнитивные качества ученика (скорость протекания когнитивных процессов, индивидуальный стиль кодирования информации и др.), во-вторых, способности ученика, в которых когнитивные качества находят свое воплощение и для которых служат основой формирования (темп усвоения, способность к анализу, структурированию, обобщению, оценке и др.), в-третьих, учебные достижения (знания, умения, навыки по изучаемому предмету) – они, с одной стороны, являются видимой целью и результатом обучения, а с другой – инструментом формирования способностей.

Если принять к рассмотрению хотя бы пять критериев, тогда возможно 15 различных комбинаций (в реальности будет несколько меньше). Однако для каждого вида деятельности на определенном уроке ведущими окажутся 1–2 критерия, и учитель может мысленно вычленить 3–6 групп, работу с которыми он и организует в рамках одного урока (естественно, отдавая часть функций компьютеру и используя задачный подход). Это позволяет адаптировать учебный процесс к индивидуальности ученика и в то же время оставаться в рамках классно-урочной системы. При этом одно занятие вмещает в себя несколько занятий (или процессов), протекающих параллельно, что, безусловно, немало усложняет работу учителя, но ожидаемый результат оправдывает эти затраты.

Примечания

1. Федеральный компонент государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования. Пояснительная записка [Текст] // Информатика и образование. 2004. № 4.

2. Там же.

3. *Окулов, С. М.* Информатика: Развитие интеллекта школьников [Текст] / С. М. Окулов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005; Федеральный компонент государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования...

4. *Окулов, С. М.* Указ. соч.

5. Там же.

6. Там же.

Е. А. Васенина

ОСНОВНЫЕ ИДЕИ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ ИНФОРМАТИКЕ НА ОСНОВЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данной статье рассматриваются основные идеи, вокруг которых строится методика обучения информатике, предлагаемая С. М. Окуловым и воплощенная в книге «Основы программирования».

I. Направленность книги

Книга адресована людям, желающим получить достаточно глубокие и фундаментальные знания по информатике, и людям, которые будут им в этом помогать. К последним отнесем школьных

ВАСЕНИНА Елена Александровна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Васенина Е. А., 2007

и вузовских преподавателей, для которых данный учебник является:

• содержательной основой, источником теоретического (но не справочного!) материала;

• источником необычных методических идей, основа которых может быть представлена цепочкой: деятельность – самостоятельность – исследование – развитие мышления;

• источником образцов преподавания по предлагаемой методике;

• источником задач и заданий, которые можно использовать непосредственно, а можно и в качестве образца, по которому учитель может сам разработать свои новые задачи и задания.

Группа тех, кто учится, более разнообразна по составу. В первую очередь это студенты, которые изучают основы информатики и программирования как профильный предмет, базу дальнейшей профессиональной подготовки. К примеру, будущие профессиональные программисты достаточно высокого уровня, специалисты-прикладники, которым предстоит применять методы информатики, а также присущие ей аппаратные и программные средства в различных областях деятельности (например, в экономике), студены, осваивающие информатику как педагогическую специальность – будущие преподаватели, будущие инженеры – разработчики компьютерной и коммуникационной техники и другие.

Во-вторых, школьники, которые хотят получить глубокие и фундаментальные знания в области информатики, не останавливаться в освоении компьютера на уровне интерфейса прикладных программ общего назначения, а научиться управлять компьютером, научившись определять метод достижения цели, формулировать и записывать свои идеи на формальном языке и добиваться желаемого результата. Совершенно не обязательно это будут старшеклассники – желание докопаться до основ и способности к особому виду деятельности, называемому «программирование», могут проявиться в достаточно раннем возрасте. Поэтому в школе данный учебник (по крайней мере его первые две части и в определенной мере третью часть) можно использовать ориентировочно с 7–8-го класса для углубленного освоения курса информатики, которое может быть осуществлено:

• в рамках учебных занятий в специализированных классах;

• в рамках кружков и факультативов;

• в процессе индивидуальных занятий школьника, возможно с индивидуальным консультированием учителя.

В последней ситуации данный учебник особенно хорош, поскольку ориентирован на максимальную самостоятельность читателя и вовлечение его в активную работу, работу исследования, работу познания. Кроме того, книга побуждает обратиться к другим источникам информации: справочникам, теоретической литературе. В частности, в книге ставятся вопросы и рассматриваются проблемы, которые сами по себе не являются предметом подробного изучения, но служат основой интересных программистских задач и, следовательно, могут помочь в достижении основной цели, т. е. освоении основ программирования. К тому же при желании затронутые проблемы можно исследовать более детально, отыскав соответствующие материалы. Примером подобной области-источника интересных задач и проблем может служить целочисленная арифметика.

Однако, пожалуй, наилучшее применение данная книга может найти в обучении старшеклассников информатике и основам программирования как профильному предмету. Тому есть ряд причин:

1. В сравнении со студентами даже младших курсов приобщение к программированию происходит в более раннем возрасте, что дает преимущества в направлении интеллектуального развития обучаемых.

2. В сравнении со школьниками среднего звена старшеклассники лучше мотивированы – они выбрали профиль обучения и осознают значимость изучаемого для своей будущей профессиональной подготовки.

3. Профильный курс дает больше возможностей для глубокого изучения предмета – образовательный стандарт и программа нацеливают на фундаментальность курса, больше предоставляется времени, отсюда больше возможностей для применения продуктивных исследовательских методов, на которые ориентирован данный учебник.

4. Как правило, учителя, которые ведут профильные курсы в старших классах, имеют высокую квалификацию, проявляют интерес к поиску новых нестандартных путей обучения – данный учебник рассчитан именно на такого учителя.

5. В старших классах ученику предстоит не только усвоить определенный объем знаний, но и научиться быть максимально самостоятельным в их приобретении – только в этом случае можно получить на выходе хорошо подготовленного выпускника. Данный учебник дает ученику возможность самостоятельного исследования, а учителю показывает путь организации разумного педагогического руководства самостоятельной познавательной деятельностью ученика.

II. Основные идеи методики

Здесь и далее данное учебное издание называется учебником, и для этого есть некоторые основания – в книге представлена целостная дидактическая модель изучаемого курса, каким

его видит автор. Кроме содержательного блока дидактической модели присутствует и процессуальный блок (блок средств), который обеспечивает усвоение знаний, формирование умений, развитие и воспитание учеников. Иными словами, книга не только содержит некоторый материал, подлежащий усвоению, но и воплощает методику его изучения.

На это указывает даже форма подачи материала, сама структура учебника:

• выделены четыре основные части курса;

• изложение ведется в форме описания занятий, каждое из которых имеет четко определенную структуру;

• нумерация занятий сквозная, что указывает на целостность курса, глубокую внутреннюю связь материала, излагаемого в разных частях;

• каждому занятию предпослан план, который ориентирует учителя и ученика на то, как будет идти работа на занятии, какие задачи предстоит решить.

Перечислим основные идеи методики обучения информатике и программированию, предлагаемой автором:

1. Приоритетное внимание к развитию интеллекта ученика, формированию структурного стиля мышления.

2. Деятельностный подход к обучению. Программирование как особый вид деятельности, максимально ориентированный на развитие ума. Изучение фундаментальных основ информатики через программирование, т. е. через включение в деятельность.

3. Обучение «через задачу», «через эксперимент», «через ошибку».

4. Максимальная самостоятельность обучаемого в приобретении знаний.

5. Привитие вкуса к исследованию, поиску проблем и противоречий, без которых нет нового знания.

6. Формирование критического взгляда, основанного на анализе и оценке. Ничто не может быть верным вечно и в любой ситуации.

7. Формирование целостного мировоззрения. Знание (в частности, по информатике) едино – из одной темы можно неожиданно и под новым ракурсом увидеть другую.

Рассмотрим сказанное более подробно.

Интеллектуальное воспитание в процессе обучения информатике и программированию

Автор считает, что компьютер как средство обучения и программирование как область деятельности имеют большой образовательный потенциал, который наилучшим образом может быть реализован в направлении интеллектуального воспитания школьников, развития их мыслительных способностей, формирования особого, структурного стиля мышления (о влиянии обучения программированию на развитие мышления обучаемых более подробно можно прочитать: Окулов, С. М. Информатика: Развитие интеллекта школьника. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005).

Применение компьютера активизирует обратные связи в процессе обучения. С одной стороны, учитель имеет возможность оперативно считывать с экрана компьютера информацию о том, как идет познавательная работа учеников, и подключаться к ней в нужный момент, оказывая целенаправленное воздействие. Учитель может «видеть мысль» ученика и направлять ее, используя самые различные средства. С другой стороны, использование компьютера позволяет приблизить процесс обучения к реальному процессу познания. Ученик экспериментирует, совершает те или иные воздействия, компьютер же реагирует на них тем или иным образом.

Особенно эффективна такая экспериментальная работа в программировании. Объектом изучения является программа – сложная открытая система, процесс разработки которой нелинеен. Ученик вносит изменения в программу (так как это открытая система) и наблюдает за результатами опыта, оценивая их. Процесс повторяется многократно – ученик исследует, он приобщается к научному творчеству. Кроме того, поскольку программа – сложная система, свойства которой качественно отличны от свойств входящих в нее объектов, работа с ней позволяет изучать фундаментальные понятия информатики «объект», «структура», «система», «среда» и другие не голословно а в процессе практической деятельности.

Деятельностный подход к обучению информатике

Учебник ориентирован на вовлечение читателя в деятельность. На это указывает сама структура изложения материала. Вначале излагаются теоретические сведения, минимально достаточные для дальнейшей работы с материалом занятия. Однако даже названия пунктов плана занятия («обсуждение оператора...», «обсуждение структуры данных...», «изучение метода...») предполагает активность обучаемого и ориентирует преподавателя на вовлечение в диалог, актуализацию уже изученного, организацию умственной работы ученика по «встраиванию» нового знания в уже имеющуюся у него систему знаний, формированию внутрипредметных связей. Активизации мысли способствует и стиль изложения: обращение к читателю с вопросами, приглашения поразмышлять над проблемой, стремление мотивировать необходимость нового знания – как теоретических положений, так и новых способов действий.

Сказанное становится еще более актуальным при переходе к экспериментальному разделу, который присутствует практически на каждом занятии. Если ученик работает по учебнику самостоятельно, ему обязательно потребуется практическая работа с компьютером. Ему придется искать ответ на вопросы, задаваемые непосредственно в тексте – иначе будет трудно, а то и невозможно двигаться дальше, понять сказанное автором, придется выбирать наилучший вариант решения из нескольких предлагаемых и т. д.

Для преподавателя описание экспериментального раздела послужит примером организации фронтальной лабораторной работы учащихся в исследовательском режиме. Причем такая работа может быть фронтальной в полной мере, т. е. проводиться со всем классом (чаще это учебная группа $^1/_2$ класса) одновременно. Но может быть выделено несколько групп учеников, одна из которых работает синхронно с учителем, другая «бежит» чуть впереди, т. е. успевает выполнить еще несколько заданий, а третья выполняет только обязательный минимум и пользуется результатами экспериментов, добытыми первой и второй группами. Могут быть ученики, которые идут по индивидуальному плану, предложенному учителем на этот урок или на несколько уроков, и работают с учебником по схеме, предусмотренной учителем.

Самостоятельность в обучении

Совершенно обязательным пунктом в планах каждого занятия является выполнение самостоятельной работы. Только в процессе самостоятельной работы происходит истинное познание. Ученик применяет изученную теорию, закрепляет способы действий (начальный уровень самостоятельности), самостоятельно ищет путь решения задачи, доводит ее до конечного результата (следующая ступень). Наконец, ученик может выйти на наиболее высокий уровень самостоятельности – самостоятельную постановку цели познания. Так бывает, когда в решенной уже задаче возникают новые проблемы, рождающие потребность в новом знании – отсюда мотивация к их получению и, в конечном итоге, потребность в учении. Необходимое условие такого развития событий – правильный подбор заданий, в идеале индивидуальный.

Самостоятельность ученика проявляется не только в момент выполнения собственно самостоятельной работы. Весь ход занятия учитель (вслед за автором учебника) организует так, чтобы дать максимальную пищу для ума, указать путь рассуждений, подвести к акту понимания, который, по убеждению автора учебника, может состояться только в результате самостоятельного мыслительного усилия – «каждый понимает сам». Учитель (и учебник!) лишь создает условия, пробуждающие и побуждающие мысль.

Задачный подход к обучению.
Обучение «через ошибку»

Важнейшая идея предлагаемой методики – обучение через задачу.

1. Задача мотивирует необходимость нового знания.

2. Новое знание рождается в процессе решения задачи: обсуждения, эксперимента, получения и анализа результата.

3. Задача или система задач служит стержнем, вокруг которого строится изучение нового, задача прокладывает путь, по которому ученик движется от незнания к знанию и далее к пониманию.

4. Через задачу осуществляются межпредметные связи. В частности, с различными разделами математики: комбинаторикой, целочисленной арифметикой, теорией вероятности и т. д. Эти разделы математики служат источником интересных задач, что весьма полезно как для информатики и программирования, так и для математики. С одной стороны, использование компьютера подогревает интерес к математике, побуждает подробнее изучить затронутые разделы. С другой стороны, усиливается мотивация к программированию – создается программа не просто «для обучения программированию», а для дела, для решения проблем смежной науки.

Вся экспериментальная работа, описанная в учебнике, это последовательность решения задач. Причем в большинстве случаев решение не является окончательным. Анализ его качества показывает, что решение пригодно не для всех случаев, что существуют ограничения, в рамках которых данное решение вполне удовлетворительно, но за их пределами оно уже непригодно, и надо искать новое.

Здесь мы подходим к еще одной важной методической идее обучению через ошибку. Не стоит воспринимать эту идею примитивно – предлагается программа с ошибками, а ученик должен их найти и исправить. Все значительно сложнее.

Сначала рассматривается простое, понятное, даже очевидное решение. Затем путем рассуждений или, что чаще, эксперимента выявляются его недостатки и ограничения, в рамках которых данное решение может быть признано удовлетворительным. Следующий ход – улучшение решения и определение ограничений, в рамках которых работает уже это, новое решение. И так далее. Процесс практически бесконечен. Главная мысль – ни одно решение не может быть верным при любых условиях. Девиз автора – «все подвергай сомнению». Таким образом, формируется критическое мышление, привычка к анализу, сравнению, оценке, выделению сильных и слабых сторон того или иного объекта, события, явления. Важно бывает также вовремя остановиться, определить, надо ли продолжать поиск

«идеального» решения или ситуация позволяет удовлетвориться уже найденным.

Следует воспитывать конструктивное отношение к ошибке. Ошибка – норма. Бояться делать ошибки не надо – надо учиться их вовремя находить и исправлять. И использовать для этой цели компьютер.

На первых порах ошибки примитивны. В дальнейшем их или быстро исправляют, или не допускают совсем. От примитивных ошибок спасает опыт, а опыт приобретается в решении задач. Допускаешь примитивные ошибки – значит, мало решал. Но ошибка может быть интересной и содержательной – в этом случае она ведет к новому знанию. Ошибка рождает проблему, проблема заставляет думать, искать – в поиске узнается новое.

Ошибки учеников – источник информации для учителя. Именно здесь работает обратная связь. Анализируя качество ошибок ученика, учитель получает возможность «видеть его мысль», судить о путях развития его ума и о том, какие воздействия нужны именно этому ученику в целях интеллектуального воспитания.

Нелинейность обучения

Многократное обращение к проблеме (задаче), решение ее на разных качественных уровнях, с использованием разного инструментария есть выражение нелинейности процесса создания программы, равно как и нелинейности процесса обучения. Одна и та же тема может быть рассмотрена в учебнике не раз. Например, структура программы воспринимается учениками сначала интуитивно – им показывают, как выглядит программа, затем они работают с различными программами, привыкают воспринимать структуру программы именно такой, и только при изучении темы «Процедуры» формулируются правила, по которым строится программа на языке Паскаль. Или тема «Массивы». К ней автор обращается минимум четыре раза, добавляя каждый раз новые черты этому важному понятию.

Циклическое обращение к основным, особенно важным темам, понятиям и проблемам характерно для данного учебника, поскольку автор считает нелинейность одним из основных свойств, присущих процессу обучения, особенно обучения информатике.

Особое место в учебнике занимает так называемый «Материал для чтения». Структурный элемент под этим названием заключает практически каждое занятие. Даже если читатель пренебрежет рекомендацией автора и пропустит предлагаемый для чтения текст, ничего ужасного не случится, но он потеряет немало:

• многое в основном тесте занятия может остаться для него непонятным (например, задачи Занятия № 2 трудно решать осмысленно, не ведая о системах счисления);

• он не узнает множества интересных и важных для изучения информатики сведений о фактах, событиях, точках зрения (например, о технологиях программирования);

• он не сможет рассмотреть изучаемые явления с разных точек зрения (например, взгляд на массив как на структуру данных, отражающую строение внутренней памяти компьютера).

Можно сказать, что «Материал для чтения» делает учебник на порядок более фундаментальным. Именно там рассмотрены основные вопросы теории – понятие алгоритма, проблемы представления информации и кодирование, измерение информации и многое другое. Рассмотрены также некоторые вопросы математики, о которых идет речь на данном занятии.

Интересно место, которое автор определил для рассмотрения тех или иных «материалов для чтения» – иногда связь с темой занятия и решаемыми в его рамках задачами явная, иногда – более опосредованная. Учителю предоставляется право выбора – следовать логике автора неукоснительно или выбирать место изучения теоретических вопросов по своему усмотрению, считать краткое изложение (по учебнику) достаточным или привлечь иные источники, определить «материалы» как обязательные для всех или подойти к этому более гибко.

Включение «Материалов для чтения» в данный учебник показывает, что практически все фундаментальные теоретические вопросы информатики могут быть рассмотрены через программирование, в непосредственной связи с ним. Подход к фундаментальным проблемам через программирование значительно повышает мотивацию их изучения, позволяет работать с такой сложной для понимания тематикой не в режиме «прочитал (прослушал)» – «выучил» – «забыл», а через активную деятельность по созданию некоторого реального программного продукта. Теория работает, а потому прочно усваивается, встраиваясь в систему «полезных» знаний. Здесь может быть достигнуто равновесие между «фундаментальным» и «прикладным» подходами к обучению. Дальнейшая работа в этом направлении может быть весьма плодотворной. Возможно, здесь одна из точек роста школьной и вузовской информатики.

Данный учебник можно рассматривать как одну из составляющих среды обучения, отвечающей синергетическим требования сложности, открытости и нелинейности. Такую среду создает педагог, который:

• строит систему заданий, задач, проблем, решая которые ученик движется от незнания к знанию, пониманию, владению материалом;

• организует деятельность учеников так, чтобы обучение максимально приближалось к реальному процессу познания, научного творчества, через эксперимент, через критическое осмысление его результатов;

• предоставляет в распоряжение учеников разнообразные источники информации, создает условия для успешного информационного поиска;

• «следит за изменением мысли» отдельного ученика, ведет его по индивидуальной траектории познания и развития;

• помогает ученику стать самостоятельным, начиная от самостоятельности в действии, через

Таблица 1

Тематический план элективного курса «Основы структурного программирования на языке Паскаль» (в авторском варианте)

Основы структурного программирования на языке Pascal		
Тема	Часы	
	теория	практикум
1. Введение в язык Паскаль. • Первая программа на языке Паскаль. • Целый тип данных. • Линейные алгоритмы над данными целого типа. • Среда программирования ТурбоПаскаль	1	5
2. Конструкция ветвления. • Операторы, реализующие конструкцию. • Логический тип данных	2	4
3. Конструкция цикла. • Циклы с параметром и с условием – различие в применении. • Циклы с предусловием и постусловием. • Операторы для реализации различных типов цикла. • Вложенные циклы	3	7
Контрольное занятие	–	2
4. Составные типы данных. • Первое знакомство с массивом. • Работа с элементами массива. Базовые алгоритмы	1	5
5. Процедуры и функции – элементы структуризации программ. • Структура программы. • Метод последовательной детализации. • Реализация процедур и функций в языке Паскаль. • Механизм передачи параметров	2	6
6. Рекурсия	2	4
7. Символьный и строковый типы данных. • Алгоритмы обработки символьных данных. • Операции, функции, процедуры, определенные над строками. • Основные алгоритмы обработки строк	3	7
8. Вещественный тип данных	1	3
9. Текстовые файлы	1	3
Контрольное занятие	–	2
10. Массив как фундаментальная структура данных. • Методы работы с элементами одномерного массива. • Методы сортировки. • Методы поиска. • Двумерные массивы	6	16
Контрольное занятие	–	2
11. Комбинированный тип данных. • Алгоритмы обработки записей. • Разработка минипроекта на организацию хранения удобного доступа к данным с использованием записей	2	8
Временной резерв	2	2
Всего часов	26	76

самостоятельность в освоении содержания к самостоятельности в определении цели познания.

Такая среда пронизана внутренними связями, взаимодействиями между учителем, учениками и компьютером, который является полноправным, хотя и своеобразным, субъектом учебного процесса.

Данный учебник и предлагаемая методика могут быть положены в основу элективного курса «Основы структурного программирования на языке Паскаль». Курс рассчитан на 102 часа:

34 часа в 10-м классе (1 час в неделю);

68 часов в 11-м классе (2 часа в неделю).

Однако как вариант можно предложить изучение курса только в 10-м классе или только в 11-м классе по 2 часа в неделю. В этом случае длительность курса составит 68 часов. Сокращение курса приведет к тому, что часть тем будет исключена из рассмотрения, другие темы могут потерять глубину изучения. Этого можно избежать за счет увеличения интенсивности самостоятельной работы.

Ниже предлагается примерное тематическое планирование курса на 102 часа (см. табл. 1) и вариант тематического планирования на 68 часов (табл. 2).

Таблица 2

Вариант тематического плана элективного курса «Основы структурного программирования на языке Паскаль» (в авторском варианте)

Основы структурного программирования на языке Pascal		
Тема	Часы	
	теория	практикум
1. Введение в язык Паскаль. • Первая программа на языке Паскаль. • Целый тип данных. • Линейные алгоритмы над данными целого типа. • Среда программирования ТурбоПаскаль	1	3
2. Конструкция ветвления. • Операторы, реализующие конструкцию. • Логический тип данных	2	4
3. Конструкция цикла. • Циклы с параметром и с условием – различие в применении. • Циклы с предусловием и постусловием. • Операторы для реализации различных типов цикла. • Вложенные циклы	2	6
Контрольное занятие	–	2
4. Составные типы данных. • Первое знакомство с массивом. • Работа с элементами массива. Базовые алгоритмы	1	3
5. Процедуры и функции – элементы структуризации программ. • Структура программы. • Метод последовательной детализации. • Реализация процедур и функций в языке Паскаль. • Механизм передачи параметров	2	4
6. Рекурсия	1	3
7. Символьный и строковый типы данных. • Алгоритмы обработки символьных данных. • Операции, функции, процедуры, определенные над строками. • Основные алгоритмы обработки строк	2	6
9. Текстовые файлы	1	1
Контрольное занятие	–	2
10. Массив как фундаментальная структура данных. • Методы работы с элементами одномерного массива. • Методы сортировки. • Методы поиска. • Двумерные массивы	6	12
Контрольное занятие	–	2
Временной резерв	1	1
Всего часов	19	49

Р. А. Веснин

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ NP-ПОЛНЫХ ЗАДАЧ

Проблема решения NP-полных задач остается открытой в информатике. В статье на конкретном примере рассмотрен один из методов приближенного решения задач за счет техники введения дополнительного параметра.

В информатике выделен класс NP-полных задач – это труднорешаемые задачи. NP-полные задачи, как правило, являются оптимизационными, т. е. направлены на поиск минимума или максимума некоторой функции. Сложность решения данного класса задач состоит не в поиске алгоритмов нахождения оптимума функции, она связана с огромными затратами вычислительных ресурсов при выполнении этих алгоритмов, при увеличении размера входных данных задач алгоритмы оказываются неспособными дать результат за приемлемое время. Время работы алгоритмов растет по экспоненте в зависимости от размера входных данных. В качестве примера NP-полных задач можно указать следующие: задача о рюкзаке, задача о коммивояжере, задача о сумме подмножества, задача о клике, задача о раскраске графа и многие другие.

Частичным решением этой проблемы являются алгоритмы, приводящие к нахождению приближенного решения, близкого к оптимальному. Такие алгоритмы, благодаря тому, что допускают погрешность результата, работают за полиномиальное время. В связи с этим фактом ценность данных алгоритмов весьма велика. Существенным недостатком здесь является отсутствие универсального метода, позволяющего составить алгоритм приближенного решения для любой задачи. Известные алгоритмы приближенного решения применимы к одной конкретной задаче или иногда к нескольким схожим задачам. Рассмотрим один из приближенных алгоритмов на примере весьма интересной задачи «Реверси».

Вычислительная машина выполняет две операции (назовем её МДО). Она имеет R регистров, пронумерованных числами от 1 до R ($R > 1$). Каждый регистр может хранить неотрицательное целое число в диапазоне от 0 до N включительно. МДО способна выполнять две операции:

- S i j – Записать значение регистра i, увеличенное на 1, в регистр j (i может быть равным j).
- P i – Напечатать значение регистра i.

Программа для МДО состоит из начальных значений каждого регистра и последовательности операций. Для заданных целых чисел N и R необходимо написать для МДО программу, которая печатает убывающую последовательность целых чисел N, N–1, N–2, ..., 0. Максимальное количество подряд идущих S-операций должно быть как можно меньше.

Решение задачи. Программа для МДО должна включать в себя начальные значения регистров a_1, a_2, ...a_R. Обозначим t как максимальное количество подряд идущих S-операций. Предположим, что мы уже умеем заполнять регистры начальными значениями, чтобы при выводе использовать не более t операций. Пусть для определенности значения регистров образуют убывающую последовательность. Заметим, что последнее число, которое должно быть напечатано, – 0. Так как 0 не может быть получен каким-либо способом, то он должен храниться в последнем регистре от начала и до конца выполнения программы. Также заметим, что первым напечатанным числом должно быть N и не имеет смыла выполнять S-операции, чтобы его получить, следовательно, первый регистр должен иметь начальное значение именно N. И последнее: нет смысла изменять начальное значение регистра, пока оно не будет напечатано программой для МДО.

Рассмотрим частные случаи.

1. Решить задачу для N, R ($N < R$). В качестве начальных значений регистров можно задать весь диапазон N...0, тогда $t = 0$.

Пример: $N = 3$, $R = 5$. Начальные значения регистров: 3 2 1 0 0

Программа для МДО:

Команда	Результат
P 1	3
P 2	2
P 3	1
P 4	0

Для решения задачи требуется всего N+1 регистр. В данном примере один из регистров оказался неиспользуемым, его значение может быть произвольным.

2. Решить задачу для N, R ($R = 2$). Начальные значения регистров определяются однозначно (N, 0). Чтобы получить число N-1 из 0, требуется $t = N-1$ S-операций. Для остальных чисел требуется меньшее число S-операций. Это и будет оптимальным решением.

Пример: $N = 4$, $R = 2$ ($t = N-1 = 3$). Начальные значения регистров: 3 0

ВЕСНИН Роман Александрович – студент V курса факультета информатики ВятГГУ
© Веснин Р. А., 2007

Программа для МДО:

Команда	Регистры	Результат
P 1	4 0	4
S 2 1	1 0	
S 1 1	2 0	
S 1 1	3 0	
P 1	3 0	3
S 2 1	1 0	
S 1 1	2 0	
P 1	2 0	2
S 2 1	1 0	
P 1	1 0	1
P 2	1 0	0

Для диапазона чисел N...1, выводимого с первого регистра командой «P 1», регистр с номером 2, хранящий 0, назовем отсчетным, так как в данном примере все последовательности S-операций начинаются с команды «S 2 1», то есть каждый раз очередное число для вывода получается «с нуля».

3. Решить задачу для N, R (R = 3). Начальные значения регистров (N, X, 0). Если можно представить N = 3*M, то X может принимать значения {2*M−1, 2*M, 2*M+1}; если можно представить N = 3*M+1, то X может принимать значения {2*M, 2*M+1}; если можно представить N = 3*M+2, то X может принимать значения {2*M+1}. При этом t = M.

Пример: N = 7, R = 3 (M = 2, t = M = 2, N = 3*M+1, пусть X = 2*M = 4).

Начальные значения регистров: 7 4 0

Программа для МДО:

Команда	Регистры	Результат
P 1	7 4 0	7
S 2 1	5 4 0	
S 1 1	6 4 0	
P 1	6 4 0	6
S 2 1	5 4 0	
P 1	5 4 0	5
S 3 1	1 4 0	
S 1 1	2 4 0	
P 2	2 4 0	4
S 1 2	2 3 0	
P 2	2 3 0	3
P 1	2 3 0	2
S 3 1	1 3 0	
P 1	1 3 0	1
P 3	1 3 0	0

В данном примере в решении задачи выделились следующие основные блоки:

• вывод диапазона 7...4+1, используя 2 регистра: 1-й и 2-й (регистр 2 – отсчетный).

• вывод диапазона 4...2+1, используя 2 регистра: 1-й и 2-й (регистр 1 – отсчетный).

• вывод диапазона 2...0+1, используя 2 регистра: 1-й и 3-й (регистр 3 – отсчетный).

• вывод 0 с регистра 3.

Из примера видно, что задача для трех регистров была сведена к трем подзадачам для двух регистров. Перед решением 2-й подзадачи пришлось решить вспомогательную задачу, суть которой состоит в подготовке значений регистров: используя регистр 3 как отсчетный, в регистр 1 было занесено значение 2. После чего регистр 1 смог стать отсчетным во 2-й подзадаче.

4. Решить задачу для N, R ($N < \sum_{i=1}^{R} i$). Начальное значение i-го регистра можно задать формулой $a_i = \max(N+1-\sum_{j=1}^{i} j, 0)$, при этом t = 1. Решение будет оптимальным, если в процессе вывода не присутствуют S-операции вида «S i i». Это связано с тем, что после команды «P i» значение в регистре i становится ненужным и на его место можно записать новое значение из другого регистра, увеличенное на единицу. Данное условие является достаточным, но не является необходимым. В связи с этим может существовать не одно оптимальное решение. В качестве доказательства приведем пример, иллюстрирующий истинность данного утверждения.

Пример: N = 9, R = 4 ($9 < \sum_{i=1}^{4} i = 10$). Начальные значения регистров: 9 7 4 0

1-я программа для МДО с соблюдением условия

Команда	Регистры	Результат
P 1	9 7 4 0	9
S 2 1	8 7 4 0	
P 1	8 7 4 0	8
S 3 1	5 7 4 0	
P 2	5 7 4 0	7
S 2 1	5 6 4 0	
P 2	5 6 4 0	6
S 4 2	5 1 4 0	
P 1	5 1 4 0	5
S 2 1	2 1 4 0	
P 3	2 1 4 0	4
S 1 3	2 1 3 0	
P 3	2 1 3 0	3
P 1	2 1 3 0	2
P 2	2 1 3 0	1
P 4	2 1 3 0	0

Оптимальное решение.

2-я программа для МДО без соблюдения условия

Команда	Регистры	Результат
P 1	9 7 4 0	9
S 2 1	8 7 4 0	
P 1	8 7 4 0	8
S 3 1	5 7 4 0	
P 2	5 7 4 0	7
S 2 1	5 6 4 0	
P 2	5 6 4 0	6
S 4 2	5 1 4 0	
P 1	5 1 4 0	5
S 2 2	5 2 4 0	
P 3	5 2 4 0	4
S 2 3	5 2 3 0	
P 3	5 2 3 0	3
S 4 3	5 2 1 0	
P 2	5 2 1 0	2
P 3	5 2 1 0	1
P 4	5 2 1 0	0

Наличие команды “S i i” не влияет на оптимальность решения.

Если решать задачу, к примеру, для N = 14 при R = 5 ($14 < \sum_{i=1}^{5} i = 15$), то при начальных значениях регистров (14 = 9+5, 12 = 7+5, 9 = 4+5, 5 = 0+5, 0) можно использовать 1-ю программу для МДО. Она выведет диапазон чисел из десяти чисел 14...5, и небольшая модификация в конце

программы для вывода всего диапазона 14...0 даст полное решение, которое будет оптимальным.

Модификация программ для задачи N = 14, R = 5:

1-я программа для МДО с соблюдением условия

Команда	Регистры	Результат
P 1	14 12 9 5 0	14
S 2 1	13 12 9 5 0	
P 1	13 12 9 5 0	13
S 3 1	10 12 9 5 0	
P 2	10 12 9 5 0	12
S 2 1	10 11 9 5 0	
P 2	10 11 9 5 0	11
S 4 2	10 6 9 5 0	
P 1	10 6 9 5 0	10
S 2 1	7 6 9 5 0	
P 3	7 6 9 5 0	9
S 1 3	7 6 8 5 0	
P 3	7 6 8 5 0	8
S 5 3	*7 6 1 5 0*	
P 1	7 6 1 5 0	7
S 3 1	*2 6 1 5 0*	
P 2	2 6 1 5 0	6
S 1 2	*2 3 1 5 0*	
P 4	2 3 1 5 0	5
S 2 4	*2 3 1 4 0*	
P 4	*2 3 1 4 0*	*4*
P 2	*2 3 1 4 0*	*3*
P 1	*2 3 1 4 0*	*2*
P 3	*2 3 1 4 0*	*1*
P 5	*2 3 1 4 0*	*0*

Оптимальное решение.

2-я программа для МДО без соблюдения условия

Команда	Регистры	Результат
P 1	14 12 9 5 0	14
S 2 1	13 12 9 5 0	
P 1	13 12 9 5 0	13
S 3 1	10 12 9 5 0	
P 2	10 12 9 5 0	12
S 2 1	10 11 9 5 0	
P 2	10 11 9 5 0	11
S 4 2	10 6 9 5 0	
P 1	10 6 9 5 0	10
S 2 2	*10 7 9 5 0*	
P 3	10 7 9 5 0	9
S 2 3	10 7 8 5 0	
P 3	10 7 8 5 0	8
S 4 3	10 7 6 5 0	
P 2	10 7 6 5 0	7
S 5 2	*10 1 6 5 0*	
P 3	10 1 6 5 0	6
S 2 3	*10 1 2 5 0*	
P 4	10 1 2 5 0	5
S 4 4	*10 1 2 3 0*	

Дальнейший вывод убывающей последовательности невозможен при t = 1.

(курсивом отмечены строки, добавленные в программу)

И пусть 2-я программа также дает оптимальное решение для задачи N = 9, R = 4, ее модификация как 1-й программы невозможна для задачи N = 14, R = 5, так как операция «S i i» стирает из регистра i предыдущее значение, которое нужно будет получать повторно (хотя есть возможность использовать свободный регистр для записи нового значения).

На данном примере мы показали, что при решении задачи для N = 14, R = 5 ее можно разбить на две подзадачи:

• первоначально решается задача для N = 9, R = 4 и выводится диапазон чисел 14...6 с использованием отсчетного регистра 4 со значением 5 вместо 0.

• затем решается задача для N = 5, R = 5 с использованием отсчетного регистра 5 со значением 0.

После рассмотрения частных случаев перейдем к поиску решения задачи в общем виде. Если пытаться решать задачу «в лоб», то необходимо перебрать все возможные наборы начальных значений регистров, образующих убывающую последовательность, количество таких наборов C_{N-1}^{R-2}, и из всех возможных последовательностей операций для каждого набора, приводящих к выводу убывающей последовательности N...0, выбрать оптимальное решение. Попробуем подсчитать количество различных последовательностей операций для произвольного набора начальных значений регистров. Пусть мы хотим ограничиться t операциями; максимальное значение, которое может принимать t, равно N−1. Программа для МДО должна содержать N+1 P-операцию, и между любыми двумя соседними P-операциями может располагаться 0...N−1 S-операций. Таким образом, количество последовательностей, состоящих из P-, S-операций, равно N^N. Заметим, что данная формула не учитывает различные комбинации индексов, стоящих при P-, S-операциях, но при этом большая часть от числа всех последовательностей операций не будет давать корректного решения (их нужно отсекать каким-либо способом). Полученная оценка $O(C_{N-1}^{R-2} \cdot N^N) = O(N^N)$, хотя очень приблизительна, четко дает понять, что простым перебором задача не решается.

В качестве метода решения задачи можно использовать следующий. Исходная задача для N, R переходит в задачу для N, R, t (дополнительный параметр), для которой требуется выяснить: разрешима новая задача при заданных параметрах или нет. Таким образом, подобрав минимальное значение параметра t при неизменных N, R, когда новая задача разрешима, мы получаем одновременно и решение исходной задачи.

Задачу для N, R, t решать проще, так как она имеет на одну известную величину больше и требует лишь проверки разрешимости. Как же проверить, что данная задача имеет решение? Ответ – очень просто. Как мы знаем, на двух регистрах при заданном t можно решить задачу для $N \le t+1$. Далее работает следующая схема: если число задействованных регистров меньше R, то добавляем еще один регистр и ищем максимальное число N', для которого разрешима задача (при этом используются найденные ранее решения для меньших значений N' и количества регистров), в противном случае проверяем, если $N' \ge N$, то задача разрешима.

Такой подход позволяет перейти к рекурсивной схеме решения задачи для N, R, t. Предположим, при заданном t мы определили, что на r регистрах задача имеет решение (и мы знаем, как его получить) для всех чисел из диапазона 0...n. Теперь мы желаем увеличить число регистров на 1. Естественно, что по-прежнему существует решение для диапазона 0...n, так как новый регистр можно не задействовать, а использовать уже существующие решения для r регистров. Этот вариант мало интересен; для чего хранить одинаковые решения?

Пусть мы хотим проверить, существует ли решение для n, r+1, t. Теоретически в регистр r может быть записано любое число 0...max(0, n−r+1), чтобы была возможность записать во все регистры значения, образующие убывающую по-

следовательность. Пусть в регистр r записано некоторое значение b. Программа для МДО не должна изменять это значение, пока не будет выведен диапазон n..b+1 из k = n−b чисел. Если разрешимы задачи для k, r, t (отсчетный регистр r содержит значение b вместо 0) и для b, r+1, t, то вместе они выводят диапазон n...0. Остается в программу МДО для задачи k, r, t внести дополнение, которое к завершению этой программы в первые r−1 регистр запишет начальные значения для задачи b, r+1, t (данный прием показан в примере 4). Если это возможно, то обе программы для указанных задач становятся «одним целым» – задача для n, r+1, t разрешима. В противном случае в регистр r можно записать другое значение b и повторить проверку.

Данный алгоритм для произвольной задачи N, R, t находит единственный набор начальных значений регистров и единственную последовательность операций. Так как отсечение вариантов алгоритмом очень велико, то весьма вероятно, что будет отсечено оптимальное решение, следовательно, алгоритм является приближенным. Выполним оценку сложности алгоритма. Для определения параметра t требуется $O(\log N)$ операций, так как t можно подобрать бинарным методом в диапазоне 0...N−1. При заданном t нужно проверить разрешимость всех задач для n, r, t ($1 \le n \le N$, $2 \le r \le R$), их количество $O(N \cdot R)$. Для проверки одной задачи требуется подобрать значение b – количество операций $O(N)$ – и проверить осуществимость вывода последовательности чисел – количество операций $O(N^2)$ – столько операций в программе МДО. Объединяя все результаты, получаем следующую оценку – $O(N^4 R\log(N))$.

Проверку разрешимости задачи и вывод оптимального решения можно выполнять с помощью одного алгоритма, только в первом случае без отображения данных. Алгоритм задачу для n, r, t разбивает на две подзадачи для k, r−1, t и для b, r, t. Введем обозначения: b – база числа n, k = n−b – остаток числа n. Затем каждая подзадача также разбивается на более мелкие подзадачи, пока число регистров не станет равно 2. В каждой очередной первой подзадаче число регистров уменьшается на один, а во второй подзадаче число регистров будет уменьшаться, когда b станет меньше r (для ее решения достаточно b регистров) – это обязательно произойдет на каком-то из шагов. Как только получили подзадачу с двумя регистрами, один из которых является отсчетным, ее можно решить, так как для этой подзадачи имеется оптимальный алгоритм решения (см. пример 2).

После изложения основной идеи метода решения задачи остается одна нерассмотренная проблема – как сделать так, чтобы алгоритм мог находить решение, наиболее близкое к оптимальному. Для устранения этой неопределенности можно ввести дополнительный критерий, который позволит определить, какое из разбиений на подзадачи в зависимости от b наиболее выгодно для произвольной задачи для n, r, t в качестве ее использования как подзадачи, принадлежащей большей задаче.

Перейдем к заполнению начальных значений регистров. Опишем двумерную таблицу A размерностью Nmax*Rmax. В каждой ячейке A[i,j] будут храниться параметры b, r, c:

- i – число, для которого решается задача ($1 \le i \le N$);
- j – количество регистров ($2 \le j \le R$);
- b – база числа i, остаток k числа i можно не хранить;
- r – число регистров, необходимых для решения задачи для числа b при использовании не более t операций;
- c – количество S-операций, которые не были использованы при выводе («резервные»).

Рассмотрим на примере, как вычисляется значение параметра c. Пример: пусть требуется проверить разрешимость задачи для N = 7, R = 4, t = 2.

№	Команда	Регистры	Результат	№	Команда	Регистры	Результат	Пояснение
1	P 1	7 4 0	7	13	P 2	2 3 0	3	SL – S-операция, которая не может быть выполнена, так как отсутствуют свободные регистры, в которые можно было бы записать новое значение. В данном примере их количество равно 2. SC – S-операция, которая сейчас не выполняется, но может быть использована, когда данная задача будет выполняться как подзадача. В данном примере их количество равно c = 7.
2	S 2 1	5 4 0		14	SC			
3	S 1 1	6 4 0		15	SC			
4	P 1	6 4 0	6	16	P 1	2 3 0	2	
5	S 2 1	5 4 0		17	S 3 1	1 3 0		
6	SL			18	SC			
7	P 1	5 4 0	5	19	P 1	1 3 0	1	
8	S 3 1	1 4 0		20	SC			
9	S 1 1	2 4 0		21	SC			
10	P2	2 4 0	4	22	P 3	1 3 0	0	
11	S 1 2	2 3 0		23	SC			
12	SL			24	SC			

Так как в данном примере t = 2, то после каждой команды «P i» может быть выполнено 2 S-операции. Пример иллюстрирует 2 типа S-операций – SL и SC. Так как при выборе разбиения необходимо убедиться в разрешимости задачи, то подсчет количества SC операций может осуществить соответствующая процедура проверки. Алгоритму необходимо знать значение c – количество SC операций. Именно оно является дополнительным критерием: разбиение, при котором c принимает максимальное значение, считается наиболее предпочтительным.

Задание параметров b и r позволяет задаче для N, R однозначно указать разбиение на две подзадачи: задача для N–b, R–1 и задача для b, r. В свою очередь, каждая подзадача также имеет однозначное разбиение. Таким образом, алгоритм находит единственное приближенное решение задачи для N, R.

Если используется не более t операций, то можно сразу заполнить следующие ячейки таблицы A:

• для j = 2 заполнить t+1 ячейку A[i,2] (i = 1...t+1), для которых b = i, r = 1, c = t;

• для i = 1 заполнить r–1 ячейку A[1,j] (j = 2...r), для которых b = 1, r = 1, c = t.

Основываясь на этих данных, для всех ячеек A[i,j] (i = 2...N, j = 3...R) будем искать параметры, которые удовлетворяют решению задачи для i, j, t. Для проверки разрешимости задачи для i, j требуется проверить для каждой пары задач для b, r, t и для k, j–1, t их разрешимость (b = 1...i–1, k = i–b, r = 2...j), и уже при положительном результате в обоих случаях имеет смысл проверить разрешимость задачи для i, j, t, т. е. применить к ней найденное разбиение и убедиться в корректности вывода. Если в процессе вывода действительно оказалась убывающая последовательность целых чисел i, i–1, i–2, ..., 0, то найдено решение задачи для i, j, t.

Существует условие, при невыполнении которого задача для i, j, t при заданном разбиении будет неразрешима: b–t–1 ≤ a[k,j–1].c. Число b–t–1 представляет собой максимальную величину из всех неизвестных начальных значений регистров при решении задачи для b, r, t. Число a[k,j–1].c – это количество резервных S-операций, которые могут быть использованы при решении задачи для k, j–1, t. Данное условие является лишь необходимым требованием, но позволяет отсечь большую часть решений, заведомо приводящих к неоптимальному результату.

Пример заполнения таблицы A для ячейки A[4,4] при t = 1. Пусть первые три строки таблицы A уже заполнены.

i\j	2			3			4		
	b	r	c	b	r	c	B	r	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	1	2	1	1	2
3	–	–	–	1	1	2	1	1	3
4	–	–	–	2	1	2	?	?	?

Возможны следующие варианты разбиения задачи для 4 4 на подзадачи:

Разбиение, (k j-1) (b r)	Задача разрешима	Значение c	Разбиение, (k j-1) (b r)	Задача разрешима	Значение c
(3 3) (1 2)	да	3	(2 3) (2 4)	Да	3
(3 3) (1 3)	да	3	(1 3) (3 2)	Нет	–
(3 3) (1 4)	да	3	(1 3) (3 3)	Да	2
(2 3) (2 2)	да	3	(1 3) (3 4)	Да	2
(2 3) (2 3)	да	3			

При первых шести разбиениях параметр c принимает максимальное значение. Из этих вариантов оставим те, где b максимально – чем больше «нагрузка» сейчас, тем меньше «нагрузка» будет потом. Среди оставшихся выбираем разбиение с минимальным значением r – чем меньше требуется «ресурсов» для выполнения данной задачи, тем больше свободных «ресурсов» для выполнения последующих задач. Заметим, что приведенный способ выбора разбиения не является единственным возможным. Можно рассматривать различные стратегии выбора разбиения на подзадачи, руководствуясь другими признаками и критериями.

После заполнения таблицы A становится возможным указать начальные значения регистров. Для хранения значений регистров опишем одномерный массив Reg размерностью Rmax. Ранее было оговорено, что значения в регистрах будем располагать в убывающем порядке. В задаче для N, R два значения уже известны: регистр Reg[1] содержит значение N, регистр Reg[R] содержит 0. В данной задаче регистр R является отсчетным, так как он хранит минимальное значение, которое должно быть выведено в процессе решения данной задачи. Ячейка таблицы A[N,R] содержит значение b. Разбиваем задачу для N, R на подзадачи для N–A[N,R].b, R–1 и для A[N,R].b, A[N,R].r. Первая подзадача использует на один регистр меньше, то есть первые R–1, последний из которых является отсчетным и содержит значение Reg[R]+A[N,R].b. Аналогичным образом продолжаем заполнять регистры для задачи для N–A[N,R].b, R–1. Обозначим k = N–A[N,R].b и r = R–1. Теперь задача для k, r разбивается на подзадачи: k-A[k,r].b, r–1 и A[k,r].r. Видно, что первая подзадача решается на r–1=R–2 регистрах, последний из которых Reg[r–1] будет содержать значение Reg[r]+A[k,r].b. Значение еще одного регистра стало известно. Этот процесс продолжается, пока не станут известны значения всех регистров.

Последнее, что не было еще рассмотрено, – это процесс вывода команд, которые осуществляют печать убывающей последовательности. Для решения этой задачи все исходные данные уже подготовлены:

• известны начальные значения регистров;

• известно разбиение любой задачи на подзадачи, решение которой может потребоваться;

• известен способ решения задачи на двух регистрах.

Каждая подзадача, получаемая при разбиении, характеризуется своим состоянием: набором регистров, которые ей выделены, и их значениями. Понятно, что, когда происходит разбиение задачи, не каждой подзадаче будут выделены все регистры сразу. Из алгоритма получения начальных значений регистров видно, что для всякой первой подзадачи при разбиении задачи для n, r известны значения всех регистров, а для второй подзадачи – значения только первого регистра с номером r–1 и последнего с номером r (Reg[r] = 'отсчетное значение', Reg[r–1] = Reg[r]+b). Состояние задачи для n, r можно описать следующей структурой: (n, r, rc, nums), где:

• rc – текущее количество регистров, которое выделено подзадаче; до начала решения подзадачи должно выполняться: rc = r.

• nums – массив, хранящий номера индексов регистров задачи для n, r в порядке убывания значений, записанных в регистры.

Суть решения заключается в следующем:

1. Заполнение регистров REGS начальными значениями по данным таблицы A.

2. Поместить в стек (N, R, R, (1, 2, ..., R)).

3. Извлечь из стека (n, r, rc, nums), (если rc < r, то задача не может быть решена).

4. Если r = 2, то решить задачу на двух регистрах.

5. Иначе разбить задачу на 2 подзадачи.

6. Если стек не пуст, то перейти к пункту 3, иначе к пункту 7.

7. Вывести 0 из регистра REGS[R].

Решение задачи для n на двух регистрах:

а) Выполнить 'P (nums[1])'

б) Получение последовательности от REGS[nums[2]]+n-1 до REGS[nums[2]]+1:

В цикле для i от n–1 до 1

– Выполнить одну 'S-операцию (nums[2]) (nums[1])'.

– Выполнить i–1 раз 'S-операцию (nums[1]) (nums[1])'.

– Выполнить t–i раз 'S-операцию' над регистрами, где это возможно.

– Выполнить 'P (nums[1])'.

в) Освободить регистр с номером nums[1]:

– Начиная с вершины стека, найти в нем подзадачу, в которой rc < r.

– Освобождаемому регистру присвоить индекс регистра, который будет хранить минимальное из еще неполученных начальных значений для подзадачи.

– Увеличить значение rc на 1.

г) Выполнить t раз 'S-операцию' над регистрами, где это возможно.

Разбиение задачи на подзадачи:

а) Объявить массив индексов регистров nums2 для второй подзадачи и указать в нем индексы первого и последнего регистров: nums2[1] = nums2[r–1], nums2[A[n,r].r] = nums[r]; затем поместить в стек вторую подзадачу (A[n,r].b, A[n,r].r, 2, nums2).

б) Поместить в стек первую подзадачу (n–A[n,r].b, r–1, r–1, nums).

Таким образом, сначала будет решаться первая подзадача, а только затем вторая.

В описании алгоритма присутствуют слова «*выполнить 'S-операцию' над регистрами, где это возможно*». Под ними понимается следующее: начиная с вершины стека, найти в нем подзадачу, в которой регистр с последним присвоенным индексом, равным last, хранит значение REGS[nums[last]], отличное от положенного начального значения. Если REGS[nums[last]] меньше требуемой величины, то должна быть выполнена 'S-операция (nums[last]) (nums[last])', иначе 'S-операция (nums[last-1]) (nums[last])' – это случай, когда регистр был освобожден другой подзадачей, выводящей диапазон из больших чисел, и после этого его значение не изменялось. Именно эти 'S-операции' используются для подготовки начальных значений регистров подзадач, находящихся в стеке и ожидающих выполнения.

Рассмотрим пример работы программы при заполненной таблице A и подобранном значении t. Пример: N = 10, R = 4, t = 2

Таблица A

i\j	2			3			4		
	b	r	c	b	r	c	b	r	c
1	1	2	2	1	2	2	1	2	2
2	2	2	2	1	2	4	1	2	4
3	3	2	2	1	2	5	1	2	6
4				1	2	5	2	3	7
5				2	2	5	3	3	8
6				3	2	5	3	3	9
7				4	3	5	4	3	9
8				5	3	5	3	3	10
9							3	3	10
10							3	3	11

Заполним регистры начальными значениями: REGS[1] = N = 10, REGS[4] = 0, REGS[1] = = REGS[0]+A[10,4].b = 3, REGS[2] = = REGS[1]+A[10–3,3].b = 7. REGS = (10 7 3 0).

Шаг	Регистры	Стек (n, r, rc, (nums))	Извлечено из стека	Команда	Результат
2	(10 7 3 0)	(10 4 4 (1 2 3 4))			
3	(10 7 3 0)		(10 4 4 (1 2 3 4))		
5 а)	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4))	(10 4 4 (1 2 3 4))		
5 б)	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (7 3 3 (1 2 3))	(10 4 4 (1 2 3 4))		
3	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (3 3 2 (3 0 4))	(7 3 3 (1 2 3))		
5 а)	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(7 3 3 (1 2 3))		
5 б)	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3)) (3 2 2 (1 2))	(7 3 3 (1 2 3))		
3	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))		
4 а)	(10 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))	P 1	10
4 б)	(8 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))	S 2 1	
	(9 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))	S 1 1	
	(9 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))	P 1	9
	(8 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))	S 2 1	
	(8 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 0 3))	(3 2 2 (1 2))	P 1	8
4 в)	(8 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 2 (2 1 3))	(3 2 2 (1 2))		
4 г)	(4 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (4 3 3 (2 1 3))	(3 2 2 (1 2))	S 3 1	
3	(4 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4))	(4 3 3 (2 1 3))		
5 а)	(4 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(4 3 3 (2 1 3))		
5 б)	(4 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3)) (3 2 2 (2 1))	(4 3 3 (2 1 3))		
3	(4 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))		
4 а)	(4 7 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	P 2	7
4 б)	(4 5 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	S 1 2	
	(4 6 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	S 2 2	
	(4 6 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	P 2	6
	(4 5 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	S 1 2	
	(4 5 3 0)	(3 3 2 (3 0 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	P 2	5

4 в)	(4 5 3 0)	(3 3 3 (3 2 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))		
4 г)	(4 1 3 0)	(3 3 3 (3 2 4)) (1 2 2 (1 3))	(3 2 2 (2 1))	S 4 2	
3	(4 1 3 0)	(3 3 3 (3 2 4))	(1 2 2 (1 3))		
4 а)	(4 1 3 0)	(3 3 3 (3 2 4))	(1 2 2 (1 3))	P 1	4
4 б,в,г)					
3	(4 1 3 0)		(3 3 3 (3 2 4))		
5 а)	(4 1 3 0)	(1 2 2 (2 4))	(3 3 3 (3 2 4))		
5 б)	(4 1 3 0)	(1 2 2 (2 4)) (2 2 2 (3 2))	(3 3 3 (3 2 4))		
3	(4 1 3 0)	(1 2 2 (2 4))	(2 2 2 (3 2))		
4 а)	(4 1 3 0)	(1 2 2 (2 4))	(2 2 2 (3 2))	P 3	3
4 б)	(4 1 2 0)	(1 2 2 (2 4))	(2 2 2 (3 2))	S 2 3	
	(4 1 2 0)	(1 2 2 (2 4))	(2 2 2 (3 2))	P 3	2
4 б,в,г)					
3	(4 1 2 0)		(1 2 2 (2 4))		
4 а)	(4 1 2 0)		(1 2 2 (2 4))	P 2	1
4 б,в,г)					
7	(4 1 2 0)		(1 2 2 (2 4))	P 4	0

Итак, решение найдено. Техника введения дополнительного параметра позволяет получить его за реальное время.

Н. А. Кротова

ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

В статье рассматривается возможность реализации индивидуального подхода к учащимся на уроках информатики посредством учета индивидуальных способностей, которые следует учитывать в разных видах деятельности.

Мало что изменилось в принципах организации обучения со времен создателя классно-урочной системы Я. А. Коменского: постоянный состав учащихся, ведущая роль учителя... Даже такому новому революционному средству обучения, как компьютер, не удалось в полной мере изменить представление о традиционном уроке, сложившееся за сотни лет.

И хотя все видят, знают и понимают, что сколько учеников, столько и должно быть вариантов изучения каждой темы, что с помощью компьютера эту задачу, наверное, можно решить, часто мы все же выбираем иллюстративный метод обучения – нам так проще, мы так привыкли, так всегда было. При этом понимаем, что шансы стимулировать мышление школьников, их творческую деятельность угасают с каждым уроком, так же как интерес к информатике вообще. Ведь вместо того чтобы посидеть в Интернете или создать злобный вирус на уроке информатики, как, впрочем, и на любом другом, приходится слушать учителя, вести скучные записи, которые непременно нужно будет выучить. А в это время компьютер совсем рядом, он зовет к себе, ведь в нем столько интересного, яркого, живого и непознанного, что даже кажется, что ты никогда и не поймешь, как там столько поместилось и как это все может работать вместе. А ведь хочется! Хочется быть не хуже других, чтобы сел за компьютер и сразу все легко получилось, и чтобы у тебя обязательно было лучше, чем у всех остальных.

И, наверное, каждый учитель наблюдал, как на смену первоначальному восторгу от начала нового, необычного и интересного урока информатики приходит быстрое разочарование. К сожалению, очень часто мы сталкивается с тем, что часть учеников не готова к самостоятельной работе, а иногда даже не способна ввести в компьютер программу, написанную на доске. Далеко не каждый ученик умеет внимательно выслушать постановку задачи и объяснение учителя, принять верное решение в выборе программного средства или метода решения задачи по программированию. Каждый старается показать себя с лучшей стороны, но часто это оказывается не под силу.

КРОТОВА Наталья Алексеевна – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ
© Кротова Н. А., 2007

Чтобы исправить ситуацию, на уроке необходимо активизировать работу в паре учитель – ученик, потому что в непосредственном общении с учеником один на один учитель может не только выяснить характер затруднений и ошибок, ликвидировать пробелы в знаниях, но и оказать психолого-педагогическую помощь и поддержку.

Встает вопрос: «Как учителю найти в себе столько внимания и сил, чтобы успеть подсказать каждому, для каждого дать индивидуальное задание, а главное – как проконтролировать и оценить результаты работы каждого ученика?».

Такую задачу учителю может помочь решить разработанная система опроса учащихся, справочные материалы, привлечение к работе учеников-консультантов. Но делегирование нескольких функций учителя не решает проблему в полной мере.

На уроках информатики присутствует принципиально иное средство – компьютер, который выводит процесс обучения на качественно новый уровень. Прежде всего ученик становится более самостоятелен в процессе познания, в силу того что компьютер берет на себя некоторые функции контроля, предоставления справочной информации, подсказки.

Компьютер – это инструмент, который не только позволяет организовывать самостоятельную работу каждого ученика, с его помощью учитель получает намного больше информации об ученике: о его индивидуальном темпе работы, об уровне самостоятельности в освоении нового материала, о характере ошибок, допускаемых им при работе. Такую информацию учитель может получить, когда видит ход и результат выполнения того или иного задания. Кроме того, компьютер в некотором смысле освобождает часть времени учителя, во время которого он может индивидуализировать воздействие на ученика, предложив ему индивидуальное задание, в случае необходимости оказать дозированную помощь. Ученик же сможет работать в удобном для него темпе.

Таким образом, учитель дает не только индивидуальное задание, но и работает с учеником индивидуально, причем взаимодействие осуществляется не только в непосредственном контакте, но и через компьютер.

Современной дидактикой разработано множество методов, позволяющих добиться максимально индивидуального подхода на уроке информатики. Отметим некоторые из них.

Метод проектов – это совокупность приёмов, действий учащихся в их определённой последовательности для достижения поставленной задачи – решения определенной проблемы, значимой для учащихся и оформленной в виде некоего конечного продукта. Метод был разработан американским педагогом У. Килпатриком в 1920-е гг. Основная цель метода состоит в предоставлении учащимся возможности самостоятельного приобретения знаний в процессе решения практических задач или проблем, требующего интеграции знаний из различных предметных областей. Преподавателю в рамках проекта отводится роль координатора, эксперта, дополнительного источника информации и т. п. [1]

Модульное обучение — способ организации учебного процесса на основе блочно-модульного представления учебной информации. Сущность модульного обучения состоит в том, что содержание обучения структурируется в автономные организационно-методические блоки — модули, содержание и объем которых могут варьироваться в зависимости от дидактических целей, профильной и уровневой дифференциации обучающихся, желаний обучающихся по выбору индивидуальной траектории движения по учебному курсу [2].

Суть адаптивной системы обучения заключается в том, что учитель может выделить 60–80% времени урока на индивидуальную работу с учениками. Методика предполагает оригинальную, нелинейную конструкцию урока. Часть первая – обучение всех, часть вторая – два параллельных процесса: самостоятельная работа учащихся и индивидуальная работа учителя с отдельными учениками. Для того чтобы максимально адаптировать изучаемый материал к индивидуальным особенностям учащихся, предлагаются многоуровневые задания (карточки с адаптацией). Большую часть времени, отведенного для самостоятельной работы, учащиеся занимаются в парах сменного состава [3].

Далее попытаемся предложить еще один метод индивидуализации обучения.

Наверное, каждый учитель интуитивно разбивает учащихся класса на три уровня:

I. Сильные (Advanced – A).

II. Средние (General – G).

III. Слабые (Minimal – M).

Конечно, о существовании такого деления ученик не догадывается, им руководствуется только учитель, чтобы найти индивидуальный подход к каждому.

Но сразу же возникает вопрос: «А по какому критерию?». Ответ каждого учителя будет неоднозначным. Учащихся можно дифференцировать по темпу усвоения материала, по способностям, по интересу к предмету и т. д. Сделаем вывод, что по одному признаку разбить нельзя, попробуем предложить следующие критерии деления. Они могут выбираться в зависимости от вида деятельности:

• при формировании навыков работы с новым программным средством, новой алгоритмической

конструкцией будет цениться *самостоятельность в добывании знаний;*

• при решении задач исследовательского характера важным критерием станет *умение обобщать*;

• при решении задач по программированию будет цениться умение найти стандартную конструкцию, стандартный способ в совершенно новой ситуации, т. е. *критерий эвристики;*

• при решении типовых задач – это *потребность в общении с учителем*

• при решении задач любого характера всегда найдутся ученики с разным *темпом выполнения*. При этом не каждый ученик с высоким темпом выполнения справится со всеми заданиями верно, а ребенок с низким темпом работы иногда добивается лучших результатов и решений среди других учащихся класса, которые справились с заданием быстрее.

И каждый ученик будет находиться в разных группах в зависимости от выбранного критерия (см. таблицу).

Например, обязательно найдутся ученики с прекрасными способностями обобщать, но при этом у всех у них потребность в общении с учителем будет разной.

Кроме того, обязательно найдутся такие, которые будут находиться в «пограничном» состоянии – на границе между I и II группой – A-G, между II и III группой – G-M. Таким образом, получаем пять уровней выраженности одного и того же критерия. Учитывая это, а также неоднозначность нахождения ученика на том или ином уровне в зависимости от выбранной характеристики, получим, что даже если взять два критерия и попытаться определить учеников с одинаковой степенью их выраженности в одну группу, сможем получим двадцать пять различных объединений. При учете трех критериев получим более ста возможных комбинаций.

Как правило, на уроке работу за компьютером ученики всего класса начинают одновременно, но в любой момент урока каждый из них достигает разных результатов. Таким образом, мы можем говорить, что на уроке присутствует **N** образовательных процессов. Задача учителя заключается в выстраивании для каждого учащегося индивидуальной образовательной траектории [4].

Разные виды работ выводят на первое место один из критериев. Учет ведущего критерия и знание индивидуальных особенностей каждого учащегося (уровня знаний, способности к тому или иному виду деятельности и т. д.) будет тем инструментом, который поможет учителю найти индивидуальный подход.

Попробуем привести примеры таких заданий.

Задания, учитывающие темп учащихся. Такие задания подходят в случае изучения нового для всех материала. Сначала выполняются общие задания, а затем – более трудные и творческие. Но для учащихся, обладающих высоким темпом работы и высоким уровнем знаний, целесообразно отдать приоритет более трудным заданиям.

Задания, учитывающие уровень знаний, умений и навыков учащихся

Потребность в этих заданиях вырастает из-за различий в уровне знаний, умений и навыков учащихся. Эти различия выражаются в двух направлениях: у ученика знаний меньше, чем предполагается программой, или же они имеются у него уже до начала занятий по программе. Основная цель таких заданий – избежать такого положения, когда ученик должен выполнять задания, находящиеся ниже актуального уровня его развития [6].

Если ученик имеет бессистемные, неточные предварительные знания, то задание должно позволить ученику интегрировать эти знания и жизненный опыт с новым материалом. Другой тип задач, заставляющих ученика кратко повторить новый учебный материал, а затем представить ему материал для обогащения, целесообразно давать тогда, когда ученик в основном знает материал. Задания для учеников, которые владеют учебным материалом, должны заставлять ученика сразу выполнять обогащающее задание и тем самым освобождать его от проработки нового материала.

Деление заданий достаточно условно и может быть продолжено, учитель в своей работе должен руководствоваться, прежде всего, характером изучаемого материала, местом темы и индивидуальными особенностями учащихся, рассмотренными в статье.

Можно предположить, что, разработав систему заданий для разных видов учебной деятельности с учетом ведущего критерия, учитель с успехом может построить для каждого ученика свою образовательную траекторию.

Самостоятельность в добывании знаний	Умение обобщать	Критерий эвристики	Потребность в общении с учителем	Темп работы
сильные	сильные	сильные	сильные	сильные
средние	средние	средние	средние	средние
слабые	слабые	слабые	слабые	слабые

Примечания

1. *Киселева, М. М.* Использование компьютерных технологий в межпредметных проектах [Текст] / М. М. Киселева // ИНФО. 2005. № 8.

2. *Браун, Ю. С.* Модульно-уровневый подход в преподавании курса «Основы мультимедийных технологий» [Текст] // Ю. С. Браун, А. Ю. Кравцова, И. Б. Кириченко, Е. А. Ракитина. ИНФО. 2003. № 1.

3. *Границкая, А. С.* Научить думать и действовать: Адаптивная система обучения в школе [Текст] : кн. для учителя / А. С. Границкая. М.: Просвещение, 1991. 175 с.

4. *Окулов, С. М.* Информатика: Развитие интеллекта школьников [Текст] / С. М. Окулов. М.: БИНОМ. Лаборатория базовых знаний, 2005. 212 с.; ил.

5. *Васенина, Е. А.* Особенности компьютерного урока информатики [Текст] / Е. А. Васенина // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. Информатика. Математика. Язык. Научно-методический журнал. 2005. № 3. 200 с.

6. *Урнов, В. А.* Преподавание информатики в компьютерном классе: кн. для учителя: из опыта работы [Текст] / В. А. Урнов, Д. Ю. Климов. М.: Просвещение, 1990.

А. В. Ефремов, А. Н. Семенов

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ХЕШИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

На примере решения конкретной геометрической задачи рассматривается метод хеширования и его реализация.

Точками многоугольника являются как его внутренние точки, так и точки на границе. Выпуклым многоугольником называется такой многоугольник, в котором для любых двух его точек X и Y отрезок, соединяющий X и Y, полностью принадлежит многоугольнику. Все многоугольники в этой задаче выпуклые и содержат не менее 2 вершин. Все вершины любого многоугольника в этой задаче различны и имеют целочисленные координаты. Никакие три вершины не лежат на одной прямой. Слово «многоугольник» далее всегда обозначает именно такие многоугольники.

Для двух данных многоугольников A и B их суммой Минковского называется фигура, состоящая из всех точек вида (x_1+x_2, y_1+y_2), где (x_1, y_1) – все возможные точки многоугольника A, и (x_2, y_2) – все возможные точки многоугольника B. Оказывается, что сумма Минковского двух многоугольников также является многоугольником. Рис. 1 иллюстрирует сумму Минковского для двух треугольников.

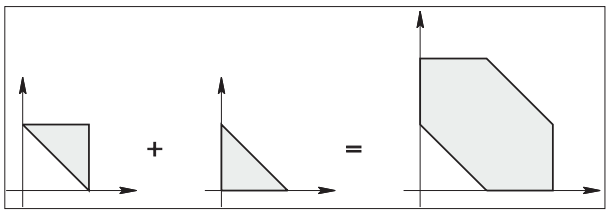


Рис. 1. Иллюстрация операции «сумма Минковского»

Будем рассматривать операцию, обратную сумме Минковского. Для данного многоугольника P требуется найти такие два многоугольника A и B, что:

– P является суммой Минковского A и B;

– A имеет от 2 до 4 различных вершин, то есть это отрезок (2 вершины), треугольник (3 вершины) или четырехугольник (4 вершины);

– A должен иметь как можно больше вершин, то есть

• A должен быть четырехугольником, если это возможно;

• если A не может быть четырехугольником, он должен быть треугольником, если это возможно;

• иначе он должен быть отрезком.

Очевидно, что ни A и ни B не может быть равен P, поскольку в этом случае один из многоугольников A или B должен быть точкой, что не является многоугольником по определению.

Вам дан набор входных файлов, каждый из которых содержит описание многоугольника P. Для каждого входного файла вы должны найти многоугольники A и B, такие, как описано выше, и создать выходной файл, содержащий описания A и B. Гарантируется, что для каждого из данных входных файлов такие многоугольники существуют. Если существует несколько вариантов ответа, запишите любой из них.

Решение задачи «опирается» на знание математического факта. Периметр (P) многоугольника D, являющегося суммой Минковского многоугольников A и B, равен сумме периметров A и B – $P(D)=P(A)+P(B)$. Это следует из того, что сумма векторов, образующих многоугольник D при его обходе, например, против часовой стрелки, равна нулю. Утверждение справедливо и для D, и для A, и для B (отрезок рассматривается как два противоположных вектора) и проиллюстрировано на рис. 2.

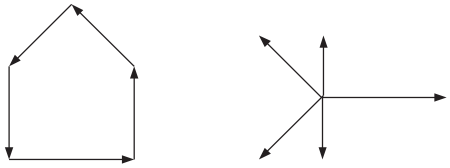


Рис. 2. Иллюстрация идеи решения

ЕФРЕМОВ Алексей Владимирович – ученик 11-го класса школы № 14 г. Кирова

СЕМЕНОВ Александр Николаевич – старший преподаватель кафедры высшей математики ВятГГУ

© Ефремов А. В., Семенов А. Н., 2007

Если бы векторы сторон исходного многоугольника использовались как целое, их нельзя было бы «дробить» (делить на части), то в данном множестве векторов следовало бы искать подмножество из четырех векторов (*A* – четырехугольник), в сумме дающих ноль (аналогично для треугольника). И вот тут становится понятно, почему требуется сдать только выходные файлы. Необходимо «дробление», многоугольники *A* и *B* могут «складываться» из частей векторов. Естественно, что одна часть входит только в одну сумму. Но в этом случае время поиска требуемого подмножества векторов становится значительным. Просмотр входных файлов показывает, что количество вершин исходного многоугольника превосходит значение 100, а значения координат, хоть и целые числа, но превышают несколько тысяч. И жюри не интересовало, как это сделал участник, ибо, если выходные файлы получены, то школьник использовал не прямой перебор, а значит, и в информатике он является не новичком.

Обратимся к решению. Основная идея заключается в том, чтобы по исходному многоугольнику (координаты вершин хранятся в массиве *Poly* типа *TPolygon=Array* [1..*NMax*] *of TCord*;, где *TCord = Record x,y:Integer*; *End*. Массив дополняется *n*+1 элементом, равным *Poly*[1].) создать некую структуру данных, позволяющую в последующем организовать эффективный поиск подмножества векторов, образующих *A*. Для данной задачи единственным, что «приходит на ум», является хеширование, создание хеш-таблиц. Все остальные структуры требуют значительных усилий для их поддержания и не дают того эффекта при поиске.

Учитывая эффект «дробления», хеш-таблицу следует формировать на основе «базовых» векторов. Покажем, как они определяются (массив *Prim*).

```
For i:=1 To n Do Begin
  With Vect[i] Do Begin {Определяем координаты вектора, соответствующего стороне многоугольника.}
    x:=Poly[i+1].x-Poly[i].x;
    y:=Poly[i+1].y-Poly[i].y;
  End;
   Count[i]:=Nod(Abs(Vect[i].x),Abs(Vect[i].y));
{Вычисляется наибольший общий делитель. Функция имеет стандартный вид и не приводится.}
  With Prim[i] Do Begin {Вычисляем координаты «базового» вектора.}
    x:=Vect[i].x Div Count[i];
    y:=Vect[i].y Div Count[i];
  End;
 End;
```

После этого с помощью следующего фрагмента логики хеш-таблица формируется.

```
For i:=1 To n-1 Do
 For j:=i+1 To n Do
  For mi:=1 To Count[i] Do
   For mj:=1 To Count[j] Do
    AddHashTable(i,j,mi,mj);
```

Процедура *AddHashTable* требует пояснений. Есть еще одна (во всяком случае, видимая на данной стадии обсуждения) возможность уменьшения времени поиска векторов, определяющих многоугольник *A*. Следует хранить данные не по отдельным векторам, а по их суммам (рис. 3).

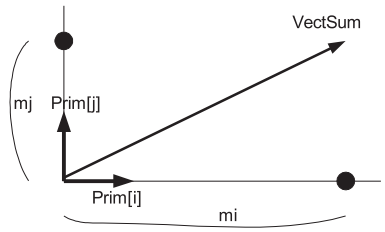


Рис. 3. Иллюстрация принципа организации хеш-таблицы

Что это дает? Пусть ищется четырехугольник *A* и хранятся параметры векторов сумм. Оказывается, что в этом случае можно не искать четыре вектора, образующих *A*, а определить, есть ли в хеш-таблице вектор такой же длины, но в противоположном направлении, и образованный из других векторов. Если так, то *A* найден, точнее два вектора, сумма которых равна нулю. А затем по этим векторам находятся те, которые дают в сумме их.

```
Procedure AddHashTable(i,j,mi,mj:Integer);
 Var VectSum:TCord;
     HashCode:Integer;
 Begin
  With VectSum Do Begin {Вычисляем вектор суммы двух векторов. Их номера i и j. Первый вектор берется mi раз, второй – mj (рис. 16.12).}
    x:=Prim[i].x*mi+Prim[j].x*mj;
    y:=Prim[i].y*mi+Prim[j].y*mj
  End;
{Вычисляем адрес в хеш-таблице (Hash) по значению координат вектора суммы.}
  HashCode:=GetHashCode(VectSum.x,VectSum.y);
{Функция GetHashCode не приводится. Её вид может быть различен. Например, значения координат умножаются на определенные ранее случайные числа, находится сумма произведений по модулю размера хеш-таблицы.}
{Разрешение коллизий осуществляется стандартным для методов хеширования образом, например путем организации списка для каждой совокупности данных, дающих одно значение хеш-адреса.}
   <Запоминаем в хеш-таблице значения VectSum.x, VectSum.y, i, j, mi, mj – это данные информационного поля элемента хеш-таблицы.>;
 End;
```

Итак, хеш-таблица организована. Осталось выполнить поиск, последовательно – от четырехугольника до отрезка. Разумно, в случае успеха на каком-то шаге, после вывода результата в процедуре *Done* заканчивать обработку. Детали поиска мы «скрываем» в процедурах *FindReverse*4, *FindReverse*3, *FindReverse*2, что позволяет сделать общую логику достаточно «прозрачной»:

```
For i:=1 To n-1 Do
  For j:=i+1 To n Do
    For mi:=1 To Count[i] Do
      For mj:=1 To Count[j] Do
      FindReverse4(i,j,mi,mj); {A – четырехугольник?}
For i:=1 To n Do
  For mi:=1 To Count[i] Do FindReverse3(i,mi); {A – треугольник?}
FindReverse2; {A является отрезком.}
```

Процедуры *FindReverse* имеют одну структуру, ибо их назначение заключается в выборке (поиске) из хеш-таблицы записи, соответствующей искомому вектору, и формировании массива векторов, образующих многоугольник *A*. Разберем её на примере одной, а затем укажем отличия.

```
Procedure FindReverse4(i,j,mi,mj:Integer);
  Var VectSum:TCord;
      HashCode:Integer;
 Begin
  With VectSum Do Begin {Формируем противоположный вектор.}
      x:=-Prim[i].x*mi-Prim[j].x*mj;
      y:=-Prim[i].y*mi-Prim[j].y*mj
   End;
  HashCode:=GetHashCode(VectSum.x,VectSum.y);
{Определяем адрес в хеш-таблице. Это, естественно, та же функция, что использовалась при формировании хеш-таблицы.}
  <Просматриваем записи хеш-таблицы, соответствующие одному адресу>; {Для реализации действия необходимо использовать конструкцию повторения (вспомним о коллизиях).}
  If <вектора сумм противоположны и образованы разными «базовыми» векторами>
    Then Begin
      <преобразовать векторы сумм в массив исходных векторов, по которым они получены>;{-Если первым элементом массива сделать счетчик количества ненулевых элементов в нем, то процедура Done может быть унифицирована.}
      <вызвать процедуру Done с этими данными для вывода результата и завершения обработки>;
    End;
 End;
```

Процедура *FindReverse3* имеет только два входных параметра – номер «базового» вектора (*i*) и значение *mi* (сколько раз он берется). Её отличие сводится к измененному фрагменту

```
With VectSum Do Begin
    x:=-Prim[i].x*mi;
    y:=-Prim[i].y*mi
  End;
```

а также несколько измененным фрагментам проверки противоположности векторов и формирования массива координат векторов для процедуры *Done*.

Процедура *FindReverse2* не имеет параметров, но содержит фрагмент:

```
With VectSum Do Begin
    x:=0;
    y:=0;
  End;
 HashCode:=0;,
```

что позволяет неким единообразным способом сформировать массив для процедуры *Done*.

Осталась не выясненной логика процедуры *Done*. Её функциональное назначение сводится к исключению из множества векторов, описывающих исходный многоугольник (массив *Poly*), найденного множества векторов, определяющих многоугольник *A*, и выводу в результирующий файл координат многоугольников, построенных по вычисленным множествам векторов. Естественно, что суммирование по Минковскому выполнять не следует.

Методические указания. Задача требует знаний базовых алгоритмов вычислительной геометрии, а математические факты могут быть сообщены в процессе обсуждения. Задачу следует использовать при изучении темы «поиск», а именно методов хеширования, тем более что содержательных задач, связанных с этими интересными и фундаментальными методами, в учебной литературе встречалось немного.

Е. А. Зверева

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ СРЕДСТВ ИНФОРМАЦИОННО-КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В УЧЕБНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

В статье раскрыты недостатки современного подхода к обучению информационным системам. А также дана авторская версия решения поднятой в статье проблемы на примере дисциплин «Информационные системы» и «Администрирование баз данных» на специальности «Информатика и английский язык», факультет информатики ВятГГУ.

ЗВЕРЕВА Екатерина Александровна – старший преподаватель кафедры прикладной информатики ВятГГУ
© Зверева Е. А., 2007

Информатизация образования и новые требования к учителю

Никто не поспорит, что общество вступило в свою высшую стадию развития – информационную. Доминирующим видом деятельности в сфере общественного производства является сбор, накопление, обработка, хранение, передача, использование, продуцирование информации, осуществляемые на основе современных средств вычислительной техники, а также разнообразных средств информационно-коммуникационных технологий [1].

Информатизация затронула практически все интеллектуальные сферы деятельности человека, в том числе и образование.

Информатизация образования, ориентированная на разработку и оптимальное использование современных средств информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) в обучении и воспитании, предъявляет новые требования к профессиональным качествам и уровню подготовки педагогов. Помимо академических, дидактических и других способностей, учитель должен обладать ИКТ-компетенцией, к компонентам которой можно отнести [2] следующие:

1) *умение использовать* средства ИКТ в преподавании учебного предмета;

2) *реализация информационного взаимодействия* между участниками учебно-воспитательного процесса в условиях использования потенциала распределенного информационного ресурса локальных и глобальной компьютерных сетей;

3) *автоматизация информационно-методического обеспечения* учебно-воспитательного процесса и организационного управления учебным заведением на базе средств ИКТ (создание автоматизированных информационных систем – **АИС**), в которых учитель должен быть хорошо осведомлен.

Развитие ИКТ-компетенции в процессе обучения в вузах

К сожалению, в настоящее время у большинства учителей информатики ИКТ-компетенция сводится к первому компоненту. Для овладения в полном объеме методологией использования ИКТ в учебно-воспитательном процессе будущий учитель информатики должен иметь представление о проектировании, создании и внедрении автоматизированных систем в учебно-образовательный процесс.

Как требует Государственный стандарт (ГОС ВПО по дисциплине «Информационные системы»), для полноценного освоения процесса создания и проектирования АИС нужно иметь следующие знания и умения:

1) Обзор моделей данных. Последовательность создания реляционной модели.

2) Этапы проектирования баз данных.

3) Администрирование баз данных.

4) Обзор возможностей и особенностей различных СБД.

5) Методы хранения и доступа к данным.

6) Объектно-ориентированное программирование в среде баз данных.

7) Использование технологии «клиент-сервер». Разработка пользовательских программ в среде баз данных.

Обычно изучение баз данных и информационных систем сводится к практическому освоению СУБД MS Access (дисциплина «Базы данных» на специальности 2201 – Вычислительные машины, системы, комплексы и сети) либо к работе с уже созданными АИС (например, обучающие информационные системы на компакт-дисках, дисциплина «Информационные системы», специальность 030100 – Информатика в Тульском государственном педагогическом университете).

В таких подходах к изучению АИС можно выявить ряд недостатков. Во-первых, студенты получают знания не в полном объеме, так как СУБД MS Access не является клиент-серверной системой и не дает возможности полноценного объектно-ориентированного программирования. Во-вторых, при работе с готовой АИС формируются умения только на уровне пользователя.

Новое в содержании обучения и развития ИКТ-компетенции

На наш взгляд, чтобы сформировать полноценного специалиста в области образования, а именно учителя, обладающего ИКТ-компетенцией в полном смысле этого слова, нужно дать возможность студентам педагогических специальностей работать с сетевой СУБД, когда можно приобрести опыт по созданию информационной системы клиент-серверной архитектуры с предоставлением доступа через пользовательский интерфейс.

На факультете информатики Вятского государственного гуманитарного университета информационные системы и базы данных изучаются в течение одного учебного года в рамках курсов «Информационные системы» и «Администрирование БД».

В рамках данных курсов студентами рассматриваются общие понятия об информационных системах и базах данных, технология «клиент-сервер», основы проектирования информационных систем и процесс администрирования базы данных. На практических занятиях в качестве первичного знакомства с клиент-серверной архитектурой и языком SQL изучается MS SQL Server, затем рассматривается сервер БД MySQL, язык программирования PHP как средство разработки

web-интерфейса для доступа к БД и web-сервер Apache для тестирования разрабатываемой АИС.

Теоретическое содержание курсов составлено исходя из Государственного стандарта. Компоненты содержания практических занятий требуют некоторого пояснения.

MS SQL Server

Является продукцией компании Microsoft. Работает на платформе MS Windows. Это законченное решение для управления и анализа данных, позволяющее оперативно развёртывать масштабируемые WEB-приложения нового поколения. В сервер MS SQL включена поддержка языка XML и протокола HTTP. Кроме того, SQL Server 2000 полностью использует все возможности операционной системы Windows.

Основные преимущества SQL Server 2000

• Широкая поддержка языка XML и стандартов Интернета.

• Удобный доступ к данным через web по протоколу HTTP.

• Эффективные средства анализа данных на базе web.

• Масштабируемость для хранилищ данных (высокое быстродействие даже в случае наиболее сложных отчетов, анализ очень больших наборов данных).

СУБД MySQL

MySQL представляет собой реляционную СУБД, поддерживающую язык SQL.

В настоящее время СУБД MySQL стала фактическим стандартом для интернет-приложений (веб-магазины, сложные сайты, информационные порталы). Это легко объяснимо: во-первых, MySQL обладает очень высоким быстродействием и надежностью; во-вторых, СУБД MySQL бесплатна, что еще больше повышает к ней интерес.

К возможностям MySQL можно отнести [3]:

• Интерфейсы для языков C++, Java, Perl, PHP и др.

• Работает на многих различных платформах (Windows, Linux).

• Поддержка огромных объемов данных (до 60 000 таблиц, хранящих около 5 000 000 000 строк).

• и многие другие.

Язык PHP как средство разработки web-интерфейса для доступа к БД MySQL

Существует 3 основных способа доступа к БД MySQL:

• через командную строку, используя специальные команды;

• используя специальные программы (например, MySQL-Front);

• через web-интерфейс.

Третий способ является наиболее популярным, так как существует множество уже разработанных web-интерфейсов (например, PHPMyAdmin). Кроме того, можно создать собственный web-интерфейс, используя языки web-программирования, имеющие встроенные команды доступа к серверу MySQL (например, Perl или PHP).

Как средство разработки web-приложений PHP сейчас является одним из самых популярных (наряду с ASP, FrontPage). В PHP включена поддержка многих баз данных (InterBase, dBase, mSQL, Sybase, MySQL, Oracle и мн. др.), что делает написание web-приложений с использованием БД очень простым. Поэтому при выборе языка web-программирования для работы с базами данных лучший выбор – это PHP.

Web-сервер Apache как средство тестирования и внедрения разрабатываемой АИС

Для проведения тестирования создаваемых программ на PHP потребуется установка web-сервера на локальный компьютер, так как PHP обязательно требует сервера. Сервер Apache – это один из самых удобных и быстрых серверов, поддерживающий PHP.

Таким образом, курс по основам баз данных и информационных систем дает будущим учителям информатики возможность повысить свои профессиональные качества, приобрести умения по оптимизации основных компонентов учебно-воспитательного процесса.

Студенты знакомятся с самыми перспективными элементами проектирования и создания АИС: сервер БД MySQL, язык web-программирования PHP для создания пользовательского интерфейса для доступа к БД и web-сервер Apache для тестирования АИС.

Примечания

1. *Роберт, И. В.* Современные информационные технологии в образовании: дидактические проблемы; перспективы использования [Текст] / И. В. Роберт. М.: Школа-Пресс, 1994.

2. *Роберт, И. В.* Основные направления научных исследований в области информатизации профессионального образования [Текст] / И. В. Роберт, В. А. Поляков. М.: «Образование и Информатика», 2004.

3. Администрирование MySQL [Электронный ресурс]. http://megalib.com/books/132/oglav.htm.

С. В. Зяблицев

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА СОРТИРОВКИ ДЖОНА ФОН НЕЙМАНА

В статье приводится метод, основанный на сортировке слияниями, но работающий за время, сравнимое со временем работы алгоритмов пирамидальной сортировки и сортировки Хоара.

Все пользователи ЭВМ, реально пишущие программы, рано или поздно сталкиваются с проблемой сортировки данных. Грамотное разрешение этой проблемы зачастую определяет профессиональный уровень и навыки программиста. Известно много типов сортировок, как «быстрых» (быстрая, слияниями, пирамидальная), так и медленных (пузырек, простыми вставками, простым выбором). На первый взгляд, для сортировки данных лучше использовать сортировку Хоара, и это разрешит все проблемы. Но оказывается, что на «плохих» данных стандартная сортировка Хоара работает за время, пропорциональное N^2.

Пирамидальная сортировка работает также быстро, но не учитывает случаи уже отсортированного или частично отсортированного массива, т. е. она работает даже в тех случаях, когда делать по сути ничего не нужно. Стандартная сортировка слияниями Д. Неймана, работающая за время O(N*lg(N)), имеет ряд преимуществ по реализации и комбинированию с другими сортировками, но на реальных машинах работает в десятки раз медленнее, чем другие быстрые сортировки. Рис. 1 наглядно демонстрирует графики времени работы алгоритмов Д. Неймана и Хоара на конкретной машине.

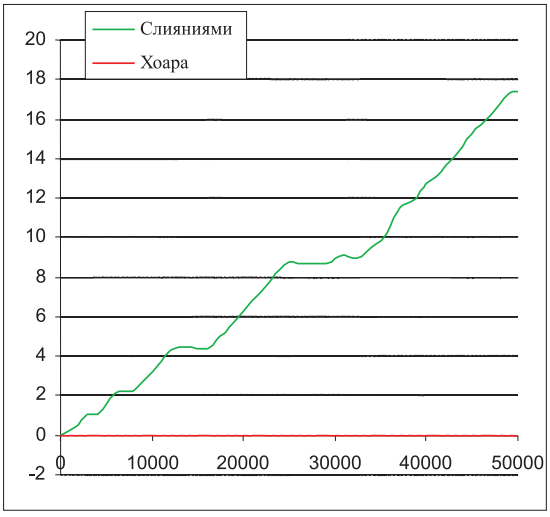


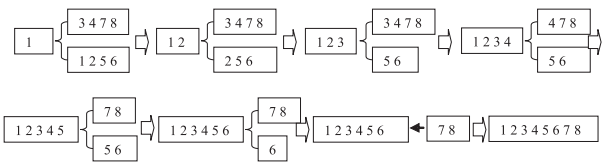
Рис. 1

Так, например, для сортировки массива из 50 000 элементов сортировке слияниями требуется около 17 секунд, в то время как сортировка Хоара происходит за 40 тысячных секунды. Из графика нетрудно понять: несмотря на то, что две данные сортировки считаются быстрыми, в реальных условиях стандартную сортировку слияниями на больших данных лучше не применять.

Алгоритм Джона фон Неймана, предложенный в 1945 г., основан на использовании слияния двух упорядоченных последовательностей в одну. Этот алгоритм достаточно прост и легко реализуем как на последовательной, так и на параллельной машинах, поэтому интенсивно использовался для сортировки данных на различных моделях ЭВМ вплоть до конца 60-х гг. прошлого века. Важной особенностью любого алгоритма является интуитивное понимание его работы, что дает возможность программисту создать код программы на любом языке программирования и любой машинной архитектуре. С этой точки зрения алгоритм Джона фон Неймана стоит в одном ряду с алгоритмами сортировки «пузырьком» и простыми вставками, поэтому уменьшение времени его работы в реальных условиях необходимо для пополнения навыков программистов еще одним эффективным и простым методом.

Вкратце опишем идею сортировки слияниями. Допустим, у нас есть массив A размерности N, состоящий из целых чисел. Требуется переставить элементы этого массива так, чтобы выполнялось следующее соотношение: $A[1] \le A[2] \le \ldots \le A[N-1] \le A[N]$ – сортировка по возрастанию.

1. Используется процедура SLIAT слияния двух отсортированных последовательностей B и C в одну A. Пусть в B – N элементов, в C – M, тогда в последовательности A – N+M элементов. Для каждого A_i берем минимум из B_j и C_l и увеличиваем выбранный индекс на 1. При прохождении N+M элементов получаем упорядоченную по возрастанию последовательность. Пример работы алгоритма слияния.

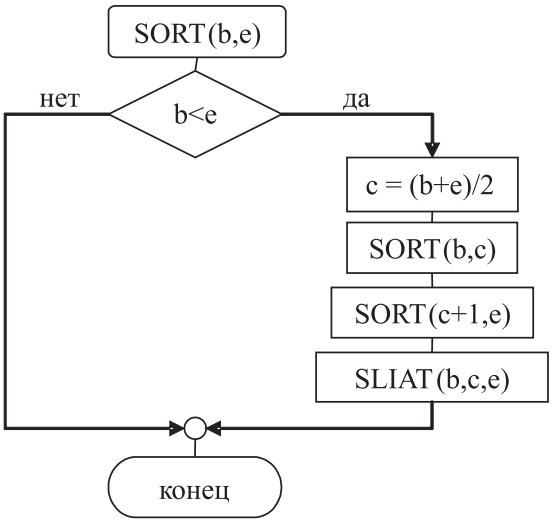


2. Рекурсивная процедура SORT(b,e) – сортировка Д. Неймана, где b – начало массива, e – конец.

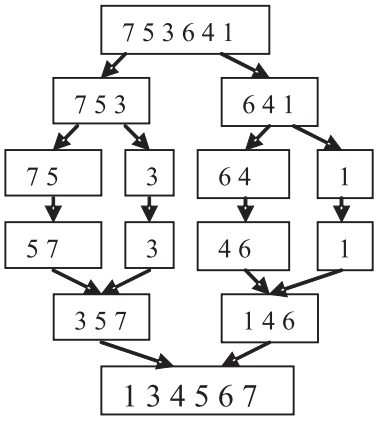
Главным недостатком этого метода является неучитывание уже отсортированных последовательностей чисел, что приводит к выполнению лишней работы. Кроме того, мы должны спускаться по дереву до тех пор, пока в сортируемой

ЗЯБЛИЦЕВ Сергей Васильевич – студент V курса факультета информатики ВятГГУ
© Зяблицев С. В., 2007

части массива не останется 2 элемента, и должны проделывать это для всех данных массива. Для уменьшения времени работы алгоритма мы должны научиться выделять большие последовательности данных.



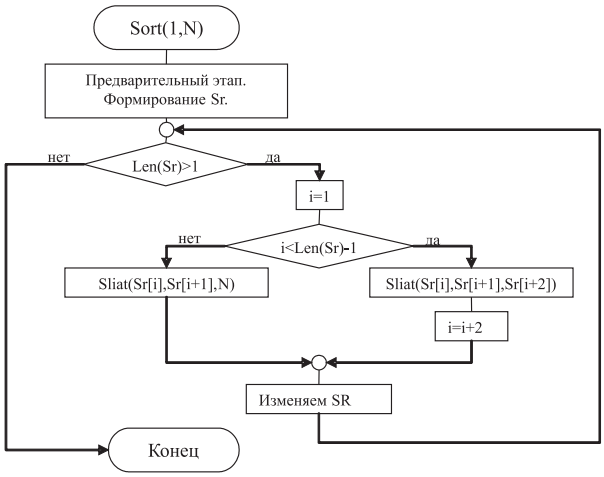
Пример сортировки Д. Неймана



Идея проста: если нас не устраивает спускаться от массива к его элементам, то будем подниматься от его элементов к вершине, т. е. в неотсортированном массиве будем выделять уже отсортированные группы, а затем последовательно сливать их в единый отсортированный массив.

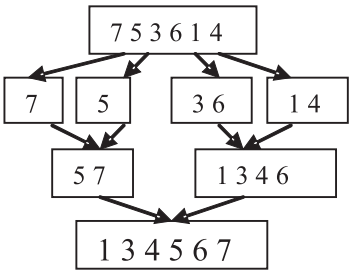
Для этого нам понадобится дополнительный массив Sr, в котором будем хранить индексы начал выделяемых отсортированных групп, а также этап предварительной обработки. На том этапе будем выделять отсортированные группы элементов, а их начальные индексы записывать в массив Sr. Это возможно сделать за 1 проход по массиву A, т. е. за время O(N).

На следующем этапе будем использовать массив Sr и циклически сливать группы в одну.

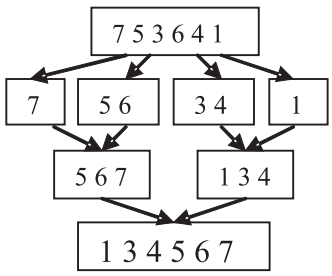


На первый взгляд, сейчас мы делаем то же самое, но данный метод уже работает в 1,5 раза быстрее, чем метод Д. Неймана на случайных данных и за время O(N) на отсортированном массиве. Но, как оказалось на практике, в случайных данных встречаются слишком малые отсортированные последовательности, поэтому мы не сможем добиться большого эффекта от данной идеи, пока не научимся получать на предварительном этапе большие упорядоченные последовательности. Проблема получения в случайных данных таких последовательностей за сравнительно небольшое время кажется «трудной» задачей.

Пример модифицированного алгоритма 1



Пример модифицированного алгоритма 2



На помощь нам приходит алгоритм нахождения максимума. Будем строить отсортированную по возрастанию последовательность таким образом: сравниваем текущий элемент с максимальным, если он

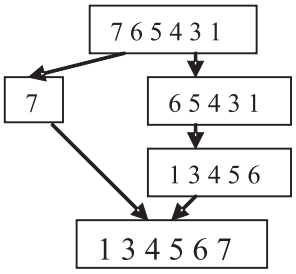
больше, то он становится максимальным, включаем его в нашу последовательность. Таким образом, получаем большую отсортированную последовательность за время O(N). Для этого на предварительном этапе помимо построения массива Sr будем перестраивать массив A. Далее алгоритм повторяется.

Применение подобной обработки данных на предварительном этапе позволяет уменьшить время работы алгоритма на порядок для случайных данных.

На рис. 2 приведены графики времени работы алгоритмов Джона фон Неймана и модифицированных сортировок. Если данные массива A отсортированы, то время срабатывания модифицированного алгоритма не засекается стандартными средствами. Если данные заданы случайным образом, то время сортировки массива в 100 000 элементов 422 тысячные секунды, в то время как сортировке Д. Неймана требуется около 36 секунд, т. е. получаем время модифицированного алгоритма, сравнимое со временем сортировки Хоара. Но если данные отсортированы в обратном порядке – все наши труды сводятся на нет и мы вновь получаем большое количество малых отсортированных групп. В этом случае время алгоритма начинает «расти» и впоследствии «обгоняет» время стандартной сортировки. Возникает проблема эффективной предварительной обработки данных, упорядоченных в обратном порядке.

Самым простым решением данной проблемы является выборка элементов в последовательность как по максимуму, так и по минимуму, т. е. сначала создаем последовательность по алгоритму максимума, а следующую последовательность – по минимуму. Недостатком является то, что при такой начальной обработке данных требуется «переворачивать» вторые последовательности, что занимает дополнительное время O(N), поэтому алгоритм работает чуть медленнее для случайных чисел, чем предыдущий, но зато эффективен при работе на отсортированных и частично отсортированных данных как для возрастания, так и для убывания элементов.

Пример сортировки мин-максом



На первом графике рис. 3 нетрудно заметить незначительное увеличение времени срабатыва-

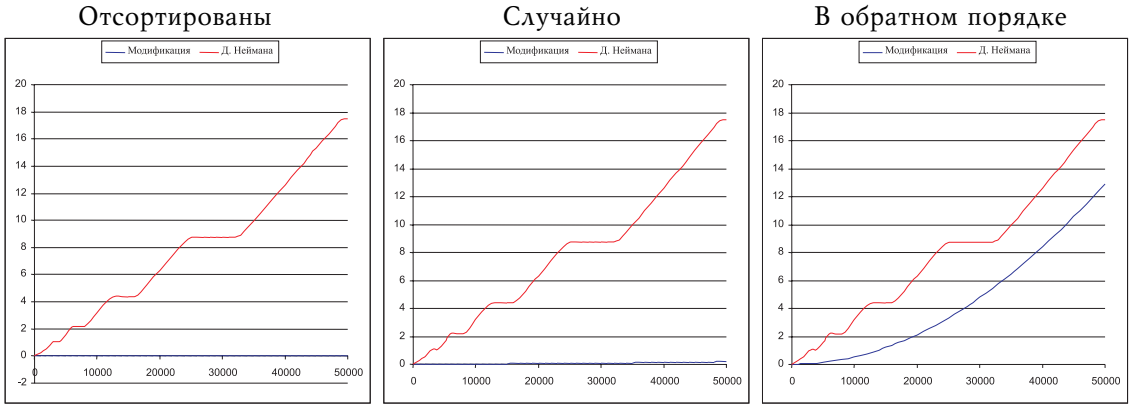


Рис. 2

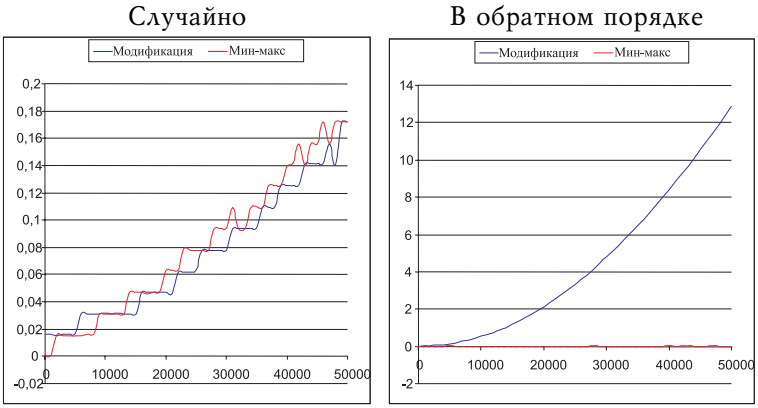


Рис. 3

ния алгоритма мин-макс примерно на 15 тысячных секунды по отношению к алгоритму для максимума для случайных данных. Массив из 100 000 элементов сортируется за 453 тысячных секунды. На втором графике мы видим, что на отсортированных по убыванию данных алгоритм мин-макс срабатывает за время O(1).

Подведем итог: мы добились уменьшения времени работы алгоритма сортировки слияниями в реальных условиях при помощи выделения в массиве «больших» последовательностей элементов. Выделение таковых последовательностей происходит по алгоритму «максимума-минимума». Данный алгоритм предварительной обработки является достаточно эффективным для любых данных, но он никоим образом не претендует на оптимальность. Мы показали возможный путь уменьшения времени алгоритма сортировки слияниями, можно допустить, что если удастся найти алгоритм получения б*о*льших отсортированных последовательностей, то возможно сделать алгоритм сортировки слияниями еще эффективнее.

Примечания

1. Окулов, С. М. программирование в алгоритмах [Текст] / С. М. Окулов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 341 с.

2. Кнут, Д. Искусство программирования [Текст] Д. Кнут. Т. 3.

А. А. Клестов

ТЕОРИЯ NP-ПОЛНОТЫ: СОВРЕМЕННЫЙ ЭТАП РАЗВИТИЯ

В данной статье рассмотрена основная проблема теории сложности, проблема равенства классов P и NP, ее современное состояние и подходы к ее решению.

До появления теории NP-полноты в начале 70-х гг. XX в. в области построения комбинаторных алгоритмов был предложен ряд эффективных алгоритмов для нескольких важных задач и, параллельно с абстрактной теорией сложности, в осторожной форме был высказан тезис о том, что полиномиальные алгоритмы являются практичными и практичные алгоритмы являются полиномиальными. Существенно б*о*льшая часть задач не поддавалась эффективному решению, и для таких задач стали появляться отдельные результаты об их сводимости друг к другу.

Впервые вопрос о равенстве классов сложности P и NP был поставлен независимо С. А. Куком (Стивен Кук (Stephen A. Cook) – доктор философии (высшая ученая степень) с 1966 г. Звание получил в Гарвардском университете (Harvard University). Профессор университета Торонто. Написал более 60 научных статей. Обладатель множества наград, в том числе премии Тьюринга) и Л. А. Левиным в 1971 г. И до сих пор данный вопрос является одной из центральных открытых проблем. Если на него будет дан утвердительный ответ, это будет означать, что теоретически возможно решить многие задачи, для которых на данный момент не известно «эффективного» алгоритма.

Мнения ученых по данной проблеме можно разделить на три группы.

1) Классы P и NP равны.

2) Классы P и NP неравны.

3) На данном этапе развития научной мысли нельзя сделать вывод о взаимоотношении классов.

В данной статье мы рассмотрим все эти группы.

Первая группа

В 1986–1987 гг. Тед Сворт (Ted Swart) написал ряд статей (некоторые из которых были озаглавлены: «P=NP»), в которых давал формулировку линейного алгоритма полиномиального размера для задачи гамильтонова цикла. И так как задачи линейного программирования полиномиально разрешимы, Сворт делает вывод о равенстве классов.

Однако в 1988 г. Михалис Янакакис (Mihalis Yannakakis) закрыл обсуждение по данной теме. В своей работе «Expressing combinatorial optimization problems by linear programs» Янакакис [2], выражая задачу коммивояжера методом Сворта, доказал, что для ее решения требуется экспоненциальный размер.

В 1996 г. украинским математиком Анатолием Плотниковым в статье «Polynomial-Time Partition of a Graph into Cliques» [3] приведен полиномиальный алгоритм для NP-полной задачи на графы разбиения на клики.

В 2000 г. была впервые опубликована статья М. И. Тельпиза с доказательством равенства классов P и NP. Сайт автора можно найти по адресу [4]. Но исследования по данной теме приводят к выводу о том, что Мирон Иванович приводит не более чем эвристику, основанную на применении алгебры логики, применение которой возможно лишь к определенному классу задач из NP. И дающую на некоторых примерах экспоненциальную временную оценку.

В мае 2002 г. Чарльз Соэрби (Charles Sauerbier) разработал полиномиальный алгоритм для задачи выполнимость (статья: «*A polynomial time (heuristic) SAT algorithm*» [5]). Данный алгоритм основан на нетрадиционной системе доказа-

КЛЕСТОВ Александр Анатольевич – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Клестов А. А., 2007

тельств (которая не требует ни доказательств, ни решения), в котором нарушена связь между тем, что необходимо было доказать, и тем, что в конечном счете получилось.

Гиви Болоташвили в марте 2003 г. опубликовал работу «*A polynomial time (heuristic) SAT algorithm*» [6], в которой доказал равенство классов P и NP.

В октябре 2004 г. Мустафа Диаби (Moustapha Diaby) построил линейный алгоритм для задачи коммивояжера [7]. Корректность его доказательства много раз подвергалась критике в новостных группах, в результате чего статья была много раз пересмотрена и поправлена автором. Кроме того, в октябре 2005 г. Мустафа сформулировал линейный алгоритм для квадратичной задачи о назначениях [8].

В октябре 2005 г. Локман Колукиса (Lokman Kolukisa) разработал полиномиальный алгоритм для распознавания тавтологий. Его пример показывает, что P=coNP, а следовательно P=NP. Статья называется «*Two Dimensional Formulas and Tautology Checking*» [9].

Франческо Капассо (Francesco Capasso) в ноябре 2005 г. построил полиномиальный алгоритм для задачи круговой выполнимости (Circuit-SAT). Три первые версии его статьи называются «A polynomial-time algorithm for Circuit-SAT», а четвертая версия – «A polynomial-time heuristic for Circuit-SAT» [10].

Вторая группа

Крейгом Аланом Файнстайном (Craig Alan Feinstein) в статье «Evidence that P is not equal to NP» [11] предоставлен ряд оснований для вывода о неравенстве классов в определенной узкой модели вычислений.

В 2004 г. Ки-Бон Нам (Ki-Bong Nam), Вонг (S.H. Wang) и Ян Гон Ким (Yang Gon Kim) в статье «Linear Algebra, Lie Algebra and their applications to P versus NP» в журнале по прикладной математике и дискретным структурам, приводят ряд задач, являющихся контрпримером равенства классов.

Весной 2004 г. Михаил Купчик начал серию статей, имеющих целью доказать, что классы P и NP неравны. Статьи этой серии имеют общее название «P versus NP problem solution» [12, 13, 14].

Мариус Ионеску (Marius Ionescu) написал статью под названием: «P is not NP» [15], в которой он показал, что для односторонней функции mod (в англоязычной литературе OWMF – One Way Mod Function) невозможно построить никакого алгоритма, кроме полного перебора вариантов.

В ноябре 2004 г. Мирсеа Александру Попеску Моску (Mircea Alexandru Popescu Moscu) представил инвариантные принципы иерархии сложностей [16]. Из его работы вытекает вывод, что классы P и NP не равны.

В феврале 2005 г. Раджу Ренжит Гровер (Raju Renjit Grover) доказал в своей работе [17], что классы P и NP, кроме того, P и coNP не равны.

В марте 2005 г. доктор Виктор Иванов доказал неравенство классов P и NP [18]. Доказательство основано на наилучшей оценке нижней границы временной сложности, которая сохраняется для всех вычислительных алгоритмов.

В июне 2005 г. Сингх Ананд (Bhupinder Singh Anand) доказал, что P не равно NP исходя из предположения, что каждое разрешимое на машине Тьюринга истинное арифметическое отношение доказуемо в пеановской арифметике. Его статья называется «Is the Halting problem effectively solvable non-algorithmically, and is the Goedel sentence in NP, but not in P?» [19].

Лев Гордеев летом 2005 г. показал путь доказательства неравенства классов. Его доказательство пока не закончено, но его положения опираются на традиционную комбинаторику. Несколько статей автора опубликованы на его сайте [20].

В ноябре 2005 г. Рон Коэн (Ron Cohen) в своей статье «Proving that P is not equal to NP and that P is not equal to the intersection of NP and co-NP» [21] доказал неравенство классов P и NP. Кроме того, в статье показано, что класс P не эквивалентен пересечению классов NP и coNP. В конце обсуждаются отношения между этими тремя классами.

Третья группа

Николас Аргалл (Nicholas Argall) в марте 2003 г., ссылаясь на теорему Геделя, доказал, что проблема равенства классов неразрешима [22] по той причине, что для ответа на этот вопрос необходима полная и непротиворечивая формальная постановка вопроса.

Журнал «Applied Mathematics and Computation» № 145 за 2003 г. содержит статью «Consequences of an exotic definition for P=NP» [23]. В этой статье показывается, что P не равно NP в существующей системе доказательств.

Для большинства из приведенных выше решений проблемы равенства классов найдены ошибки в доказательстве либо в изначальной постановке. По этой причине вопрос отношения между классами открыт.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что на современном этапе развития науки не существует методов для строгого доказательства равенства (неравенства) классов. Множество приведенных примеров говорит лишь о том, что данная тема пользуется популярностью в качестве исследования. Некоторые исследователи предлагают неплохие эвристические алгоритмы, пригодные для решения некоторого класса задач из NP. Но никто не может дать четкого ответа о равенстве или неравенстве двух классов.

Наиболее полный список существующих решений проблемы отношения между классами можно найти по адресу, указанному в списке литературы [1].

Примечания

1. http://www.win.tue.nl/~gwoegi/p-versus-np.html
2. http://dx.doi.org/10.1016/0022-0000(91)90024-Y
3. http://www.emis.de/journals/SWJPAM/Vol1_1996/plotnikov.ps
4. http://www.tarusa.ru/~mit/ENG/eng.html
5. http://arxiv.org/abs/cs.CC/0205064
6. http://arxiv.org/abs/cs.CC/0303008
7. http://www.business.uconn.edu/users/mdiaby/tsplp/
8. http://www.business.uconn.edu/users/mdiaby/qaplp/
9. http://geocities.com/lkoluk2003/
10. http://arxiv.org/abs/cs.CC/0511071
11. http://arxiv.org/abs/cs/0310060
12. http://users.i.com.ua/~zkup/pvsnp_en.pdf
13. http://users.i.com.ua/~zkup/pvsnp_en_001.pdf
14. http://users.i.com.ua/~zkup/pvsnp_en_002.pdf
15. http://arxiv.org/abs/cs/0409039
16. http://arxiv.org/abs/cs.CC/0411033
17. http://arxiv.org/abs/cs/0502030
18. http://www.math.usf.edu/~eclark/NPvsP.pdf
19. http://xxx.lanl.gov/pdf/math.GM/0506126
20. http://www-ls.informatik.uni-tuebingen.de/gordeew/publikationen/pnpe.html
21. http://www.arxiv.org/abs/cs.CC/0511085
22. http://journal-ci.csse.monash.edu.au/edit/uploads/argall01/PNP%20Proof.doc
23. http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00176-0

В. Ю. Колеватов

ОТСЕЧЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

В статье рассматривается задача отсечения невидимой части изображения, состоящего из прямых и окружностей, при отображении в ограниченном рамкой окне. Проводятся известные алгоритмы и методы улучшения алгоритма отсечения многоугольников.

При программировании приложений, работающих с графикой, ее отображением приходится решать задачу отсечения невидимой части изображения прямоугольной или произвольной формой. Такая форма называется отсекающей рамкой. Данный алгоритм работает в системах отображения информации, а значит должен обладать хорошими временными характеристиками. Приведем основные алгоритмы.

Отсечение отрезков (Liang-Barsky Line Clipping)

Описанный ниже метод показывает способ определения точки пересечения отрезка с ребром отсекающей рамки.

Определим порядок точек и рассмотрим параметрическое задание прямой.

$p_0 = (x_0, y_0)$ – начальная точка L(t)

$p_1 = (x_1, y_1)$ – конечная точка отрезка L(t)

$L(t) = p_0 + t(p_1 - p_0) = (1 - t)p_0 + tp_1$, где $0 \le t \le 1$.

Вектор $\vec{N}_e$ – внешняя нормаль к ребру e отсекающего окна. p_e – произвольная точка ребра e.

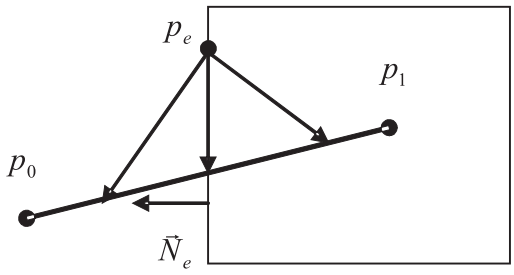


Рис. 1. Иллюстрация алгоритма отсечения отрезков

Выражение $(L(t) - p_e)$ задает вектор от точки p_e до точки на отображаемом отрезке, заданной параметром t. Некоторые примеры векторов для разных значений t показаны на рис. 1. Очевидно, что на пересечении рассматриваемого отрезка и ребра e скалярное произведение $(L(t) - p_e)$ и $\vec{N}_e$ будет равно нулю. Таким образом, мы можем подобрать параметр t, который задет пересечение отрезка и ребра отсекающей рамки, выразив его через соответствующие скалярные произведения.

$$\vec{N}_e \cdot (L(t) - p_e) = \vec{N}_e(p_0 + t(p_1 - p_0) - p_e) = \vec{N}_e(p_0 - p_e) + t\vec{N}_e(p_1 - p_0) = 0$$

$$t = \frac{\vec{N}_e(p_e - p_0)}{\vec{N}_e(p_1 - p_0)}$$

Используя это выражение применительно ко всем ребрам отсекающей рамки и произвольно выбранным на них точках, получим 4 значения параметра. Будем называть их $t_Л$, $t_П$, $t_В$, $t_Н$. Из определения параметра t видно, что если его значение находится вне отрезка [0,1], то точка пересечения отрезка и ребра находится перед начальной точкой p_0 или после конечной p_1 отрезка L(t). Параметр t можно характеризовать как входящий или исходящий.

Если при движении от точки p_0 к точке p_1 мы попадаем внутрь рамки (рассматриваем ребро e), то параметр t – входящий, иначе – исходящий. Скалярное произведение $\vec{N}_e$ и $(p_1 - p_0)$ определяет тип t. Если $\vec{N}_e(p_1 - p_0) > 0$, то t – исходящий, так как угол между ними менее $\pi/2$. Если $\vec{N}_e(p_1 - p_0) < 0$, то t – входящий. Отсеченный отрезок задается двумя параметрами t: наименьшим входящим и наибольшим исходящим. $0 \le \min(t_{вход}) \le \max(t_{исход}) \le 1$.

КОЛЕВАТОВ Василий Юрьевич – студент V курса факультета информатики ВятГГУ

© Колеватов В. Ю., 2007

В общем случае встречаются отрезки, которые вообще не пересекают ни одного ребра отсекающей рамки, тогда либо все точки отрезка принадлежат множеству точек, ограниченных рамкой, либо ни одна из точек не принадлежит этому множеству. В этом случае принадлежность любой из точек множеству точек, ограниченному рамкой, влечет за собой принадлежность всего отрезка рамке.

Определение принадлежности точки отсекающей рамке основано на тех же принципах, что и отсечение отрезка. Возможно вычисление скалярных произведений внешних нормалей к ребрам отсекающего окна и векторов, направленных из искомой точки в произвольную точку этих ребер. Отрицательность всех полученных произведений говорит о принадлежности точки рассматриваемой рамке.

Отсечение многоугольников (Sutherland – Hodgman polygon clipping)

Рассмотрим случай, когда отсекающее окно имеет форму прямоугольника. Представим многоугольник в виде последовательности точек, составляющих его вершины.

$$v_0, v_1, ..., v_{n-1}, n \geq 3.$$

Алгоритм ищет пересечения между каждым ребром отсекаемого прямоугольника и каждым ребром отсекающего окна. В результате мы получаем один или несколько многоугольников. Для получения результата используются следующие положения:

1. Начальная и конечная точки ребра многоугольника лежат вне отсекающего окна, значит они не являются вершинами результирующих фигур.

2. Начальная точка ребра многоугольника лежит снаружи, а конечная точка лежит внутри отсекающего окна, тогда мы сохраняем точку пересечения ребер и конечную точку.

3. Начальная точка ребра многоугольника лежит внутри, а конечная – снаружи отсекающего окна, тогда мы сохраняем точку пересечения в результат.

4. В случае, когда обе точки ребра принадлежат внутренней части окна, мы сохраняем конечную точку в результат.

Если по окончании алгоритма в результирующем наборе точек не будет ни одной, то этот многоугольник не виден в данном окне, а значит и изображать его не нужно.

При отсечении ребра отсекающего окна рассматриваются последовательно, и они производят отсечение. Пример отсечения можно увидеть на рис. 2.

Для определения принадлежности точки отсекающему окну и нахождения точки пересечения применяются те же методы, что и при отсечении отрезков.

После отсечения многоугольника каждым ребром отсекающего окна количество сторон многоугольника может увеличиться в связи с ростом числа вершин многоугольника. В нашем примере количество вершин увеличилось на 4. На каждом шаге алгоритма рассматриваем все ребра многоугольника для отсечения, то есть с каж-

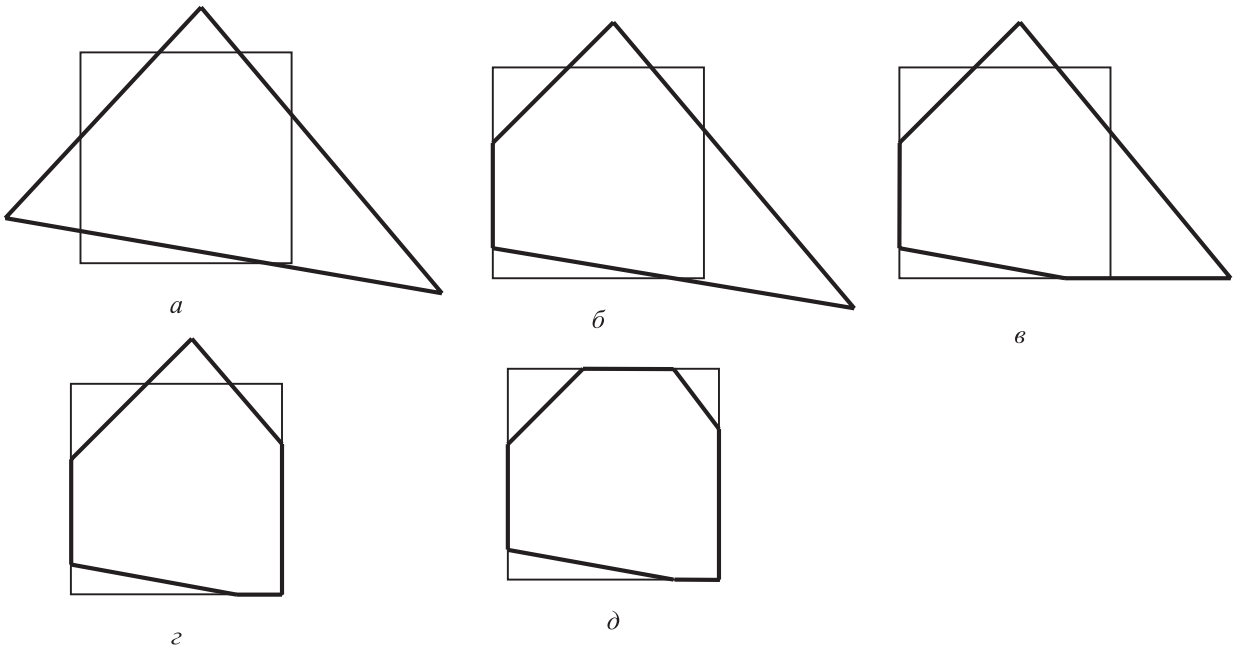


Рис. 2. Иллюстрация алгоритма отсечения многоугольников

дым шагом количество действий алгоритма растет и зависит от формы исходного многоугольника. Рассмотрим несколько иной подход.

Шаг 1. Берем первое ребро многоугольника и проводим для него последовательное отсечение всеми ребрами окна.

Шаг 2. Сохраняем полученные точки в результаты.

Шаг 3. Переходим к следующему ребру многоугольника.

Шаг N (завершающий). Проверяем, образуют ли полученные результаты связный многоугольник. Если условие не выполняется, то добавляем недостающие вершины отсекающего окна в результат.

Таким образом, мы получаем линейную зависимость сложности алгоритма от количества вершин исходного многоугольника, так как не происходит повторного рассмотрения и отсечения вновь образованных ребер.

Отсечение многоугольника окном произвольной формы

В случае, когда отсекающее окно имеет форму неправильного многоугольника, применяется следующий алгоритм. Рассмотрим его на примере.

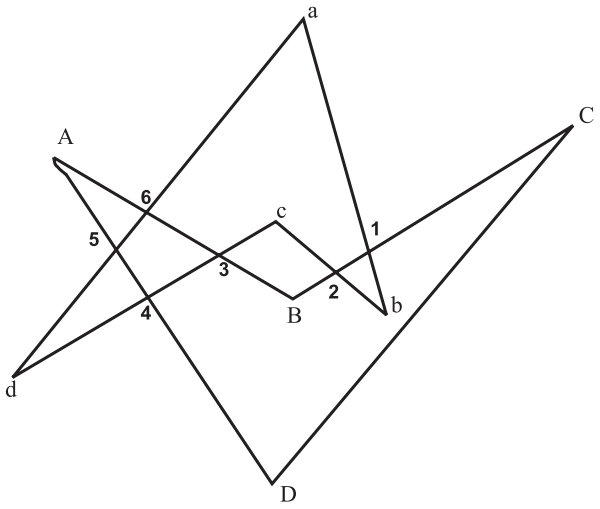


Рис. 3. Иллюстрация отсечения многоугольника окном произвольной формы

Вершины многоугольника обозначены строчными, а вершины отсекающего окна – заглавными буквами алфавита.

Будем рассматривать ребра многоугольника в порядке движения по часовой стрелке. Точки пересечения с ребрами отсекающего окна будем обозначать цифрами в порядке их вычисления (рис. 3).

После получения точек пересечения соединим его со списками вершин многоугольника и отсекающего окна. Получим:

– Для многоугольника: a,1,b,2,c,3,4,d,5,6 (*)

– Отсекающее окно: A,6,3,B,2,1,C,D,4,5 (**)

По этим данным находим результирующий набор многоугольников.

Шаг 1. Находим первую точку пересечения, которая является входящей, 1, в записи вершин (*). Добавляем в результат все точки, пока не дойдем до точки пересечения, выходящей из отсекаемого окна.

Шаг 2. Переходим к списку (**) и вносим в результат все точки между 2 и 1. В нашем примере получаем {1,b,2}.

Шаг 3. Находим следующую «входящую» точку пересечения в списке (*). Находим следующую за ней исходящую точку в том же списке.

Шаг 4. Находим следующую за найденной на шаге 3 точкой исходящую точку в списке (**). Это точка 6. Вносим в результат все точки, находящиеся между точками 3 и 6 из списка (*), и все точки, находящиеся между 6 и 3 из списка (**).

Результатом работы алгоритма, применительно к примеру, будет набор: {1,b,2}; {3,4,d,5,6}. Эти точки и являются вершинами отсеченного многоугольника.

Отсечение окружностей

Рассмотрим метод отсечения окружности прямоугольным отсекающим окном. В этом случае результатом будет дуга окружности, которую будем задавать уравнением окружности и двумя ограничивающими дугу радиусами, заданными углами. Все полученные углы записываются в отсчете от нулевого угла (см. рис. 4 $\alpha=0$).

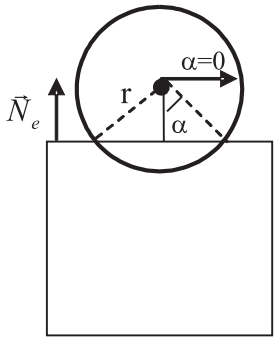


Рис. 4. Отсечение окружности прямоугольной формой

Пусть r – радиус отображаемой окружности.

Зададим вектор h, направленный из центра окружности к ребру отсекающего окна. Как и в алгоритме отсечения для многоугольников, будем рассматривать все ребра для получения результата. Пусть $\vec{N}_e$ – нормаль к рассматриваемому ребру.

Рассмотрим случай, когда $h > r$. Если скалярное произведение h и нормали к отсекающему ребру будет положительно, то окружность не подлежит отсечению, а отображается полностью. Если же скалярное произведение будет отрицательно, то окружность не видна в отображаемом окне.

Если длина h не превосходит r, то по формуле $\alpha = \arccos(h / r)$ мы сможем определить половину угла, ограничивающего отсеченную дугу.

Применительно к отсекающему окну, заданному неправильным многоугольником, возможен метод отсечения, рассмотренный выше для многоугольников. В этом случае часть полученной в результате отсечения фигуры может иметь форму дуги, а другие части могут быть ребрами многоугольника. Тогда помимо точек нужно включать и обрабатывать дуги в качестве результата.

М. А. Корчемкин

МЕТОД ПОИСКА ЭВРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ИНФОРМАТИКЕ

В статье на конкретном примере рассмотрен метод поиска эвристик, улучшающий временные характеристики первоначального решения.

Проблема решения NP-полных задач остается открытой в информатике. Даже в том случае, когда задача обладает свойством аддитивности и может быть решена методом динамического программирования, временные условия требуют дальнейшего улучшения решения. Тогда следует искать эвристики. Однако этот процесс поиска не формализован в каждом конкретном случае и имеет свои особенности. Покажем их на примере конкретной задачи.

Задача «Пакетная обработка заданий»

Имеется последовательность N заданий, предназначенных для выполнения на одной машине. Задания пронумерованы от 1 до N следующим образом: 1, 2, ..., N. Задания должны быть так сгруппированы в один или несколько пакетов, чтобы каждый пакет состоял из следующих друг за другом заданий исходной последовательности. Выполнение первого задания начинается в момент времени 0. Пакеты обрабатываются один за другим, начиная с первого, следующим образом. Если пакет b содержит задания с меньшими номерами, чем пакет c, то пакет b поступает на обработку раньше пакета c. Задания каждого пакета выполняются на машине последовательно. Сразу же после того, как все задания пакета выполнены, машина выводит результаты выполнения всех заданий этого пакета. Время завершения выполнения j-го задания определяется временем завершения обработки всего пакета, содержащего j-е задание.

Для подготовки к обработке каждого пакета машине необходимо время S, которое назовем подготовительным. Для каждого i-го задания известен стоимостный коэффициент F_i и время T_i, необходимое для выполнения этого задания. Если пакет состоит из заданий x, $x + 1$, ..., $x + k$ и поступает на обработку в момент времени t, то время завершения выполнения каждого задания пакета рассчитывается по формуле $t + S + (T_x + T_{x+1} + ... + T_{x+k})$. Заметим, что машина выводит результаты всех заданий пакета в один и тот же момент времени. Если время завершения выполнения i-го задания – O_i, то стоимость выполнения этого задания составит O_i Н F_i. Пусть имеется 5 заданий и известно:

$$S = 1;\ (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = (1, 3, 4, 2, 1);$$
$$(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) = (3, 2, 3, 3, 4).$$

Если задания сгруппированы в три пакета {1, 2}, {3}, {4, 5}, то можно вычислить время завершения выполнения для них $(O_1, O_2, O_3, O_4, O_5) = (5, 5, 10, 14, 14)$ и стоимости выполнения заданий (15, 10, 30, 42, 56) соответственно. Общая стоимость выполнения сгруппированных в пакеты заданий определяется как сумма стоимостей выполнения каждого задания. Таким образом, общая стоимость выполнения всех заданий для предложенного примера будет равна 153.

Вам задана величина подготовительного времени S ($0 \le S \le 50$) и последовательность N заданий ($1 \le N \le 10000$), для каждого из которых определено время выполнения T_i ($1 \le T_i \le 100$) и стоимостный коэффициент F_i ($1 \le F_i \le 100$). Требуется написать программу, которая вычисляет минимально возможную общую стоимость выполнения последовательности N заданий (данная задача взята со школьной олимпиады IOI 2002. Все формулировки задач олимпиад IOI 1992–2005 и тесты к ним можно найти на сайте http://byoi.narod.ru. В частности, эта задача расположена на byoi.narod.ru/ioi02_5.htm).

Решая данную задачу «в лоб», временную сложность выполнения можно оценить как $O(2^N)$. Эта оценка получается из того, что при поступлении следующего задания на обработку возможны два варианта, которые могут произойти с этим заданием. Первый – задание будет добавлено в последний формируемый пакет. Второй – это задание «начнет» формировать новый пакет. При максимальном значении числа заданий данное решение даст временную сложность 2^{10000}, что просто является невыполнимым. Рассмотрим данную задачу в «развитии» и попробуем построить решение методом динамического программирования. Он должен чувствоваться людьми, которые не в первый раз сталкиваются с олимпиадными задачами.

Разберем, что может происходить с заданиями при распределении в различные виды пакетов в ходе их поступления на обработку.

КОРЧЕМКИН Максим Анатольевич – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Корчемкин М. А., 2007

Первое задание, естественно, войдет в первый пакет: {1}. Второе задание будет составлять пару к первому – {1,2} или же «начнет» новый пакет – {1}{2}. Три задания можно сформировать в один пакет {1,2,3}, в два пакета двумя способами – {1,2}{3} или {1}{2,3}, или в три пакета – {1}{2}{3}.

Пусть значение *Cij* показывает минимальную стоимость разбиения заданий с номерами от 1 до *i* на *j* пакетов, тогда, естественно, задание с номером i попадет в пакет с номером j. Вместе с ним же может попасть несколько предыдущих заданий. К примеру, значение C_{42} будет выбираться из стоимостей формирования заданий следующими способами: **{1}**{2,3,4}, **{1,2}**{3,4}, **{1,2,3}**{4}. Как видно, при вычислении значения C_{42} нам потребуются значения C_{11}, C_{21}, C_{31} (это стоимости пакетов, выделенные «жирным» шрифтом). К соответствующим стоимостям первого пакета нужно прибавить стоимость объединения оставшихся заданий во второй пакет.

Например, для второго варианта формирования пакетов {1,2}{3,4} значение C_{42} будет рассчитываться как $C_{21}+(S+T_1+T_2+S+T_3+T_4)*(F_3+F_4)$ или $C_{21}+(2S+T_1+...+T_4)*(F_3+F_4)$. Первое слагаемое – стоимость формирования первого пакета {1,2}, второе слагаемое – стоимость формирования пакета {3,4}, где первый множитель – время завершения обработки этого пакета, а второй множитель – стоимостный коэффициент. Подобную операцию нужно проделать, естественно, и для оставшихся двух вариантов. Далее из вычисленных вариантов следует выбрать минимальный – оно и будет являться значением для C_{42}.

В общем виде значение будет вычисляться следующим образом:

$$C_{ij} = \min\{C_{k,j-1}+W_{k+1,i}(j)\}, \text{ при } i>k>j,$$

где $W_{k+1,i}(j)$ – стоимость объединения заданий, начиная с номера k+1 и заканчивая номером i, в один пакет, при том, что этот пакет является j-м по счету. Таким образом, $W_{k+1,i}(j) = (jS+T_1+...+T_i)*(F_{k+1}+...+F_i)$ – первый множитель – это время завершения обработки этого пакета, а второй множитель – сумма стоимостных коэффициентов, входящих в этот пакет. Следует дополнить, что $C_{i,1} = W_{1,i}(1)$. Действительно, значение $C_{i,1}$ вычисляется единственным образом и равно стоимости объединения заданий, начиная с 1-го, и заканчивая номером i, в первый пакет.

Интересующий же нас результат следует искать среди значений $C_{N\,j}$, при $j = 1..N$.

Этот метод очень понятен и прост в реализации. Формально алгоритм можно записать так:

```
for i = 1..N
  for j = 1..i
    for k = j−1..i−1
      c[i][j]=min{c[k][j−1]+w(k+1,i,j)}.
```

Однако при вычислении C_{ij} циклы по индексам i, j, k дадут временную сложность этого алгоритма, сравнимую с $O(N^3)$, что, опять же, при больших значениях N дает нереальное время выполнения программы. Если найдется возможность избавиться от лишнего цикла, то тогда получится снизить время работы алгоритма.

Попробуем расформировать задания в пакеты, начиная разбор с последнего задания. Для начала покажем, что если выполнение обработки пакета началось с некоторой задержкой времени dt, то его стоимость увеличится на величину $dt*(Fp+...+Fq)$, где $p..q$ – номера заданий, входящих в этот пакет. Это следует из того, что для любого задания с номером k от p до q время его завершения увеличится на dt, а следовательно его стоимость на $dt*Fk$. Суммирование по $k = p..q$ нам даст указанную выше величину.

Начнем рассматривать динамику процесса в ходе формирования пакетов заданий. Для определенности возьмем пример из условия задачи. Итак, $N = 5$. Последнее задание сформирует пакет {5}. Его стоимость обозначим как $C_5 = (S+T_5)*F_5 = (1+1)*4 = 8$.

Далее на входе у нас четвертое задание. Здесь возможны два варианта: «упаковывания» уже двух заданий: {4,5} и {4}{5}. Обозначим стоимость выполнения задач с 4-го до 5-го через C_4.

Для пакета {4,5} значение $C_4 = (S+T_4+T_5)*(F_4+F_5) = (1+2+1)*(3+4) = 28$.

Для пакетов {4}{5} значение $C_4 = (S+T_4)*F_4 + [C_5+(S+T_4)*F_5]$, где первое слагаемое – стоимость пакета {4}, а второе (в квадратных скобках) – стоимость выполнения пакета {5}, равная C_5, плюс дополнительная стоимость этого пакета вследствие его «задержки» выполнения во времени, из-за выполнения пакета {4}, а именно, на время $S+T_4$ со стоимостным коэффициентом F_5.

Если вынесем за скобки общий множитель (S+T4), то для пакетов {4}{5} имеем:

$C_4 = C_5+(S+T_4)*(F_4+F_5) = 8+(1+2)*(3+4) = 29$.

Из двух значений C_4 выберем наименьшее – $C_4 = 28$.

При поступлении третьего задания возможны следующие варианты:

{3,4,5}, {3,4}{5}, {3}{4,5}, {3}{4}{5}. Однако вариант {3}{4}{5} рассматривать не следует, так как он заведомо хуже, чем вариант {3}{4,5}. Это видно из того, что на предыдущем шаге мы выяснили, что стоимость пакетов {4}{5} выше, чем у пакета {4,5}, и при смещении времени выполнения этих заданий из-за выполнения задания 3 это не изменится. Поэтому остается три варианта:

{3,4,5}: $C_3 = (S+T_3+T_4+T_5)*(F_3+F_4+F_5) = (1+4+2+1)*(3+3+4) = 80$

{3,4}{5}: $C_3 = (S+T_3+T_4)*(F_3+F_4)+[C_5+(S+T_3+T_4)*F_5] = C_5+(S+T_3+T_4)*(F_3+F_4+F_5) = 8+(1+4+2)*(3+3+4) = 78$.

{3}{4,5}: $C_3 = (S+T_3)*F_3+[C_4+(S+T_3)*(F_4+F_5)] = C_4+(S+T_3)*(F_3+F_4+F_5) = 28+(1+4)*(3+3+4) = 78$.

Не важно, какой из «минимальных» вариантов мы выберем, при котором он достигается. Главное то, что в следующий раз «хвост» из заданий с номерами 3, 4, 5 будет оставаться оптимальным. Покажем это.

Продолжая подобным образом, для 2-го пакета будем рассматривать формирование в пакеты {2,3,4,5}, {2,3,4}**{5}**, {2,3}**{4,5}**, {2}**{3,4}{5}**. Здесь «жирным» шрифтом выделены «хвосты», дающие минимум стоимости. И вместо {2}**{3,4}{5}** можно было рассматривать пакеты {2}**{3}{4,5}**, но это ничего не изменит, так как в обоих случаях результат будет одинаковым. Это происходит из-за того, что задания 3, 4, 5, как бы они не были сформированы – первым или вторым образом, – в итоге «сдвигаются» во времени выполнения на одно и то же значение, а именно – на время выполнения пакета {2}.

Для указанных вариантов получим следующее:

{2,3,4,5} – $C_2 = (S+T_2+...+T_5)*(F_2+...+F_5) = 11*12 = 132$

{2,3,4}{5} – $C_2 = C_5+(S+T_2+..+T_4)*(F_2+...+F_5) = 8+10*12 = 128$

{2,3}{4,5} – $C_2 = C_4+(S+T_2+T_3)*(F_2+...+F_5) = 28+8*12 = 124$

{2}{3,4}{5} – $C_2 = C_3+(S+T_2)*(F_2+...+F_5) = 78+4*12 = 126$

Итак, $C_2 = 124$ ({2,3}{4,5}).

Аналогично добавив «последнее» первое задание, получим окончательную оценку $C_1 = 153$ – минимальная стоимость для распределения пяти заданий из примера. Сами задания распределяются как {1,2}{3}{4,5} или {1,2}{3,4}{5} – стоимости одинаковы.

В общем виде данные итерации можно описать так: $C_i(j) = C_j + \left(S + \sum_{i\le k<j} T_k\right)\sum_{i\le k\le N} F_k$.

Если введем обозначения

$$G(i) = \sum_{i\le k\le N} T_k \ , \ H(i) = \sum_{i\le k\le N} F_k \ , \qquad (1)$$

тогда окончательно равенство примет вид

$$C_i(j) = C_j + (S + G(i) - G(j))\cdot H(i) \ . \qquad (2)$$

Взяв минимум по $j = i+1..N+1$, получим:

$$C_i = \min_{i<j\le N+1} C_i(j) \ . \qquad (3)$$

При этом, если считать, что $C_{N+1}=0$, тогда приведенные формулы верны для всех $i=1..N$.

Рабочий код алгоритма будет примерно таким:

```
for i := N..1 do
  for j := i+1..N+1 do
    c[i] = min{ c[j]+(S+G[i]–G[j])*(F[i]–F[j]) }.
```

Как видно, данный подход к решению задачи будет давать временную сложность алгоритма, сравнимую с $O(N^2)$, что и это очень много, так как ограничение по времени на олимпиаде для работы решения по этой задаче было очень малым – всего 100 мс.

Попробуем еще оптимизировать данную схему решения и постараемся выяснить, когда нам выгоднее обрабатываемое задание добавить к существующему пакету, а когда лучше начать новый пакет. Вместо перебора значения *j*, соответствующего номеру задания, которое является последним в формируемом пакете {*i*, ..., *j*}, попытаемся однозначно определять этот индекс.

Если на каком-то шаге у нас получилось какое-то определенное значение *j*, то можно все остальные индексы, большие, чем *j*, выбросить из дальнейшего рассмотрения, поскольку они уже никогда не дадут оптимального разбиения. Данное утверждение довольно прозрачно и, возможно, не ясно видно, но оно легко выводится простым разбором соотношений, указанных выше. Удаление из рассмотрения индексов вышенайденного оптимального *j* можно объяснить тем, что если они не дали оптимум на этом шаге, то в дальнейших итерациях, при добавлении новых заданий на разбор, само значение C_j может не обеспечить минимальное значение, но значения C_{j+1}, C_{j+2} и т. д. будут заведомо больше, чем C_j, а следовательно, их рассматривать вообще не стоит. Что ж, немножко сократили перебор по *j*. Время алгоритма будет несколько меньше, чем $O(N^2)$, но по-прежнему сравнимо с этим значением. Такое сокращение отобразится на алгоритме примерно так:

```
high := N+1;
for i := N downto 1 do begin
    for j := i+1 to high do begin
      c[i] = min{ c[j]+(S+G[i]–G[j])*(F[i]–F[j]) }
      { если текущее j претендент на оптимум,
то запомним это значение}
       jHigh := j;
    end;
   { изменяем верхнюю границу перебора по j}
    high := jHigh;
end;
```

Однако указанный цикл можно сократить не только «сверху», но и «снизу» – при некоторых условиях у нас на каждой итерации можно определить некоторые числа *jLow* и *jHigh*, которые будут определять диапазон индексов-претендентов на оптимальное значение. Причем они не обязательно будут идти подряд, поэтому нам выгоднее организовать не сплошной цикл от *jHigh* к *jLow*, а брать значения из упорядоченного списка. Таким образом, на *i*-й итерации при выборе оптимума мы можем «выбросить» неоптимальные номера заданий с конца очереди (они и впоследствии оптимум не дадут), а при добавлении индекса *i* в список можно удалить и некоторые первые элементы списка.

Рассмотрим эту схему на нашем примере. Формулы, расписанные при расчетах, будут объяснены ниже, поэтому не стоит в них вдумываться при первом прочтении, а следует принять их к сведению.

При $S = 1$; $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5) = (1, 3, 4, 2, 1)$; $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5) = (3, 2, 3, 3, 4)$.

Имеем $(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5) = (11, 10, 7, 3, 1)$; $(H_1, H_2, H_3, H_4, H_5) = (15, 12, 10, 7, 4)$.

Для первой итерации можно доопределить: $C_6 = G_6 = H_6 = 0$, и добавить индекс 6 в список.

$i = 5$ $list = (6)$, $C_5 = C_6+(S+G_5-G_6)*H_5 = 8$, добавляем индекс 5 в список.

$i = 4$ $list = (5,6)$, $dTime\ (5,6) = (C_5-C_6)/(G_5-G_6) = 8/1 = 8 > H_4 = 7$, элемент 6 не удаляем, $C_4 = C_6+(S+G_4-G_6)*H_4 = 0+(1+3-0)*7 = 28$, добавляем индекс 4 в список.
так как $dTime\ (4,5) = (28-8)/(3-1) = 10 > dTime\ (5,6) = 8$, первый элемент (5) не удаляем.

$i = 3$ $list = (4,5,6)$, $dTime\ (5,6) = 8 \le H_3 = 10$ – можем удалить элемент 6 из $list$
$list = (4,5)$, $dTime\ (4,5) = 10 \le H_3 = 10$ – можем удалить элемент 5 из $list$
$list = (4)$, $C_3 = C_4+(S+G_3-G_4)*H_3 = 28+(1+7-3)*10 = 78$,
добавляем индекс 3 в список.

$i = 2$ $list = (3,4)$, $dTime(3,4) = (78-28)/(7-3) = 12{,}5 > H_2 = 12$, элемент 4 не удаляем, $C_2 = C_4+(S+G_2-G_4)*H_2 = 28+(1+10-3)*12 = 124$, добавляем индекс 2 в список.
так как $dTime\ (2,3) = (124-78)/(10-7) = 15{,}33 > dTime\ (3,4) = 12{,}5$, первый элемент не удаляем

$i = 1$ $list = (2,3,4)$, $dTime\ (3,4) = 12{,}5 \le H_1 = 15$ – можем удалить элемент 4 из $list$
$list = (2,3)$, $dTime\ (2,3) = 15{,}33 > H_1 = 15$, $list = C_3+(S+G_1-G_3)*H_1 = 78+(1+11-7)*15 = 153$.

Критерием выбора тех или иных элементов списка является следующее соотношение:

$C_p - C_q \le (G(p) - G(q))*H(i)$, где p и q – два элемента из списка, причем $i<p<q$.

Если указанное соотношение выполняется, то есть разница стоимостей формирования заданий будет меньше, чем значение дополнительной стоимости от «сдвига» времени обработки пакетов, то мы, естественно, «сдвигаем» во времени все задания, начиная с p-го. Таким образом, объединять задания в пакет нужно так $\{i, \ldots, p-1\}$, а далее идет оптимальный «хвост», начиная с задания с номером p. Все же значения выше p, в том числе и q, можно отбросить. Отсюда следует, что если в качестве p и q последовательно брать предпоследний и последний элементы списка соответственно, то при выполнении указанного условия мы можем смело второй из них отбросить. Так, в итоге у нас получится, что в конце списка стоит индекс, дающий оптимальное значение. А при добавлении i-го элемента в начало списка, если элементы p и q – первый и второй элементы списка соответственно, выполняется соотношение

$(C_i - C_q) / (G(i) - G(q)) \le (C_p - C_q) / (G(p) - G(q))$,

это говорит о том, что уже индекс p, а именно первый элемент списка можно убрать из дальнейшего рассмотрения. Указанное сравнение нужно продолжить уже с новыми первым и вторым элементами списка. В программной реализации удобно такую «относительную стоимость» оформить в качестве отдельной функции (в приведенном ниже алгоритме это функция *dTime*).

Программная реализация данного метода примерно такая (методы класса ***__List*** *GetFirst, GetSecond, GetLast, GetPreLast, GetPower* возвращают значения первого, второго, предпоследнего и последнего элементов соответственно, а также значение количества элементов в списке – реализацию указанного класса оставим за рамками этой статьи).

```
Function dTime(p, q: integer): double;
Begin
   Result := (c[p]-c[q])/(g[p]-g[q]);
End;
...
Var  list : __List;
     i, p, q : integer;
...
list.insert(N+1); // Добавляем дополнительный элемент
For  i := N downto 1 do begin // Внешний цикл по i
     p := list.GetPreLast; // Последний элемент списка
     q := list.GetLast; // Предпоследний элемент списка

  while (list.GetPower > 1) and (dTime(p,q) <= h[i])
  do begin
     list.DeleteLast; // Удаляем с конца списка
     p := list.GetPreLast; // Последний элемент списка
     q := list.GetLast; // Предпоследний элемент списка
  end;

  p := list.GetLast;
  c[i] := c[p] + (s+g[i]-g[p])*h[i];

  p := list.GetFirst;
  q := list.GetSecond;

  while (list.GetPower > 1) and (dTime(i,q) <=
  dTime(p,q) do begin
     list.DeleteFirst; // Удаляем с начала списка
     p := list.GetFirst;
     q := list.GetSecond;
  end;
```

```
 list.insert(i); // Добавляем элемент в начало списка
end;
Writeln(c[1]);
```

Поскольку каждый индекс добавляется в очередь, а значит и удаляется из нее не более одного раза, то общее время работы алгоритма есть $O(N)$. Данное решение, реализованное на олимпиаде, набирало полный балл за задачу.

Любое решение задачи по информатике, даже если бы, казалось, найден алгоритм, следует подвергать анализу с целью улучшения его характеристик. На конкретном примере, выявляя особенности каждой конструкции повторения (её смысла), показан метод поиска эвристик, улучшающие временные параметры решения.

И. А. Корякина

РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КОНЦЕПЦИИ КУРСА «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В БАНКОВСКОМ ДЕЛЕ»

В статье обобщен опыт преподавания курса «Информационные системы в банковском деле».

Теоретическая концепция курса «Информационные системы в банковском деле». В соответствии с учебным планом специальности 010502.65 (351400) Прикладная информатика (в экономике) курс «Информационные системы в банковском деле» предполагает практические занятия. Критерии формата практических занятий задавались исходя из целей, сформулированных теоретической концепцией курса. Если учесть сегодняшний уровень автоматизации банковской деятельности и перспективы развития рынка информационных технологий, то концепция содержит две составляющие: функциональную и технологическую. Технологическая включает в себя вопросы новых информационных технологий, которые фирмы-разработчики ещё только внедряют в свои продукты. Функциональная включает вопросы объёма предоставляемых услуг автоматизированными банковскими системами. Для разработки практических занятий рассматривалась реализация функциональной составляющей теоретической концепции, которая включает в себя: увязывание теории с практикой, ориентирование на промышленные системы, изучение базовых технологий промышленного уровня на практике раньше, чем они попадут в стандартные учебники теории, создание собственных методических разработок.

Критерии выбора учебной версии автоматизированной банковской системы АБС RS-Bank 5.0. В январе 2006 г. Вятским государственным гуманитарным университетом была приобретена учебная версия автоматизированной банковской системы АБС RS-Bank 5.0, которая используется в настоящее время в качестве методического программного средства для проведения практических занятий по курсу «Информационные системы в банковском деле».

Компания «R-Style Softlab» – ведущий отечественный разработчик специализированного программного обеспечения для автоматизации банков и предприятий.

При выборе учебной системы принимались во внимание следующие критерии:

– распространённость; RS-Bank считается самой популярной российской АБС, являясь на отечественном рынке лидером банковской автоматизации (рис. 1) [1];

– функциональность; АБС RS-Bank v. 5.0 предназначена в первую очередь для автоматизации расчетно-кассового обслуживания и бухгалтерского учета. Она позволяет также вести параллельный налоговый учет в соответствии с российским законодательством, формировать обязательную отчетность для Банка России, а также осуществлять операции по противодействию легализации доходов, полученных незаконным путем, согласно Федеральному закону № 115-ФЗ. Кроме того, RS-Bank 5.0 выполняет весь цикл задач по взаимодействию с Расчётно-кассовым центром, расчет и начисление процентов, плату за обслуживание, ведение картотек и пр. Учебным заведением установлено на своих компьютерах ядро АБС, в состав которого входят подсистемы: «Многовалютный Операционный День Банка (ОДБ)» (рубли, валюта, проценты); «Ведение корсчетов»; «Отчеты банка»; «Отчеты Центрального Банка (ЦБ)»; «Системный сервис» (рис. 2) [2];

– доступность по ценовым характеристикам;

– наличие поддержки.

Задачи. Для реализации теоретической концепции курса использовались функциональные возможности основных модулей АБС RS-Bank v. 5.0., знакомство с которыми было положено в основу разработанных задач (лабораторных заданий). Их цель:

– знакомство студентов с настройкой, администрированием и функционированием модулей, составляющих ядро RS-Bank версии 5.0.;

– выполнение основных функций операционной бухгалтерии как по рублевым, так и по валютным денежным средствам;

КОРЯКИНА Ирина Аркадьевна – начальник сектора обработки документов Отдела операционного обслуживания и бухгалтерского учёта филиала в г. Кирове ОАО «ПСБ»

© Корякина И. А., 2007

– выпуск на основании данных «Многовалютного ОДБ» всех видов отчетности, необходимых для отражения результатов работы банка;

– изучение операций с корреспондентским счетом банка и организации межбанковских расчетов.

Разработанный материал представляет собой цикл практических работ по освоению учащимися подсистемы «Системный сервис» – необходимой составной части комплекса RS-Bank 5.0. «Системный сервис» является рабочим местом администратора банка и предоставляет ему мощный инструмент для управления различными составляющими многоцелевой АБС, организации рабочих мест пользователей системы и их доступа к данным, осуществления контроля за работой сотрудников. На уровне администратора учащиеся знакомятся и с ведением всевозможных справочных данных системы.

Подсистема «Многовалютный ОДБ» предназначена для выполнения основных функций операционной бухгалтерии как по рублевым, так и по валютным денежным средствами. Одной из важных особенностей подсистемы является одновременная с проводкой валютных документов проводка по счетам рублевого покрытия суммы в национальной валюте по курсу ЦБ, устанавливаемому на начало текущего операционного дня. Это позволяет в любой момент времени получить консолидированный баланс, включающий в себя суммы на счетах рублевого покрытия как эквивалент валютных средств, находящихся в банке.

По разработанным заданиям учащиеся имеют возможность в данной подсистеме познакомиться со следующими видами работ, решающими операционно-учетные задачи в банковской практике:

– выполнение всего спектра операций с лицевыми счетами банка, в том числе обслуживание валютных счетов клиентов банка и связанных с ними счетов рублевого покрытия;

– работа с различными видами платежных документов;

– работа с различными картотеками;

– установка курсов валют различных видов;

– начисление и проводка оплаты процентов по счетам с использованием как процентных ставок различных видов, так и различных графиков расчетов и оплаты процентов;

– начисление и удержание платы за обслуживание с использованием различных видов тарифов;

– ведение внебалансового учета.

Подсистема «Отчеты банка» предназначена для выпуска на основании данных МВОДБ всех видов отчетности, необходимых для отражения работы банка.

При выполнении задач учащиеся имеют возможность сформировать в данной подсистеме разнообразные отчеты операционного дня банка как по рублевым, так и по валютным средствам и проанализировать их. К ним относятся:

– балансы различных видов;

– разнообразные ведомости, выписки и справки по лицевым счетам;

– справки о проведенных документах;

– мемориальные ордера и платежные поручения;

– отчеты по счету невыясненных сумм;

– различные ведомости начисления и оплат процентов;

– кассовые формы;

– отчеты по кассовому плану и кассовые журналы.

Выводы и дальнейшие возможности совершенствования знаний учащихся. Учебная версия автоматизированной банковской системы АБС RS-Bank 5.0 вполне соответствует достаточному инструменту при реализации теоретической концепции курса «Информационные системы в банковском деле».

Для успешного выполнения практических работ в части операционно-учетных задач учащиеся должны владеть основами банковского дела, а также знать общие понятия и определения, касающиеся операционной техники в банковском деле: основы банковского бухгалтерского учёта, определение и назначение активных и пассивных счетов, балансовые, лицевые счета, понятие баланса, требования к балансу и банковскую отчетность. Для получения достаточных знаний предлагаем включить в программу курса «Банковское дело» тематический блок «Основы банковского бухгалтерского учёта» в качестве информационного сопровождения моделей банковских бизнес-процессов. Новый подход к построению названного курса, построенный на классической учебной литературе, содержащей простое описание банковских операций, на основе использования единой интегрированной модели бизнес-процесса, продукта и его жизненного цикла позволит повысить уровень компетенций обучаемого и глубже овладеть практическими знаниями.

Принимая во внимание всю важность изучения современных инструментов и технологий для обеспечения высокого качества образования, хочется отметить следующие возможности дальнейшего совершенствования знаний о продуктах компании «R-Style Softlab».

Центр подготовки специалистов компании организует для наиболее перспективных студентов производственную и преддипломную практику в подразделениях компании.

Компания дает возможность учащимся проверить уровень своих знаний по программным продуктам «R-Style Softlab» через Интернет, на основе программы автоматизированного тести-

рования, а в перспективе – организовать аттестацию и сертификацию выпускников в офисе компании.

Примечания

1. http://www.softlab.ru [Электронный ресурс].
2. Там же.

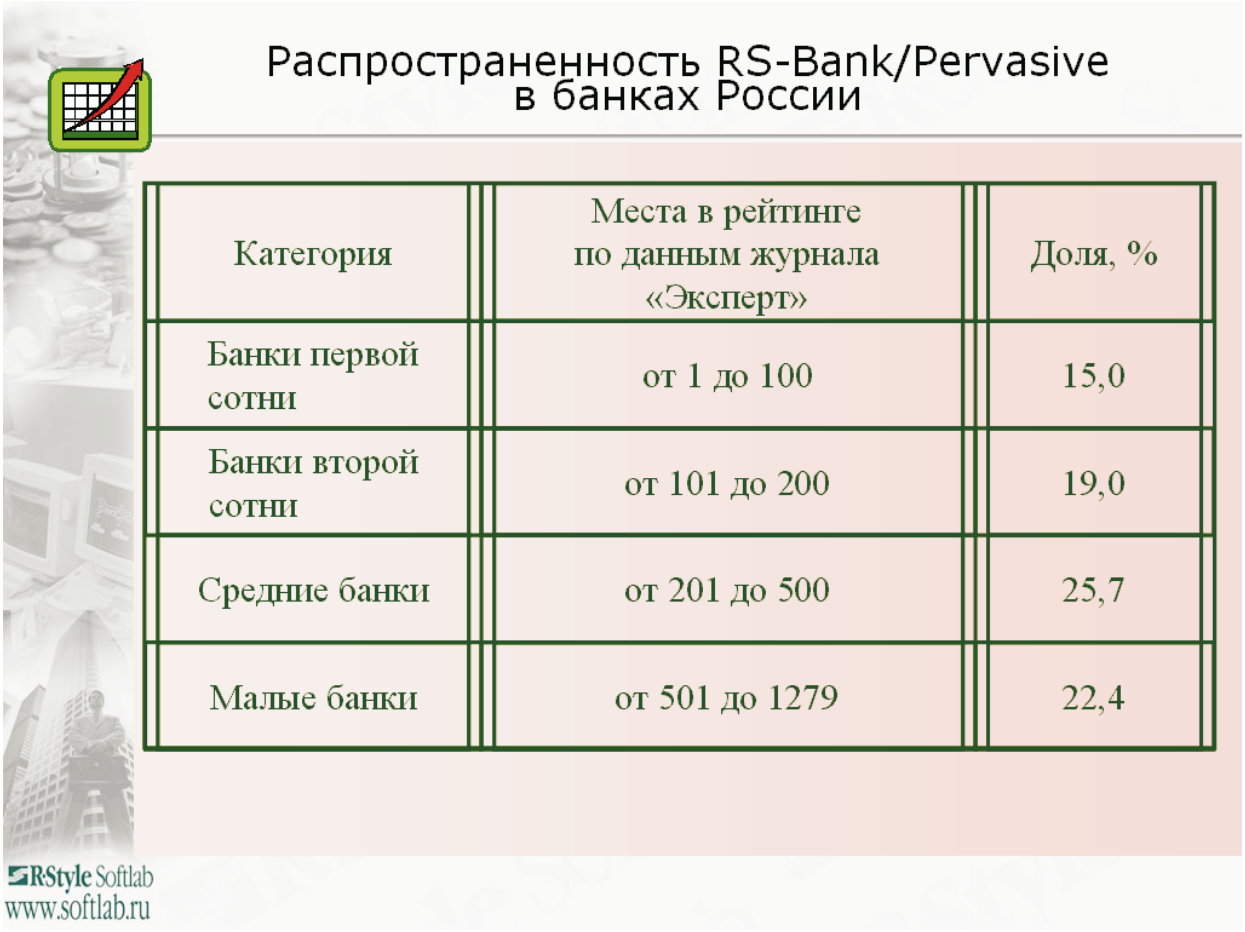


Рис. 1. Распространённость RS-Bank/Pervasive в банках России

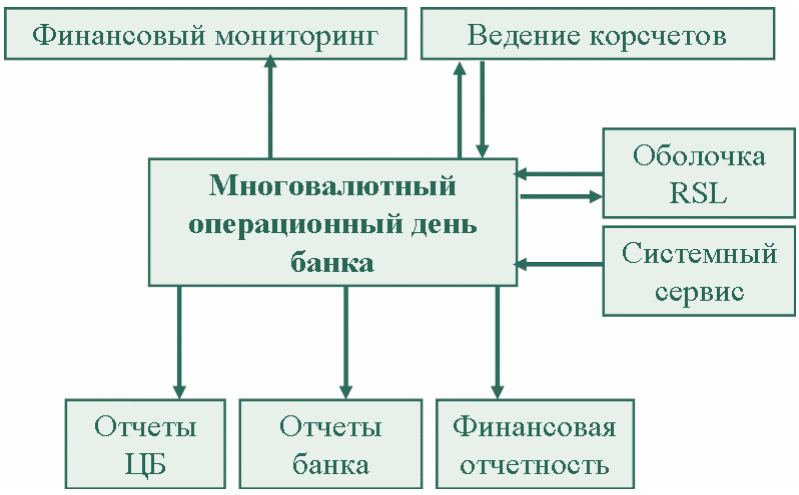


Рис. 2. Общая структурная схема комплекса RS-Bank 5.0

И. А. Корякина

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА, НАЦЕЛЕННОГО НА ПОТРЕБНОСТИ БИЗНЕСА

В статье предложен и рассматривается путь совершенствования образовательного процесса с точки зрения его нацеленности на интересы бизнеса.

В октябре текущего года в Санкт-Петербургском государственном университете телекоммуникаций (СПбГУТ) им. проф. М. А. Бонч-Бруевича состоялась международная научно-методическая конференция «Инновационные программы и их роль в повышении уровня подготовки специалистов». Доклады, выступления и обсуждения в своей основе были посвящены вопросу подготовки специалиста, соответствующего современным требованиям бизнеса. В условиях роста ИТ-индустрии и, как следствие, изменений в экономике растет и потребность в квалифицированных специалистах. О необходимости ИТ-специалистов говорят и представители бизнеса, заявляя, что в предыдущие годы бизнес занимался кадрами, но другими. Искали и обучали управленцев, финансистов, маркетологов... и совершенно не обращали внимания на утечку научных кадров – технологов, инженеров, ученых, дизайнеров, проектантов. Сегодня наступил другой этап – перед бизнесом возникла задача поиска и привлечения людей, которые будут работать в научных центрах, создавать собственные разработки и технологии [1].

Традиционные методы обучения и существующие образовательные стандарты, определяющие уровень подготовки кадров, не удовлетворяют в полной мере требованиям бизнеса для работы в современной корпоративной среде. В решении этой проблемы всё большую роль играют инновационные образовательные программы.

1. *Инновация как технико-экономическое понятие.* Понятие «инновация» приобретает более широкий смысл. Инновация – методика практического применения научных открытий и разработок. В рыночной экономике она представляет собой всё более значимое орудие конкуренции. Внедрение новых технологий и результатов исследований из научно-технического сектора в промышленность – традиционная задача и зачастую – основной вид деятельности инновационных центров, которые в Западной Европе стали создаваться ещё в середине 1980-х гг. Таким образом, инновация – технико-экономическое понятие [2]. Основные функции инновационных центров в России будут выполнять технопарки в сфере высоких технологий. Распоряжением Правительства РФ от 10 марта 2006 г. № 328-р была одобрена Государственная программа «Создание в Российской Федерации технопарков в сфере высоких технологий».

2. *Технопарк – альтернатива инновационным центрам.* Инновационный подход в ИТ-образовании тесно связан с инновационным подходом в ИТ-бизнесе. Оба этих подхода объединяет в себе технопарк – инновационная оргструктура, сочетающая процесс ИТ-образования и процесс ведения реального бизнеса в области внедрения ИТ-технологий. Функционально технопарк – это «адаптер» между системой вузовского ИТ-образования и реальным бизнесом. Создание технопарков должно обеспечить развитие интеллектуального потенциала и инноваций в сфере высоких технологий.

Функциональную структуру ИТ-парка можно представить в виде 3 уровней (см. рис. 1).

Функции технопарка, обусловливающие его необходимость:

- инструмент финансового участия в образовательном процессе со стороны бизнеса;
- инструмент интеллектуального участия в бизнесе со стороны университета.

Таким образом, технопарк как бы предоставляет, с одной стороны, «оперативный финансовый резерв» для университета и с другой – «оперативный кадровый резерв» для бизнеса. Разумеется, на взаимовыгодной основе. Утилитарно необходимость технопарка можно объяснить исходя из такого соображения: университету не угнаться за технологическими новшествами в сфере реального бизнеса, а реальному бизнесу некогда заниматься дообучением студентов. Технопарк в образовательном аспекте берёт на себя роль доводчика студента с уровня носителя академических знаний до уровня носителя компетенции, востребованной реальным бизнесом.

3. *Инновационные программы объединения интересов бизнеса и образования.* В направлении объединения интересов бизнеса и образования уже существуют программы, например, «Обучение ИТ в реальных проектах на базе образовательной AD-HOC среды» [3], где предлагается концепция новой, дополняющей существующие институты, образовательной среды Active ad-hoc Education Environment, которая может быть сформирована при активном участии бизнеса, студентов и вузов с помощью существующих Интернет-технологий. Предполагается, что главная со-

КОРЯКИНА Ирина Аркадьевна – начальник сектора обработки документов Отдела операционного обслуживания и бухгалтерского учёта филиала в г. Кирове ОАО «ПСБ»

© Корякина И. А., 2007

ставляющая будет формироваться индустрией, бизнесом, публикацией некритичных для текущего бизнеса задач или доступных для разглашения задач. Считаю, что в России на данный момент такой благотворительности от бизнеса ждать не приходится. Участие в образовательных проектах ему интересно в большей степени только для саморекламы, что сужает ту роль, которую ему отводят в данном проекте. Бизнесу не интересен процесс как таковой (образование или что-то ещё) – ему интересен результат (в виде денег). Бизнес готов покупать какие-то технологические решения (в том числе и ИТ), но ему не важно, какие именно это будут технологии (ИТ, или маркетинговые, или другие) – ему важна только рентабельность этих технологий. А каким образом люди, предлагающие эти технологии, научились работе – это бизнесу не интересно. Насчёт реального участия в данном проекте бизнеса возникают сомнения: «Результаты исследования оказались неожиданными: российские предприятия по-прежнему требуют все больше вузовских выпускников и в то же время сворачивают свои отношения с системой образования» [4]. Есть, конечно, у бизнеса интерес и с точки зрения работодателя, но он, если и предполагает участие в образовательных проектах, то или в узконаправленных (в основном это курсы или система дополнительного образования), или в проектах, инициализированных западными фирмами. В рамках своей «Академической инициативы» (IBM Academic Initiative) Голубой гигант анонсировал образовательно-исследовательскую программу Services Sciences, Management and Engineering (SSME), что в переводе на русский звучит как «Теория предоставления услуг, менеджмента и инженерных инноваций». Программа SSME состоит более чем из 70 курсов и объединяет информацию о более чем ста технологиях. Она призвана сформировать рынок услуг, обеспечивающий разработку и реализацию технических приложений, помогающих коммерческим, государственным и прочим организациям повышать эффективность своей работы и создавать новые возможности для дальнейшего развития. В ближайшие десять лет IBM планирует (по всему миру) принять на работу 50 тысяч выпускников учебных заведений, прошедших подготовку по этой дисциплине [5].

Как один из вариантов инструментария вовлечения студенческого потенциала в коммерческий оборот можно рассматривать концепцию информационной системы, предложенной на упомянутой конференции – «Информационная система как инструмент взаимодействия инновационных инфраструктур для обмена технологическими запросами и предложениями». Задачи этой системы: разместить информацию о разработке и сопроводить её на всех этапах жизненного цикла. Такие системы активно работают в Европе,

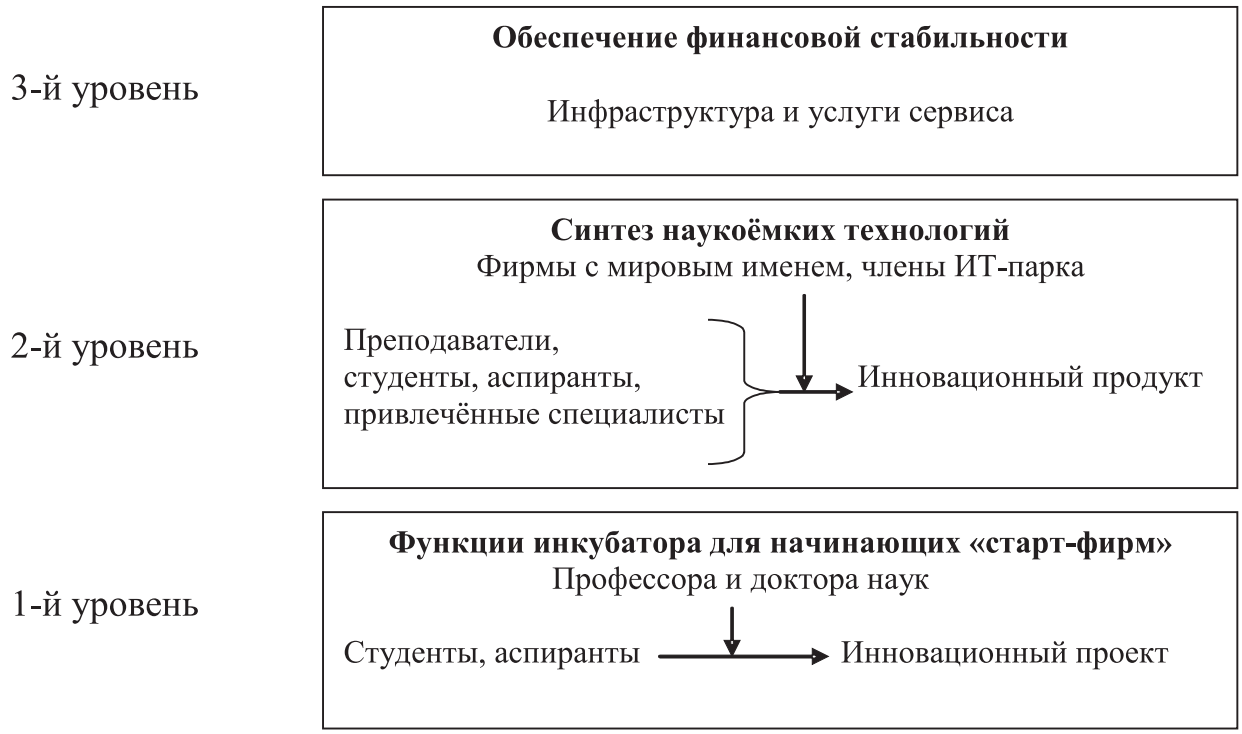


Рис. 1. Функциональная структура ИТ-парка

Китае, США и других странах и объединяют, как правило, инновационные центры. При инициативе со стороны учебных заведений, или при создании инновационных центров, или при возрождении студенческих научных обществ эта идея в России, возможно, станет работоспособной и адекватной задачам бизнеса, и опять-таки при активном участии бизнеса со стороны постановки актуальных задач. Но здесь пока только одни вопросы, ситуация до сих пор остается острой и уровень инновационной активности российских предприятий по-прежнему оставляет желать лучшего.

4. *Технология наращивания профессиональной компетенции студентами технико-экономических специальностей в условиях отсутствия технопарков.* Как же добиться в нынешних российских условиях приближения уровня знаний студентов учебных заведений реальным задачам бизнеса? Как повысить их профессиональную компетенцию? В частности, как приблизить студента, обучаемого на специальностях, которые появились на стыке дисциплин технической и экономической направленности, к предметной области? Необходимость и пути приобретения студентами такой компетенции обоснованы в ряде работ [6].

Предлагаемый подход для изучения экономических предметов (конкретно – курса «Банковского дела») студентами технических специальностей, в частности специальности 351400 «Прикладная информатика (в экономике)», позволит активно представить прикладную составляющую в содержании подготовки ИТ-специалистов и соединить уникальные возможности информационных технологий с решением конкретных задач. Актуальность процессного подхода и процессных технологий как новой философии эффективного управления бизнесом, роста конкурентоспособности кредитных организаций подтверждает и тот факт, что 20 ноября 2006 г. состоится Второй Международный банковский форум «Организационные технологии в банках – 2006», программа которого предполагает всестороннее обсуждение проблемы внедрения в деятельность российских банков данного подхода.

Наше решение о совершенствовании образовательного процесса, нацеленного на потребности бизнеса, основано на ряде положений.

1. В условиях отсутствия технопарков (нестоличные вузы), отсутствия крупных корпораций, проявляющих инициативу участия в образовательном процессе и заинтересованных в постоянном притоке новых специалистов высокого уровня

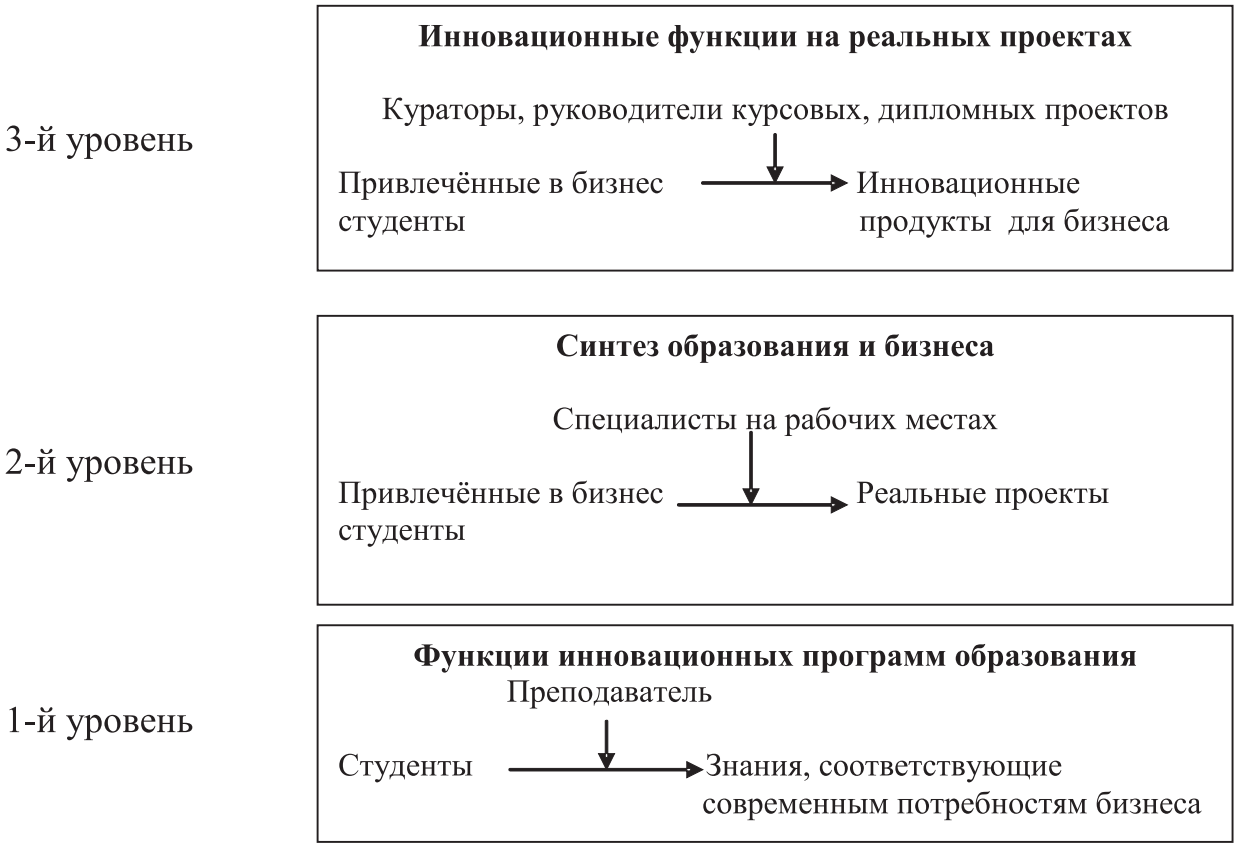


Рис. 2. Функциональная структура технологии совершенствования образовательного процесса

возможный и, может быть, наиболее реальный на данный момент времени способ наращивания профессиональной компетенции лежит на пути организации взаимовыгодного сотрудничества вузов и ИТ-компаний. Такое сотрудничество возможно через организацию профессиональных студенческих практик и через договорную систему на временной основе. Во время массовых отпусков коммерческие организации наиболее остро нуждаются в дополнительных сотрудниках, и студенты вполне могут в это время рассматриваться как временная помощь в поддержании оптимального рабочего процесса. Это и будет реальным участием в реальных проектах, что принесёт студентам дополнительные неакадемические знания и профессиональную заинтересованность в них со стороны работодателя как в «наученном», «доведённом» до конкретного рабочего места, потенциальном работнике.

Таким образом, вузы для организации подготовки высококвалифицированных специалистов получат возможность определить квалификационные требования к современным ИТ-специалистам, получить материал в качестве консультаций при формировании учебных планов обучения, соответствующих требованиям современной ИТ-индустрии, и организовать профессиональные студенческие практики.

2. Если рассматривать указанный способ сотрудничества с бизнесом, то отвлечённые таким образом от учебного процесса студенты вынуждены больше заниматься самостоятельно. Здесь должен на помощь прийти вуз, предоставив возможность своим студентам получать лекционный материал через систему дистанционного обучения; вовлечённые в бизнес студенты смогут «идти в ногу» с ходом учебного процесса.

3. Одним из способов наращивания профессиональной компетенции является и практическое обучение на реальных информационных технологиях. Как пример – внедрение информационной банковской системы RS-bank (фирмы “R-Style Softlab”) в качестве учебной по предмету «Информационные системы в банковском деле» для специальности 351400 «Прикладные системы (в экономике)» в ВятГГУ.

Фактически через описанный инструментарий реализуются функции технопарков на уровне конкретного вуза, в рамках конкретной ИТ-специальности. Функциональную схему данной технологии представим следующим образом (см. рис. 2).

Таким образом, без весомых материальных и временных затрат и не дожидаясь государственных решений вопроса качества образования, уже сегодня можно ставить цель не столько дать студентам конкретные технические знания в аудитории, сколько способствовать развитию их кругозора и формированию общего представления о состоянии и перспективных направлениях развития важнейших технологий в бизнесе, что позволит поднять на более высокую ступень профпригодность выпускников.

Примечания

1. http://pcweek.ru/?ID=618305 [Электронный ресурс].

2. Инновационные программы и их роль в повышении уровня подготовки специалистов: м-лы Междунар. науч.-метод. конф. 16–19 октября 2006 года. СПбГУТ [Текст]. СПб., 2006.

3. Там же.

4. http://adhoceducation.blogspot.com/2006/07/state-education-institutions-in-russia.html [Электронный ресурс].

5. http://pcweek.ru/?ID=618608 [Электронный ресурс].

6. Инновационные программы и их роль в повышении уровня подготовки специалистов...

Е. В. Котельников, М. Л. Ямшанов

МЕТОД SUPPORT VECTOR MACHINE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КЛАССИФИКАЦИИ

В статье рассматривается перспективное направление в области анализа данных и искусственного интеллекта – SVM (Support Vector Machine). Описываются математические основы метода, кратко рассматриваются алгоритмы обучения SVM, указываются области применения.

Постановка задачи

Классификация – распределение объектов по заранее заданным классам в зависимости от общих признаков. В литературе часто употребляются синонимы термина «классификация», например, «распознавание образов» (Pattern Recognition) или «категоризация текстов» (Text Categorization) в зависимости от прикладной области.

Приведем формальную постановку задачи классификации. Для простоты будем считать, что имеется всего два класса. Пусть заданы:

• множество X обучающих объектов, заданных векторами (векторы будем обозначать жирным шрифтом) признаков: $X=\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_N\}$, $X \subset R^d$ (X является подмножеством евклидова пространства размерности d);

• множество Y ответов для обучающих объектов: $Y=\{y_1, y_2, ..., y_N\}$, $y_i \in \{-1, +1\}$ (два класса).

Тогда задача классификации состоит в построении такого алгоритма A (решающего прави-

КОТЕЛЬНИКОВ Евгений Вячеславович – старший преподаватель, зав. кафедрой информатики и МОИ ВятГГУ

ЯМШАНОВ Михаил Львович – заместитель директора ФГУП НИИ СВТ по научной работе

© Котельников Е. В., Ямшанов М. Л., 2007

ла, функции), который каждому вектору $\mathbf{X}_i$ (i=1..N) сопоставляет правильный ответ y_i, то есть A: X → Y. В дальнейшем построенный алгоритм должен применяться для классификации произвольного вектора **X**, о классовой принадлежности которого ничего неизвестно.

Довольно наглядна геометрическая интерпретация задачи. На плоскости заданы два множества объектов (кружков, заштрихованных и пустых). Требуется найти уравнение кривой $f(x_1,x_2)=0$, разделяющей эти множества (рис. 1).

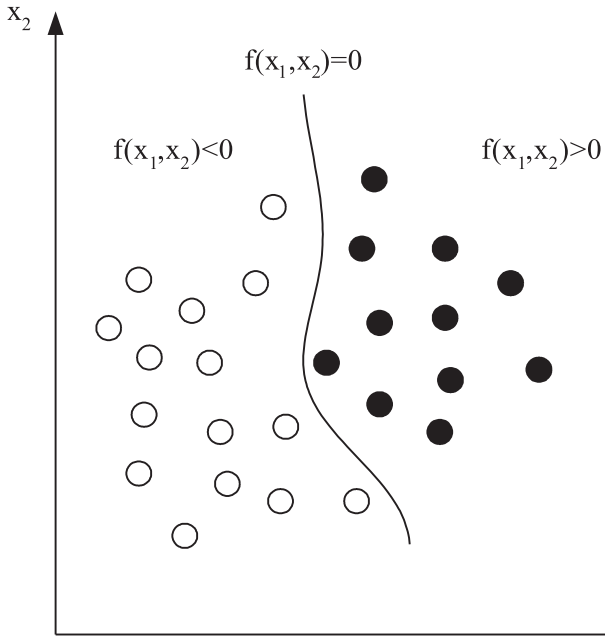


Рис. 1. Геометрическая интерпретация задачи классификации

При этом для всех заштрихованных кружков-объектов должно выполняться неравенство $f(x_1,x_2)>0$, а для всех пустых – неравенство $f(x_1,x_2)<0$.

Метод SVM

Современная теория классификации включает в себя подходы и методы из различных областей науки: статистики, теории измерений, систем искусственного интеллекта. Во второй половине XX в. было разработано множество методов решения задач классификации, каждый из которых имеет свои достоинства, недостатки и традиционные области применения.

В 70-х гг. в СССР Владимиром Наумовичем Вапником и Андреем Яковлевичем Червоненкисом была разработана теория минимизации структурного риска [1, 2]. В свое время эта теория не нашла (почему-то) в нашей стране широкого применения и, как уже часто случалось, только после переезда В. Н. Вапника в США, в начале 90-х гг. метод классификации под новым названием Support Vector Machine (SVM, машина опорных векторов) получил признание и стал активно развиваться [3, 4, 5].

Идея метода

Идея метода возникла из геометрической интерпретации задачи классификации. Пусть два множества точек можно разделить плоскостью (в двумерном пространстве – прямой). Тогда таких плоскостей будет бесконечное множество (см. рис. 2а).

Выберем в качестве оптимальной такую плоскость, расстояния до которой ближайших точек обоих классов равны (см. рис. 2б). Ближайшие точки-векторы называются *опорными*. Уравнение разделяющей плоскости для d-мерного пространства выглядит так:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_dx_d + w_0 = 0,$$

где d – размерность пространства признаков;

$\mathbf{W} = (w_1, w_2, ..., w_d)$ – направляющий вектор.

Или в векторной форме:

$$(\mathbf{W}, \mathbf{X}) + w_0 = 0.$$

Оптимизационная задача

Чтобы сформулировать соответствующую оптимизационную задачу, требуется проделать дополнительные построения и вычисления. Проведем через опорные векторы обоих классов параллельные плоскости (рис. 3) и потребуем, чтобы для опорных векторов выполнялось условие $(\mathbf{W}, \mathbf{X}_i) + w_0 = y_i$, а для всех обучающих векторов – условие:

$$(\mathbf{W}, \mathbf{X_i}) + w_0 \begin{cases} \le -1, \text{ если } y_i = -1 \\ \ge +1, \text{ если } y_i = +1 \end{cases}, \text{ или:}$$

$$y_i[(\mathbf{W}, \mathbf{X_i}) + w_0] \ge 1 .$$

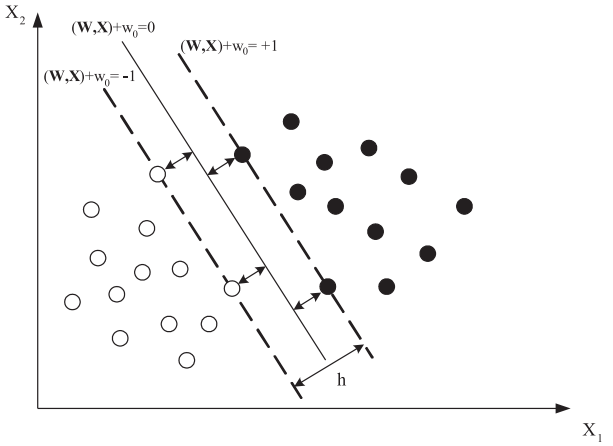


Рис. 3. Плоскости, образующие разделяющую полосу

Тогда ширина полосы, разделяющей опорные векторы, вычисляется по формуле:

$$h = \frac{2}{\|\mathbf{W}\|} = \frac{2}{\sqrt{(\mathbf{W}, \mathbf{W})}} = \frac{2}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + ... + w_d^2}},$$

где $\|\mathbf{W}\|$ – евклидова норма вектора **W**.

Для уверенного разделения объектов ширина полосы должна быть максимальной, а норма вектора W – минимальной. Оптимизационная задача формулируется следующим образом (переход к квадрату длины вектора **W** – технический прием, облегчающий дифференцирование при дальнейшем решении):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{W},\mathbf{W}) \to \min \\ y_i\left[(\mathbf{W},\mathbf{X}) + w_0\right] \geq 1,\ \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{N} \end{cases} \quad (1)$$

Это классическая задача квадратичного программирования при N ограничениях-неравенствах. Её решение известно [6, 7, 8, 9], однако требует хранения в памяти матрицы коэффициентов, размер которой пропорционален квадрату числа обучающих примеров N. При N порядка нескольких тысяч проблем не возникает, но часто в реальных задачах N имеет значения порядка 10^5 и даже 10^6, при таких N классические методы требуют большого объема памяти и становятся слишком медленными. Поэтому для решения задачи (1) разработаны несколько методов, учитывающих её специфику и не требующих таких огромных ресурсов. Эти методы будут обзорно рассмотрены в разделе «Алгоритмы обучения».

Виды разделяющих функций

В методе SVM применяется три вида разделяющих функций: линейные, линейные с мягкой границей и нелинейные. Рассмотрим эти виды и возникающие при этом оптимизационные задачи.

В случае линейной разделимости объектов обучающей выборки (рис. 2а) можно использовать линейную функцию классификации. При этом оптимизационная задача имеет вид (1). Для решения этой задачи используется теорема Куна-Таккера (в зарубежной литературе соответствующие условия называются условиями Каруша-Куна-Таккера – Karush-Kuhn-Tucker conditions), из которой следует, что решение (1) эквивалентно двойственной задаче поиска седловой точки функции Лагранжа (лагранжиана):

$$\begin{cases} L(\mathbf{W}, w_0, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\mathbf{W},\mathbf{W}) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left[y_i \left((\mathbf{W},\mathbf{X}_i) + w_0 \right) - 1 \right] \to \min_{\mathbf{W}, w_0} \max_{\boldsymbol{\lambda}}, \\ \lambda_i \geq 0,\ \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{N}, \\ \lambda_i = 0, \text{ или } y_i\left((\mathbf{W},\mathbf{X}_i) + w_0 \right) = 1,\ \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{N}. \end{cases} \quad (2)$$

где λ_i – множители Лагранжа.

Находя производные лагранжиана по **W** и w_0 и подставляя их в выражение (2), получаем:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_i \lambda_j y_i y_j \left(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \right) \to \max_{\boldsymbol{\lambda}}, \\ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i y_i = 0, \\ \lambda_i \geq 0,\ \mathrm{i} = 1,...,\mathrm{N}. \end{cases} \quad (3)$$

На практике чаще возникают задачи, когда объекты оказываются линейно не разделимы. Одним из способов построения разделяющей плоскости в этом случае является ослабление жестких условий и допущение ошибок классификации. В этом случае говорят, что разделяющая плоскость имеет «мягкую границу». При этом для каждого обучающего вектора вводится переменная ξ_i, обозначающая ошибку классификации на этом векторе. Мягкая граница означает, что допускается

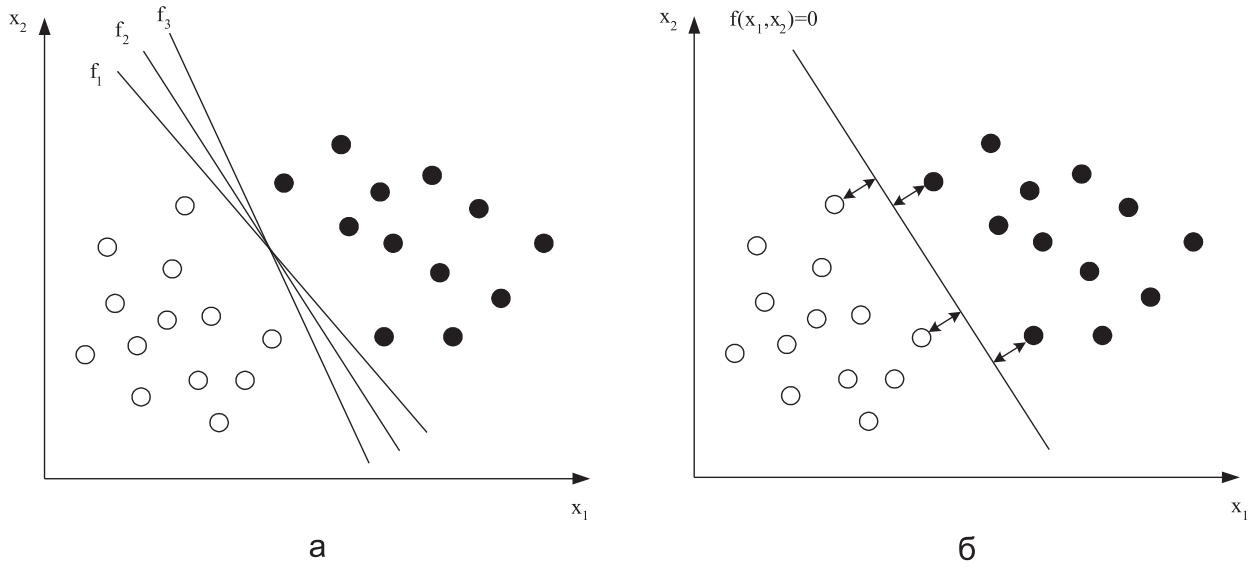


Рис. 2. Иллюстрация основной идеи SVM

попадание обучающих векторов в разделяющую полосу ($0<\xi_i<1$) и даже неправильная классификация вектора ($\xi_i>1$), однако метод стремится минимизировать суммарную ошибку. Математически это выражается в следующей системе:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{W},\mathbf{W})+C\sum_{i=1}^{N}\xi_i \to \min, \\ y_i\left[(\mathbf{W},\mathbf{X})+w_0\right]\geq 1-\xi_i,\ \mathrm{i}=1,...,\mathrm{N}, \\ \xi_i \geq 0,\ \mathrm{i}=1,...,\mathrm{N}. \end{cases} \quad (4)$$

Положительная константа C является управляющим параметром метода и позволяет находить компромисс между максимизацией разделяющей полосы и минимизацией суммарной ошибки.

Применяя теорему Куна-Таккера к системе (4), получаем следующую задачу квадратичного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\lambda_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j y_i y_j(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)\to \max\limits_{\lambda}, \\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i=0, \\ 0\leq\lambda_i\leq C,\ \mathrm{i}=1,...,\mathrm{N}. \end{cases} \quad (5)$$

Сравнивая (5) с (3), можно сделать вывод, что единственное отличие при нахождении линейной функции с мягкой границей от обычной линейной функции состоит в дополнительном ограничении $\lambda_i \leq C$.

Классификация объектов линейной функцией с мягкой границей иллюстрируется на рис. 4.

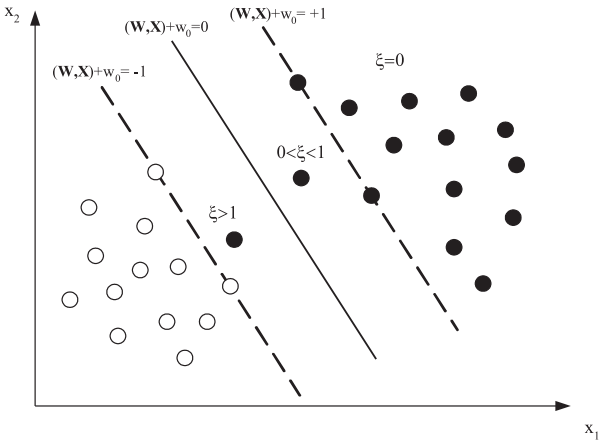


Рис. 4. Линейная функция с мягкой границей

Другим способом построения разделяющей плоскости в случае линейной неразделимости классов является применение нелинейной разделяющей функции. Для её нахождения из d-мерного пространства признаков D переходят в h-мерное пространство H большей размерности (h>d), в котором разделяющая функция уже становится линейной. Такой переход осуществляется преобразованием ϕ: D → H. При этом обучающие векторы $\mathbf{X}_i$ описываются векторами $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}_i)$ и скалярное произведение $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ заменяется на скалярное произведение $(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}_i), \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}_j))$. Произведение $(\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}_i), \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}_j))$ называется *ядром (kernel)* (или ядерной функцией) и обозначается $K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$.

В результате преобразования D → H в методе SVM единственным отличием по отношению к линейному случаю с мягкой границей является только замена скалярного произведения на ядро:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\lambda_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j y_i y_j K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)\to \max\limits_{\lambda}, \\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i y_i=0, \\ 0\leq\lambda_i\leq C,\ \mathrm{i}=1,...,\mathrm{N}. \end{cases} \quad (6)$$

Так как отображение ϕ явно не входит в выражение (6), то вместо ϕ можно сразу искать подходящее ядро. В SVM применяются ядра, удовлетворяющие условиям теоремы Мерсера, то есть симметричные и неотрицательно определенные (Понятие неотрицательной определенности см., например [7, с. 454]). Обычно применяются следующие виды ядерных функций:

1) полиномиальное ядро: $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+1)^p$;

2) гауссово ядро (радиальная базисная функция, RBF): $K(\mathbf{x},\mathbf{y})=e^{-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2}{2\sigma^2}}$;

3) сигмоидальное ядро: $K(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \tanh(k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}-\delta)$.

Выбор ядра в каждом конкретном случае, так же как параметров ядра и константы C, не формализован и осуществляется эмпирически.

Проиллюстрировать применение нелинейных разделяющих функций можно на следующем примере. Рассмотрим задачу классификации, представленную на рис. 5.

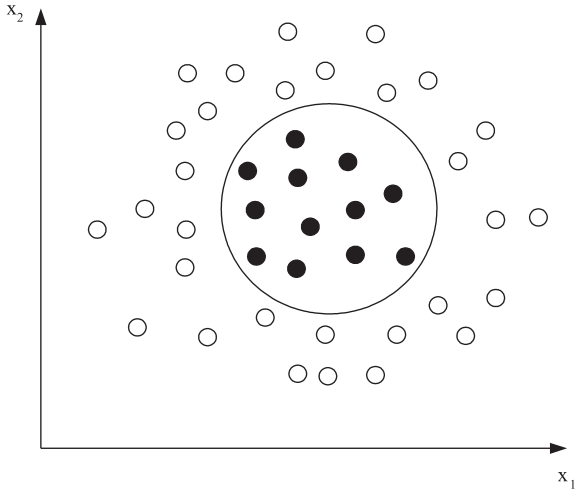


Рис. 5. Задача классификации для нелинейного случая

Очевидно, что линейно разделить обучающие примеры невозможно. Воспользуемся полиномиальным ядром $K(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})^2$. Найдем для такого ядра преобразование ϕ.

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2 = (x_1y_1 + x_2y_2)^2 = (x_1y_1)^2 + (x_2y_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 \quad (7)$$

Выражение (7) представимо в виде скалярного произведения в трехмерном пространстве:

$$(x_1y_1)^2 + (x_2y_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 = \left((x_1^2, x_2^2, \sqrt{2}x_1x_2), (y_1^2, y_2^2, \sqrt{2}y_1y_2)\right).$$

Таким образом, преобразование f имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 = x_1^2 \\ \varphi_2 = x_2^2 \\ \varphi_3 = \sqrt{2}x_1x_2 \end{cases}$$

Это преобразование соответствует переходу из двумерного пространства в трехмерное и показано на рис. 6. При этом в трехмерном пространстве множество обучающих примеров становится линейно разделимым (функция классификации описывается плоскостью).

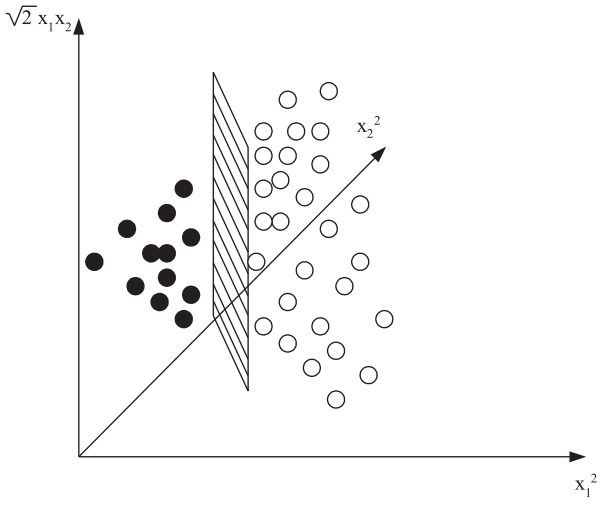


Рис. 6. Линейная разделимость в трехмерном пространстве

Можно доказать, что если обучающее множество содержит N примеров, то всегда найдется пространство размерности не более N, в которой это множество является линейно разделимым.

Алгоритмы обучения

Обучение SVM сводится к решению задачи квадратичной оптимизации с предельными ограничивающими условиями и одним ограничением линейного равенства. Несмотря на то что существуют успешные методы решения подобных задач, при обучении SVM следует учитывать множество факторов. В частности, многие стандартные методы решения задач квадратичного программирования технически непригодны для задач обучения текстовых SVM-классификаторов, поскольку требуют слишком длительного времени обучения и больших объемов памяти для вычислений.

Привести четкую классификацию алгоритмов обучения SVM достаточно сложно, ввиду большого количества различных подходов. Можно выделить несколько больших групп методов.

Первую группу составляют традиционные методы решения оптимизационных задач, которые применяются в общем случае и для обучения искусственных нейронных сетей. Применительно к SVM данные методы используются, когда количество обучающих примеров относительно невелико (до 4000–5000). К этой группе относятся различные методы поиска седловой точки функции Лагранжа – методы Ньютона, квазиньютоновские методы, методы сопряженных направлений и др. (первым для обучения SVM был предложен метод сопряженных градиентов [10]). В настоящее время достаточно популярен градиентный алгоритм Kernel-Adatron [11].

Вторую большую группу составляют методы обучения SVM, идея которых основана на разбиении одной большой задачи на ряд подзадач. Первый подход по разбиению больших задач обучения SVM на серии меньших задач оптимизации был предложен в [3]. Он известен как алгоритм «образования фрагментов» (chunking). Алгоритм начинает со случайного подмножества обучающих данных, решает эту задачу и многократно добавляет примеры, которые нарушают условия оптимальности. В [12] был предложен метод декомпозиции, который разбивает оптимизационную задачу на неактивную и активную части (так называемый «рабочий набор»). Главным преимуществом данного метода является то, что он предлагает алгоритмы с требованиями памяти, которые линейны относительно количества обучающих примеров и количества опорных векторов. Данный алгоритм, усовершенствованный в части оптимизации выбора рабочего набора и кэширования данных, применяется в популярной программе SVMLight [13]. В группе методов декомпозиции наиболее эффективен на сегодняшний день алгоритм последовательной минимальной оптимизации (Sequential Minimal Optimization, SMO), предложенный Платтом [14]. Его можно рассматривать как предельный случай алгоритма декомпозиции, размер рабочего набора в котором всегда равен 2, а для поиска оптимального рабочего набора используется набор эвристик.

Ко второй группе можно отнести и методы, основанные на аппроксимации гессенской матрицы (матрицы частных производных функции Лагранжа) с помощью более мелких матриц, используя или низкоуровневое представление ([15])

или выборку/дискретизацию ([16, 17]), тем самым уменьшая размер задачи оптимизации и ускоряя процесс обучения.

Третью группу составляют методы обучения, основанные на вычленении из большого набора входных данных тех векторов, которые являются опорными, поскольку только они определяют оптимальное решение оптимизационной задачи для SVM. Такой подход используется, например, в [18, 19, 20]. Сюда же можно отнести и так называемые инкрементные методы обучения, которые предполагают последовательное обучение SVM на новых данных при удалении всех предыдущих данных за исключением их опорных векторов [21], [22]. Преимуществом инкрементных методов является возможность быстрого переобучения SVM при появлении новых данных.

Приведенная выше классификация методов обучения SVM является достаточно условной и, возможно, неполной, поскольку существуют и другие алгоритмы (например, вероятностный SVM [23]). В то же время она дает представление о многообразии методов обучения SVM, которые постоянно совершенствуются и развиваются.

Среди указанных методов не существует наилучшего. Каждый из них имеет «свой» набор данных, на котором он показывает оптимальные результаты. Задача исследователя или разработчика – выбрать из имеющихся методов наилучший для данной области.

Применение

В заключение укажем несколько наиболее распространенных областей применения метода SVM и его модификаций.

1. Машинное зрение – распознавание лиц и других объектов на фотографиях и видеоизображении, задачи идентификации.

2. Классификация текстов – тематическая классификация веб-страниц, поиск в Интернете, фильтрация электронной почты от спама.

3. Распознавание рукописных символов – на тестовом наборе из 60000 рукописных цифр, созданном в американском институте NIST (National Institute of Standards and Technology), метод SVM показал наименьшее число ошибок (0,56%) по сравнению с нейронными сетями и статистическими методами.

4. Биоинформатика – анализ генетических цепочек, определение аминокислотной последовательности белков и др.

5. Анализ временных последовательностей – распознавание аномального трафика в компьютерных сетях.

Таким образом, метод SVM в настоящее время находит применение в актуальных сферах Computer Science и смежных областей. В то же время метод продолжает привлекать внимание исследователей, особенно в таких аспектах как разработка новых алгоритмов обучения, построение правил выбора ядерных функций и их параметров, создание методов многоклассового SVM.

Примечания

1. *Вапник, В. Н.* Теория распознавания образов [Текст] / В. Н. Вапник, А.Я. Червоненкис. М.: Наука, 1974.

2. *Вапник, В. Н.* Восстановление зависимостей по эмпирическим данным [Текст] / В. Н. Вапник. М.: Наука, 1979.

3. *Boser, B. E.* A training algorithm for optimal margin classifiers [Electronic resource] / B. E. Boser, I. M. Guyon, V. N. Vapnik. In Proceedings of the 5th Annual ACM Workshop on Computational Learning Theory, p. 144–152, ACM Press, 1992. http://citeseer.ist.psu.edu/boser92training.html.

4. *Cortes, C.* Support Vector Networks [Electronic resource] / C. Cortes, V. Vapnik. Machine Learning 20(3): p. 273–297, 1995. http://citeseer.ist.psu.edu/cortes95supportvector.html

5. *Vapnik, V. N.* The Nature of Statistical Learning Theory [Electronic resource] / V. Vapnik. Springer-Verlag, 1995. http://books.google.com

6. *Карманов, В. Г.* Математическое программирование [Текст] / В. Г. Карманов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

7. *Таха, Х.* Введение в исследование операций [Текст] : в 2 кн. Кн. 2 / Х. Таха. М.: Мир, 1985.

8. *Бертсекас, Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.

9. *Онегов, В. А.* Исследование операций. Задачи, методы, алгоритмы [Текст] / В. А. Онегов. Киров: Изд-во ВГПУ, 2001.

10. *Burges, C.* A new method for constructing artificial neural networks [Electronic resource] / C. Burges, V. Vapnik. Technical report, AT&T Bell Laboratories, May 1995. http://research.microsoft.com/users/cburges/pubs.htm

11. *Campbell, C.* The Kernel Adatron Algorithm: A Fast and Simple Learning Procedure for Support Vector Machines [Electronic resource] / C. Campbell, T.-T. Frie, N. Cristianini. *15th International Conference Machine Learning,* Morgan Kaufman, 1998. http://citeseer.ist.psu.edu/friess98kerneladatron.html

12. *Osuna, E.* An improved training algorithm for support vector machines [Electronic resource] / E. Osuna, R. Freund, F. Girosi. In the Proceedings of IEEE NNSP'97, Amelia Island, FL, 24–26 Sep., 1997. http://citeseer.ist.psu.edu/osuna97improved.html

13. *Joachims, T.* Making large scale SVM learning practical [Electronic resource] / T. Joachims. In Advances in Kernel Methods Support Vector Learning, B. Schqlkopf, A. Smola, eds., MA: MIT Press, Cambridge, 1998. www.cs.cornell.edu/People/tj/publications/joachims_99a.ps.gz.

14. *Platt, J.* Sequential Minimal Optimization: A Fast Algorithm for Training Support Vector Machines [Electronic resource] / J. Platt. 1998. http://www.recognition.mccme.ru/pub/papers/SVM/smoTR.pdf.

15. *Fine, S.* Ef client SVM training using low-rank kernel representations [Electronic resource] / S. Fine, K. Scheinberg. Journal of Machine Learning Research, 2, p. 243–264, 2001. www.research.ibm.com/people/r/rameshg/fine-eurospeech2001.ps.

16. *Williams, C. K. I.* Using the nystrom method to speed up kernel machines [Electronic resource] / C. K. I. Williams, M. Seeger. In T. K. Leen, T. G. Diettrich, V. Tresp, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 13. MIT Press, 2001. www.dai.ed.ac.uk/homes/ckiw/postscript/nynips2.ps.gz.

17. *Achlioptas, D.* Sampling techniques for kernel methods [Electronic resource] / D. Achlioptas, F. McSherry, B. Schqlkopf. In S. B. Thomas, G. Dietterich, Z. Ghahramani, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 14, 2002. www.cs.ucsc.edu/~optas/papers/kpca.pdf.

18. *Boley, D.* Training Support Vector Machine using Adaptive Clustering [Electronic resource] / D. Boley, D. Cao. SIAM International Conference on Data Mining, 2004, April 22 – April 24, Lake Buena Vista, FL, USA. www.siam.org/meetings/sdm04/proceedings/sdm04_012.pdf.

19. *Shin, H.* Fast pattern selection for support vector classifiers [Electronic resource] / H. Shin, S. Cho. In K.-Y. Whang, J. Jeon, K. Shim, J. Srivastava, editors, PAKDD, volume 2637 of Lecture Notes in Computer Science, p. 376–387. Springer, 2003. www.springerlink.com/index/HDF9TXPHCQCN1A4X.pdf.

20. *Keerthi, S. S.* A fast iterative nearest point algorithm for support vector machine classifier design [Electronic resource] / S. S. Keerthi, S. K. Shevade, C. Bhattacharyya, K. R. K. Murthy. IEEE Transactions on Neural Networks, 11(1), January, 2000. http://citeseer.ist.psu.edu/keerthi99fast.html.

21. *Cauwenberghs, G.* Incremental and decremental support vector machine learning [Electronic resource] / G. Cauwenberghs, T. Poggio. In Proceedings Advances in Neural Information Processing Systems, Vancouver, Canada, 2000. bach.ece.jhu.edu/pub/gert/svm/incremental/nips00_inc.ps.gz

22. *Fung, G.* Incremental Support Vector Machine Classification [Electronic resource] / G. Fung, O. L. Mangasarian. SDM, 2002. http://citeseer.ist.psu.edu/fung01incremental.html

23. *Fung, G.* Proximal support vector machine classifiers [Electronic resource] / G. Fung, O. L. Mangasarian. In F. Provost, R. Sricant, editors, Proceedings KDD-2001: Knowledge Discovery and Data Mining. August 26–29, 2001, San Francisco, CA, p. 77–86, New York, 2001. ftp://ftp.cs.wisc.edu/pub/dmi/tech-reports/01-02.ps.

О. В. Ланшакова

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА ПРОЕКТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ»

В статье описано изучение дисциплины «Компьютерная анимация» с помощью метода проектов на факультете технологии и дизайна. Раскрыты особенности изучения для специальностей «Дизайн среды» и «Полиграфический дизайн».

ЛАНШАКОВА Ольга Викторовна – ассистент кафедры прикладной информатики ВятГГУ
© Ланшакова О. В., 2007

В настоящее время информационные технологии все больше охватывают различные сферы нашей жизни. В связи с широкими возможностями моделирования различных процессов и наглядностью представления результатов компьютеры широко используются в дизайне. При создании электронных моделей газет, журналов, архитектурных сооружений и т. д. специалисты данной области применяют различные средства компьютерной графики и анимации. Дизайнер, использующий в своих работах видеоклипы, находится в более выигрышной ситуации по сравнению с теми, кто представляет свой проект лишь в виде статических изображений. Все это обусловливает ведение дисциплины «Компьютерная анимация» на специальностях «Полиграфический дизайн» и «Дизайн среды».

Наилучшим вариантом изучения данной дисциплины является метод проектов, так как он стимулирует интерес к поставленной проблеме, личную заинтересованность в приобретении знаний, которые пригодятся в дальнейшей профессиональной деятельности. Итоговым заданием является web-сайт или модель здания. Следовательно, по способу преобладающей деятельности метод проектов – практико-ориентированный [1]. При решении поставленной задачи студенты используют знания и умения, полученные не только на дисциплине «Компьютерная анимация», но и из других курсов.

На первом занятии преподаватель знакомит студентов с содержанием дисциплины, с методом проектов и требованиями, предъявляемыми к выполнению итогового задания. Студенты выбирают тему своей работы (для специальности «Дизайн среды» – модель здания, а для «Полиграфического дизайна» – web-сайт). Проект каждый выполняет индивидуально.

На занятиях изучается только компьютерная анимация, все остальное студенты изучают самостоятельно или используют знания, полученные на других дисциплинах. Заключительным этапом является итоговая конференция, на которой происходит защита проектов.

Рассмотрим особенности использования метода проектов на специальностях «Полиграфический дизайн» и «Дизайн среды».

Специалист «Дизайна среды» создает трехмерные модели зданий, парков, архитектурных сооружений в программах AutoCAD и ArchiCAD, а их визуализацию осуществляет с помощью 3D Studio Max. Несколько ракурсов съемки не могут передать полной картины работы. Поэтому необходимо создавать видеоклипы, которые в полной мере раскрывают созданный проект. Хорошо подготовленный презентационный ролик позволяет почувствовать глубину пространства помещения, красоту парка, целостность архитек-

турного комплекса и т. д. В связи с вышесказанным для направления «Дизайн среды» на дисциплине «Компьютерная анимация» нужно подробно изучить возможности трехмерной анимации в 3D Studio Max.

На первом занятии раскрываются содержание дисциплины и требования, предъявляемые к выполнению заданий. Предлагаются следующие темы: модель учебного заведения, музея, театра, жилого здания и т. д.

После выбора темы студенты должны самостоятельно изучить государственные стандарты планировки зданий и прилегающих к нему территорий. На их основе они будут создавать свой проект. Подробные модели зданий студенты могут выполнять в AutoCAD или ArchiCAD, в дальнейшем импортируя в 3D Studio Max, или же сразу создавать в последнем. При создании проекта учащиеся должны раскрыть свои знания стилевых направлений и законов композиции.

Целесообразно сначала изучить двухмерную анимацию в растровом и векторном графических редакторах на основе программ Adobe Image Ready и Corel R.A.V.E., а после этого перейти к 3D Studio Max.

Самым популярным редактором растровой графики является Adobe Photoshop, а векторной – Corel Draw. Эти программы студенты изучают на дисциплине «Компьютерная графика». В пакете Adobe существует программа Image Ready по созданию gif-анимации, являющаяся приложением Photoshop. Для Corel Draw аналогом является Corel R.A.V.E. Сначала студенты изучают создание анимации в Adobe Image Ready, Corel R.A.V.E. по инструкциям. А после самостоятельно проводят исследование возможностей и недостатков анимации в растровом и векторном графических редакторах на основе изученных программ.

В программе 3D Studio Max нужно изучить следующие темы [2]:

– общие сведения об анимации, средства управления анимацией, настройка временных интервалов;

– создание и воспроизведение анимации, просмотр клипов с помощью модуля RAM Player;

– редактирование ключей анимации в строке треков;

– контроллеры и ограничители анимации;

– анимация связанных объектов;

– анимация с учетом реальной динамики движений;

– имитация динамики жестких, мягких тел, тканей, нитей, воды, волос;

– видеомонтаж.

К концу изучения материала курса у студентов должна быть создана модель здания, причем проектировать нужно не только его внешний вид, но и внутренние стены, лестничные проемы, как будет оформлена прилегающая территория.

Используя знания, полученные на данной дисциплине, студенты создают видеоролик в 3D Studio Max строительства здания от фундамента до крыши, рекламу, где показан проект со всех сторон, в разное время суток, используя анимацию во всех изученных программах.

Отчетную документацию по проекту нужно оформить в виде презентации в программе PowerPoint, которую студенты изучают самостоятельно по материалам, предложенным преподавателем.

В отчетной документации должна быть раскрыта тема проекта, представлены чертежи и Государственный стандарт проектировки здания, перечислены используемые при строительстве материалы, гиперссылки на видеоролик и рекламу.

На последнем занятии проводится конференция, на которой студенты защищают свои проекты.

Специалист «Полиграфического дизайна» будет оформлять журналы, газеты, сайты. Свои проекты он будет создавать в двухмерных графических редакторах, следовательно, анимацию он будет использовать тоже двухмерную. Поэтому для данного направления по дисциплине «Компьютерная анимация» акцент нужно сделать на двухмерную анимацию. В связи с этим будут изучаться программы: Adobe Image Ready, Corel R.A.V.E., Ulead Gif Animator, Ulead Cool 3D, Macromedia Flash.

На первом занятии проводится вводная конференция, на которой студенты выбирают тему web-сайта. При его создании студенты должны применить не только знания, приобретенные в курсе «Wed-дизайн», но и знание законов живописи, рисунка и композиции.

Как и для специальности «Дизайн среды», на занятиях рассматривается только компьютерная анимация. Изучение программ Adobe Image Ready, Corel R.A.V.E. проводится аналогично.

Далее рассматривается Ulead Gif Animator. С помощью этой программы создаются баннеры в сети. Хотя на смену Ulead Gif Animator пришел Macromedia Flash, большинство веб-дизайнеров и веб-разработчиков не спешат от нее отказаться [3]. По созданию анимации она очень схожа с Adobe Image Ready.

После изучения Gif Animator имеет смысл рассмотреть еще одну программу фирмы Ulead Systems – Ulead Cool 3D, которая предназначена для создания трехмерных текстов и кнопок для веб-сайта. После изучения Ulead Cool 3D студенты самостоятельно проводят исследование ее достоинств и недостатков и как последние устраняются с помощью Ulead Gif Animator [4].

В настоящее время в Интернете очень много сайтов, разработанных с привлечением средств Macromedia Flash. Поэтому на рассмотрение этой программы имеет смысл отвести большую часть учебного времени. При изучении Macromedia Flash нужно раскрыть следующие темы [5]:

– знакомство с программой, импортирование векторной и растровой графики;

– трассировка импортированной растровой графики в векторную;

– работа с текстовой информацией;

– создание различных видов анимации;

– создание элементов управления (кнопки, меню) для интерактивной анимации;

– озвучивание ролика;

– знакомство с языком Action Script, использование его в работе;

– создание библиотеки изображений, клипов, кнопок и сценариев;

– создание формы для ввода данных пользователем.

После изучения материала дисциплины студенты добавляют в web-сайт баннеры, трехмерный текст, кнопки, используя знания, полученные на данной дисциплине. Отчетная документация осуществляется в виде презентации. На последнем занятии студенты защищают свою работу.

Метод проектов развивает у студентов самостоятельность, творчество, умение применять знания из разных областей для решения практических задач. Это ведет к формированию более квалифицированного специалиста, востребованного в современном обществе.

Примечания

1. *Загрекова, Л. В.* Теория и технология обучения [Текст] : учеб. пособие для студ. пед. вузов / Л. В. Загрекова, В. В. Николина. М.: Высш. шк., 2004. 157 с.; Новые педагогические и информационные технологии в системе образования [Текст] : учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. квалиф. пед. кадров / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина, М. В. Моисеев, А. Е. Петров; под ред. Е. С. Полат. М.: Изд. центр «Академия», 1999. 224 с.

2. *Маров, М. Н.* 3ds max. Реальная анимация и виртуальная реальность [Текст]. СПб.: Питер, 2006. 415 с.; *Маров, М. Н.* Энциклопедия 3ds max 8 [Текст]. СПб.: Питер, 2006. 1392 с.

3. *Надеждин, О. А.* Основы компьютерной анимации [Текст] / О. А. Надеждин. М.: Майор, 2004. 416 с.

4. Там же.

5. Электронная школа Macromedia Flash MX [Электронный ресурс]. http://www.lebedeva.freenet.kz/index.htm.

А. В. Лялин

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

В статье раскрывается понятие исследовательской задачи, определяется её место в иерархии задач и требования к ней. А также приводится конкретный пример – известная головоломка о Ханойских башнях, имеющая практически *неисчерпаемый* исследовательский потенциал.

Способность быть учеником выше и достойнее, чем способность быть учителем
М. Мамардашвили

Необходимость и проблематичность исследовательской деятельности в школе

Образование, построенное исключительно на *усвоении* конкретных знаний, умений и навыков, исчерпало себя. В неопределенном и развивающемся мире такое образование, как бы обширно оно не было, быстро устаревает. Формально воспринятая система ЗУНов, без умения и готовности думать и исследовать, пригодна в весьма ограниченных и охраняемых условиях, но бесполезна в новых ситуациях. Понимание этого факта нашло отражение в современных педагогических идеях. Основной акцент здесь смещается на *развитие* творческих способностей и интеллекта учеников.

Прежде всего это теории *проблемного* обучения как на общедидактическом уровне (И. Я. Лернер, М. И. Махмутов, А. М. Матюшкин, В. Оконь), так и на уровне частных методик (Ю. М. Колягин, Г. Д. Балк и М. Б. Балк, Д. Пойа, Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий). Целью проблемного обучения является не столько трансляция *готовых* выводов науки, сколько прохождение самого пути познания. Прежнюю деятельность «без проб и ошибок», «по примеру» сменяет исследовательская деятельность. Ошибка и творческая активность поощряются.

Итак, с одной стороны, прогрессивные педагогические концепции, с другой – практика массовой школы. И во многом они противоречат друг другу. Творчество *сложно* вписывается в стандарты образования и классно-урочную систему. Школа же, выполняя социальный заказ, готовит грамотного *исполнителя*. Развитие творческих способностей в таких условиях может быть лишь *случайным*. Обществу и государству удобен человек «с заданными свойствами», но «важнейшая задача *цивилизации* – научить человека

ЛЯЛИН Андрей Васильевич – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ
© Лялин А. В., 2007

мыслить» (Т. Эдисон). Тем не менее компромисс необходим... и возможен.

Так, монография [1] С. М. Окулова является попыткой ответить на вопрос о том, как *в рамках* массовой школы при обучении информатике, в частности программированию, *создать условия* для развития интеллекта и научного творчества. Основная идея автора – организация *нелинейной* среды обучения посредством *технологии* и *содержания* обучения. Тем самым достигается *соответствие* между двумя нелинейными средами – интеллектом и обучением, что ведёт к развитию первого.

Основа нелинейности *технологии* – *компьютер*. Это инструмент, который позволяет приблизить обучение к реальному процессу научного познания. Ученик выдвигает гипотезы и экспериментирует. Компьютер объективно указывает на ошибки. Учитель направляет поиск. Основа нелинейности *содержания* – система задач по *программированию*, позволяющая каждому ученику найти «своё» и двигаться по индивидуальному пути в освоении материала.

Наибольшая же неопределённость заложена в *исследовательских* задачах. Помноженная на нелинейность работы с компьютером, она даёт максимальный эффект в развитии интеллекта и творчества. Однако количество таких задач в учебниках очень мало. Методика их рассмотрения не проработана. Сделаем *небольшой* шаг в этом направлении.

Исследовательская задача и требования к ней

В педагогической литературе наряду с термином «исследовательская задача» используются такие термины, как «эвристическая задача», «творческая задача», «нестандартная задача», «проблемная задача», «проблемно-поисковая задача». Каждый из них имеет свои смысловые оттенки, но в основном они синонимичны.

Охарактеризуем, что *мы* понимаем под исследовательской задачей. Для этого сначала определим её место в иерархии задач.

1. Решение **стандартной** задачи легко осуществить с помощью *шаблонного* правила, повторив известный алгоритм, быть может, с *незначительными* изменениями. Такие задачи, конечно, необходимы, в своё время и в нужном количестве. Но замкнутость исключительно на них ведёт к ситуации, когда учащиеся не желают и не умеют самостоятельно работать, стремятся не к мысли, а к разложенной «по полочкам» информации, боятся неопределённости условия и вариативности решения.

2. Напротив, **нестандартная** задача порождает интеллектуальный конфликт, *самостоятельный* поиск решения, *непосредственно* не следующего из изученного материала, открытие *субъективно* нового. Например, к ним можно отнести такие задачи по программированию. *Не используя* условного оператора, найти количество чётных из четырёх данных чисел. *Дана* некоторая программа. Что она вычисляет? *Имеется* несколько вариантов программы, реализующих, скажем, бинарный поиск. Определить, какой их них верный.

3. *Особое* положение среди нестандартных отведём **исследовательской** задаче, которая предполагает *максимальное* приближение к научному творчеству и процессу познания, имеет широкий творческий потенциал.

Более конкретно, это задача, удовлетворяющая следующим требованиям.

1. ***(глубина)*** В основе лежит глубокая (сквозная, *фундаментальная*) идея, богатый подтекст, оригинальный *метод* решения.

Глубина и красота идеи притягивают, ведут за собой исследование. Роль эстетического чувства, которое направляет сам поиск решения, отмечали не раз многие учёные. Творческий успех в любой деятельности не может быть достигнут одним интеллектом и расчётом. «Сущее не делится на разум без остатка» (Гёте). Требуется вся личность, включая и умение видеть красоту и руководствоваться ей.

Кроме того, это позволяет учащимся приобщаться к настоящей науке, её основам, к тому, что останется при любых обстоятельствах неизменным.

2. ***(вариативность)*** Возможны несколько решений, обращение задачи, различные вариации, обобщения, другие приложения той же идеи, смежные идеи, самостоятельное придумывание новых задач, выбор оптимального решения.

Тем самым открывается богатое поле для исследования, появляется возможность каждому ученику конструировать для себя проблемы.

Эта деятельность, по М. А. Холодной [2], развивает так называемое дивергентное мышление – способность развертывания мысли по множеству разнообразных путей, что является важнейшей частью творчества. Важна и противоположная способность, направленная на выбор единственного варианта – конвергентность. Успешность познания зависит от гармоничности взаимодействия этих двух составляющих. Если доминирует конвергентная составляющая, то ученик не может собрать полную информацию, так как его действия с объектом слишком стереотипны. Если же доминирует дивергентная составляющая, то ученик теряется, «тонет» в лавине информации, будучи не в состоянии её осмыслить. Программирование как процесс упорядочивания информации, способствует гармонизации данных интеллектуальных способностей.

3. ***(научный метод)*** В поисках решения *активно* используются методы «взрослой» науки,

такие, как постановка вопроса, гипотеза, наблюдение, моделирование, эксперимент, доказательство, обобщение, аналогия. Ведущая роль принадлежит догадке, а не авторитету известных правил.

Творческое мышление и научное познание связывают обычно не столько с решением уже поставленной кем-то задачи, сколько со способностью самостоятельно увидеть и сформулировать проблему, выдвинуть гипотезу, проверить догадку и т. д. Таких возможностей школьное образование практически не предоставляет.

В частности, «специалисты с высокой методической подготовкой разработали задачи, и учащимся осталось только одно – их решать. Но это означает, что последние оказались выключенными из самого первого и очень важного акта мышления, у них нет условий и возможностей учиться самим ставить проблемы и формулировать специальные вопросы. Налицо явная ущербность в развитии мыслительной культуры» [3, с. 292–293]. Программирование может восполнить этот пробел. Здесь необходимо постоянно ставить вопросы об ограничениях на данные, об оптимальности программы, проверять её работоспособность на достаточно полной системе тестов.

4. ***(стимул)*** Формулировка и суть задачи интересны учащимся, осмысленны и естественны, а не болезненно искусственны и абстрактны.

Задача становится исследовательской, *только* если ученик принял её как значимую для себя, ценную, интересную. «Тот, кто знает науку, уступает тому, кто находит в ней удовольствие» (Конфуций).

5. ***(оптимальная трудность)*** Задача не слишком легка, но и не слишком трудна, поддерживает исследовательское напряжение, но и не подрывает веру в свои силы.

«Сопротивление» и сложность познаваемого материала – необходимое условие возникновения интереса и развития. Так, Л. В. Занков [4], исходя из того, что преодоление препятствий способствует интеллектуальному росту, ввел в свою дидактическую систему принцип обучения на высоком уровне трудности. «Всегда старайтесь работать настолько близко к границе ваших способностей, насколько это возможно. Поступайте так потому, что это единственный способ эту границу определить и отодвинуть», – писал Э. Дейкстра.

Заметим, что последние два требования субъективны, зависят от того, *кто* и *кому* преподаёт. Первые три требования являются объективными и работают на усиление неопределённости, нелинейности задачи, расширяя окрестность исследования. Каждое из них необходимо, а все вместе они, по нашему мнению, исчерпывают понятие исследовательской задачи.

Конкретный пример. Задача о Ханойских башнях

Известную задачу о Ханойских башнях [5] в *полной* мере можно назвать исследовательской. Далее мы *очень схематично*, но делая ссылки, обозначим основные направления работы с задачей, по ходу изложения подтверждая её статус исследовательской.

Итак, дано три стержня. На первый стержень нанизаны n дисков разных размеров, в порядке их уменьшения. Необходимо переложить диски на третий стержень, соблюдая следующие правила:

- за раз можно переносить лишь *один* диск;
- больший диск запрещается помещать на меньший.

Требование (стимул), очевидно, соблюдается. Правила головоломки просты и естественны. Если к тому же сопроводить «игрушку» непременной легендой о конце света [6], то интерес учащихся обеспечен, задача «продана».

Начиная работу над решением, естественно дать ученикам просто немного поэкспериментировать, перенося один, два, три диска. Итогом обсуждения должен стать следующий рекурсивный алгоритм. Запишем его сразу в виде программы.

Пусть a – номер начального стержня, b – номер конечного стержня, тогда номер вспомогательного стержня, при их нумерации *1, 2, 3*, вычисляется по формуле *6-a-b*.

```
procedure HanoiRec (n, a, b:Byte);
begin
  if n>0 then begin
     HanoiRec(n-1, a, 6-a-b);
     writeln(n,' / ',a, " --> ",b);
     HanoiRec(n-1, 6-a-b, b);
  end;
end;
```

Данный алгоритм в случае башни из n дисков требует ровно $2^n - 1$ перекладываний. Доказывается методом математической индукции [7].

Обнаруживает себя требование (глубина). Рекурсия и математическая индукция – фундаментальные идеи информатики и математики.

Вроде бы задача решена. Рекурсивно. Просто и элегантно. И можно было бы поставить точку, но остаётся один важный вопрос. Как же всё-таки реально перекладывать диски, когда головоломка у нас в руках? Не выполнять же на листе бумаги трассировку рекурсии? Открывается *новое* поле исследований – «расколдовывание» рекурсии и поиск итеративных алгоритмов.

Для итерации необходима какая-нибудь закономерность в перемещении дисков. А всё, что у нас есть – это рекурсивная программа, *исправно* выдающая решения. Вполне достаточно.

И *первый*, очевидный, путь обнаружения закономерностей – это исследование готовых результатов [8]. Программа воспринимается здесь как «чёрный ящик». Запустим её, скажем, при *n=4* и заполним *таблицу*: столбики 3 и 5 – с помощью программы, а столбики 2, 4 и 6 – вручную. Наблюдаем практически по всем параметрам, по максимуму – обидно будет проглядеть что-нибудь закономерное.

Свободный стержень – это тот, который не участвует в данный момент в перемещении дисков. А раскладка дисков показывает место пребывания каждого диска, начиная с наибольшего (см. таблицу).

Столбики *3* и *6* обнаруживают явную периодичность. Однако любые выводы по таблице *без доказательства* остаются только правдоподобными, и не более того. Основа слишком зыбкая, чтобы опираться на неё.

Предложим более перспективный путь. Откроем «чёрный ящик» программы – взглянем помимо готовых результатов и на логику выполнения рекурсивного алгоритма. Шаг неизбежный, если не брать на веру «табличные» догадки. Вырастим с этой целью *дерево перемещений* – назовём его так. А по сути «размотаем» до конца все цепочки рекурсивных вызовов. Опять же, для примера, *n=4*. Каждая вершина содержит номера исходного и принимающего стержней и номер перемещаемого диска (рис. 1).

Итак, для перемещения *4* дисков с *1-го* стержня на *3-й* необходимо сначала переложить *пирамиду* из *3* дисков с *1-го* стержня на вспомогательный *2-й – левое поддерево*; затем *4-й диск* с *1-го* стержня на *3-й – вершина*, и, наконец, *пирамиду* из *3* дисков со *2-го* стержня на *3-й – правое поддерево*. Действия в левой и правой вершинах не могут быть выполнены сразу. И поддеревья продолжают рас-

Номер перемещения (*i*)	Двоичное представление *i*	Номер диска (*d*)	Номер перемещения диска с номером *d*	Перемещение (номера стержней)	Номер свободного стержня	Раскладка дисков
1	000**1**	1	**первое**	1? 2	3	111**2**
2	00**1**0	2	первое	1? 3	2	11**3**2
3	001**1**	1	**второе**	2? 3	1	113**3**
4	0**1**00	**3**	первое	1? 2	3	1**2**33
5	010**1**	1	**третье**	3? 1	2	123**1**
6	01**1**0	2	второе	3? 2	1	12**2**1
7	011**1**	1	**четвёртое**	1? 2	3	122**2**
8	**1**000	**4**	первое	1? 3	2	**3**222
9	100**1**	1	**пятое**	2? 3	1	322**3**
10	10**1**0	2	третье	2? 1	3	32**1**3
11	101**1**	1	**шестое**	3? 1	2	321**1**
12	1**1**00	**3**	второе	2? 3	1	3**1**11
13	110**1**	1	**седьмое**	1? 2	3	331**2**
14	11**1**0	2	четвёртое	1? 3	2	33**2**2
15	1111	1	**восьмое**	2? 3	1	333**3**

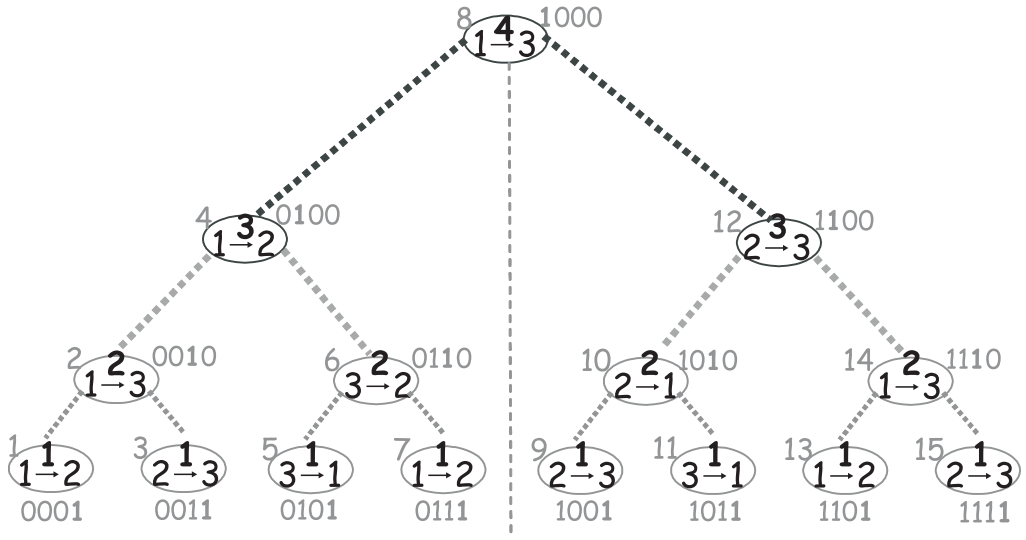


Рис. 1

ти. Остановка, очевидно, произойдёт на вершинах, представляющих тривиальные задачи по перемещению единственного первого диска.

Вообще, для вершины с пометкой $a \xrightarrow{d} b$ вершина левого поддерева имеет пометку $a \xrightarrow{d-1} (6-a-b)$, а вершина правого поддерева – $(6-a-b) \xrightarrow{d-1} b$. Вспомним, что $6-a-b$ – номер дополнительного стержня.

Всё легко строится вручную. В результате получаем дерево, обход которого *слева направо* и даёт искомую последовательность перемещений. На рисунке рядом с каждой вершиной проставлен номер, соответствующий такому обходу, а заодно его двоичное представление (быть может, и здесь обнаружится закономерность).

Дерево это, очень правильное и симметричное, – главный источник вдохновения на пути к итерационным алгоритмам. Рекурсия здесь – как на ладони. Многие закономерности перемещения дисков буквально бросаются в глаза. Но более того, *наглядно* объясняются! – мы *видим* структуру и динамику решения задачи, чего не скажешь о «бесструктурной» и статичной таблице.

Уже сейчас дерево перемещений и таблицу можно отдать «на откуп» учащимся. Устроить конкурс на поиск закономерностей. Для сильных с доказательством. После подвести итоги и *доказать* все полученные догадки.

Налицо требование (научный метод). Ученики ставят перед собой вопросы, экспериментируют, наблюдают, высказывают гипотезы, доказывают.

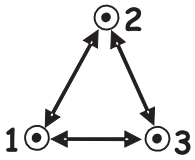


Рис. 2

1. Сколько перемещений совершает каждый диск? Чему равно общее число ходов? Диск n перемещается один раз, диск $n-1$ два раза, ..., первый диск 2^{n-1} раз. В общем виде, диск i перекладывается 2^{n-i} раз. Отсюда и общее число ходов $1+2+2^2+...+2^{n-1}= 2^n-1$.

2. Есть ли закономерность в очерёдности стержней для каждого диска? Любой из дисков *сохраняет* направление перемещения по стержням. Если расположить стержни в вершинах треугольника, то диск всегда движется либо по часовой стрелке 1-2-3-1-2-3, либо против 1-3-2-1-3-2.

3. Как направление перемещения диска зависит от количества дисков? Диски с той же чётностью, что и диск n, и перемещаются в том же направлении. Остальные диски перемещаются в противоположном направлении.

4. Как часто и в каком направлении перемещается первый диск? Каждое нечётное перемещение – это перемещение наименьшего *первого* диска. Он движется по часовой стрелке 1-2-3-1-2-3 при *чётном* количестве дисков, и против 1-3-2-1-3-2 – при *нечётном*.

5. Есть ли закономерность в очерёдности номеров для свободного стержня? Как эта очерёдность зависит от количества дисков? *Свободный* стержень, не участвующий в данный момент в перемещении дисков, также движется в одном и том же направлении. По часовой стрелке 2-3-1-2-3-1 – при не*чётном* количестве дисков, и против 3-2-1-3-2-1 – при *чётном*.

7. Как без рекурсии построить последовательность перемещаемых дисков? Посмотрим на последовательности перемещаемых дисков в случае $n=1,2,3,4$. Имеем **1**, 1**2**1, 121**3**121, 12131214121**3**121. Несложно догадаться, как получить последовательность для $n=5$. Повторим два раза последовательность для $n=4$, разделив оба экземпляра пятёркой: 12131214121312**5**12131214121**3**121. Далее поступаем аналогично. В общем виде процесс достраивания следующей последовательности из предыдущей можно записать как $S_1 = 1$, $S_n = S_{n-1} \cup n \cup S_{n-1}$.

8. Как часто перекладывается любой из дисков? На каком шаге начинается перемещение диска и через сколько шагов повторяется? Так, первый диск перемещается каждый нечётный ход, то есть номера его ходов получаются как $2 \cdot k + 1$. Вообще, если посмотреть на дерево, любой диск d начинает своё перемещение на 2^{d-1} шаге, а каждое следующее совершает через $2 \cdot (2^{d-1} - 1) + 1 = 2^d - 1$ шагов, другими словами, номера перемещений диска d имеют вид $(2 \cdot k + 1) \cdot 2^{d-1}$, где $k = 0, ..., 2^{n-d} - 1$.

На этом, пожалуй, и остановимся. Дерево перемещений и таблица сыграли свою роль. Всё сказано, остаётся только творчески применить этот пока сырой материал. Начинается очередной этап исследования. Требуется чётко сформулировать, а затем запрограммировать алгоритмы. Учителю отводится роль помощника, он ненавязчиво направляет поиск. Вот что может получиться в результате такой работы, *плюс* возможные комбинации.

Алгоритм № 1. Бинарный поиск [9]. Дерево перемещений можно обойти как рекурсивно, так и итеративно. Рекурсивный обход слева направо *в точности* повторяет приведённое рекурсивное решение. Итеративный алгоритм следующий.

Не храня дерево в памяти, проводим бинарный поиск каждой вершины от 1 до 2^n-1. Начало поиска – всегда корневая вершина. Для неё *известны* номера стержней и диска, а также *способ* определения этих номеров при переходе к вершинам левого и правого поддеревьев. Например, для вершины с номером 10 на первом шаге

переходим от корневой вершины 8 к её *правому* поддереву – вершине 12, так как 12 *больше* 8. На втором шаге от вершины 12 к ее *левому* поддереву – искомой вершине 10, так как 10 *меньше* 12. При переходе к левому (правому) поддереву конечный (начальный) стержень заменяется вспомогательным, а номер перемещаемого диска уменьшается на единицу.

Алгоритм № 2. Наименьший диск [10,11]. Используется закономерность 4. Перемещаем сначала наименьший диск, затем не наименьший, наименьший, не наименьший и т. д. Наименьший диск всегда движется по часовой стрелке при *чётном* количестве дисков, и против – при не*чётном*. На следующем шаге диск перемещается между стержнями, не занятыми наименьшим диском. Какой из них начальный, а какой – конечный определяется однозначно в соответствии с текущим состоянием башен. Ведь, по правилам, запрещается помещать больший диск на меньший. И так, пока на третьем стержне не соберётся полная башня.

Алгоритм требует непосредственного моделирования башен и перемещений дисков. С этой целью можно выбрать двумерный массив 3*N, в строках которого хранить списки дисков для каждого стержня.

Алгоритм № 3. Свободный стержень [11]. Используется закономерность 5. Аналогичный предыдущему алгоритм.

Алгоритм № 4. Номер хода [8, 10]. Оказывается, всю необходимую информацию можно «выжать» лишь из номера хода. Закономерность 8 даёт возможность найти номер перемещаемого на *данном* шаге диска и число его перекладываний *к данному* моменту, а далее закономерности 2 и 3 – номера исходного и принимающего стержней.

Алгоритм № 5. Последовательность перемещаемых дисков. Используются закономерности 7 и 4. Восстановим последовательность перемещаемых дисков из последовательностей меньшей размерности по рекуррентному соотношению $S_1 = 1, S_n = S_{n-1} \cup n \cup S_{n-1}$. Алгоритм с наименьшим диском упрощается. Вместо двумерного массива теперь достаточно иметь одномерный массив Loc, указывающий текущее положение каждого диска. Пусть на очередном шаге перемещается диск *d*. Если это не наименьший диск, то его начальный стержень *Loc[d]*, а конечный – *6-Loc[d]-Loc[1]*.

Алгоритм № 6. Двоичное представление номера хода. Используются закономерности 8, 2 и 3. Заведём для двоичного представления номера хода массив *BitS*. Первоначально это одни нули. На каждом следующем шаге длинное двоичное число увеличивается на единицу. При этом позиция, в которой происходит смена *0* на *1*, и определяет перемещаемый в данный момент диск.

Не будем повторяться и изменим также способ вычисления исходного и принимающего стержней. Следующий стержень диска – стержень, отличный от его старого и текущего положения. Если хранить их для каждого диска *d* в массивах *OldLoc* и *Loc*, то *d* перемещается со стержня *Loc[d]* на стержень *6-OldLoc[d]-Loc[d]*.

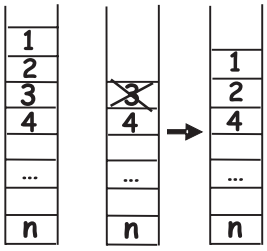


Рис. 3

Алгоритм № 7. Трюк со стеком. Последовательность перемещаемых дисков 121 **3** 121 **4** 121 **3** 121... также легко получить с помощью стека. Первоначально в стек помещаем числа *n,...,2,1* так, чтобы *1* находилась в вершине. На каждом следующем шаге извлекаем из него верхнее число *i* и добавляем последовательно числа *i–1, i–2,...,1*. При *i=1* ничего не добавляем. И так, пока не опустошим стек. Очевидно, извлекаемые числа и дают искомую последовательность.

Алгоритм этот достаточно трудоёмок, требует выполнения непосредственных операций со стеком. Существует более эффективный и оригинальный способ, эмитирующий стековую логику с помощью массива длиной *n+1* [12, с. 196–202].

Алгоритм № 8. Таинственная программа. Приведённая ниже программа представляет собой очередное итеративное решение Ханойских башен. Цель – разобраться, как же она работает. Сразу скажем, предстоит не больше не меньше – решить головоломку о головоломке.

```
{при нечётном n перемещает n дисков с 1-го стержня на 3-й, при чётном – с 1-го стержня на 2-й,
номер перемещаемого при каждом ходе диска не выводится}
procedure HanoiBit1(n: LongInt);
    var i: LongInt;
begin
    for i:=1 to 1 shl n –1 do
    writeln ( (i and (i-1)) mod 3+1, " –-> ",
                (i or (i-1)+1) mod 3+1);
end;
{добавляем поправочный множитель, и при любом
n диски перемещаются с 1-го стержня на 3-й,
кроме того, добавляем формулу для вычисления
номера перемещаемого диска}
procedure HanoiBit2 (n: LongInt);
    var p, i: LongInt;
```

```
begin
  p:=(n+1) and 1+1;
  for i:=1 to 1 shl n −1 do
  writeln ( trunc(ln(i xor (i-1)) / ln(2))+1, ‘ / ’,
          (i and (i-1))*p mod 3+1, “ −−> “,
          (i or (i-1)+1)*p mod 3+1);
end;
```

Очень лаконично, но совсем не просто. Применяем к номеру шага несколько битовых операций – и вся необходимая информация *таинственным* образом готова к выводу.

Алгоритм № 9. Чётные-нечётные диски [10]. Первым ходом перемещается наименьший первый диск со стержня *1* на стержень *(n mod 2 + 2)*. Далее, пусть на предыдущем шаге был перемещен диск *d* со стержня *f* на стержень *t*. Тогда следующее перемещение будет между стержнями *f* и *6–f–t*, если *d* mod 2 = 1, иначе между стержнями *t* и *6–f–t*. Направление переноса однозначно определяется в зависимости от содержащихся на стержнях дисков. И так, пока все диски не окажутся на третьем стержне. Как объяснить этот алгоритм? Дополните одну из программ наглядным выводом башен и понаблюдайте за взаимным расположением дисков различной четности.

Алгоритм № 10. Стек или снова рекурсия [13]. Предположим, что Pascal не допускает обращение подпрограммы к самой себе. Как реализовать в таких условиях рекурсивный алгоритм? Заменим рекурсию стеком.

Исходная задача разбивается на три подзадачи, и важно не забыть, какие из них осталось выполнить и в каком порядке. Подходящая для этой цели структура данных – стек. В стек закладываем задания-тройки *(h, f, t)*, каждая из которых означает, что необходимо перенести *h* верхних дисков со стержня *f* на стержень *t*. В любой момент самое срочное задание находится в вершине, а ниже по порядку срочности расположены оставшиеся задания.

Первоначально в стек помещаем основную тройку – *(n, a, b)*. Далее извлекаем из него тройки. Если это заказ по переносу единственного диска, то выполняем его сразу. Иначе разбиваем заказ на три подзадачи и добавляем их в стек так, чтобы первоочередная была в вершине. И так, пока стек не окажется пустым.

Требование (вариативность) превосходит все ожидания. Задача оказалась удивительно богатой на итеративные решения. Наконец, соблюдается и требование (оптимальная трудность).

Кажется, что все ресурсы задачи в качестве исследовательской исчерпаны. Далеко нет. Так, в статье [14] Ханойские башни рассматриваются как комбинаторный объект: по номеру хода определяется соответствующее размещение дисков на стержнях и наоборот, по размещению – следующее и предыдущее размещения.

Кроме того, условие задачи включает достаточно много ограничений. Ослабляя одни, усиливая другие, заменяя правила, обобщая, мы можем получать многочисленные варианты старой головоломки, не уступающие ей в изяществе решений, а иногда и превосходящие. Рекурсия и на этом поле по-прежнему основной игрок, и действует она уже более тонко. Но это тема уже отдельного разговора [10, 11, 15, 16].

Примечания

1. *Окулов, С. М.* Информатика: Развитие интеллекта школьников [Текст] / С. М. Окулов. М.: Бином: Лаборатория знаний, 2005.
2. *Холодная, М. А.* Психология интеллекта: парадоксы исследования [Текст] / М. А. Холодная. СПб.: Питер, 2002.
3. *Юлов, В. Ф.* Мышление в контексте сознания [Текст] / В. Ф. Юлов. М.: Академический проект, 2003.
4. *Занков, Л. В.* Обучение и развитие [Текст] / Л. В. Занков. М.: Педагогика, 1975.
5. *Дагене, В.* 100 задач по программированию [Текст] / В. Дагене, Г. Григас, К. Аугутис. М.: Просвещение, 1993.
6. *Гарднер, М.* Математические головоломки и развлечения [Текст] / Г. Гарднер. М.: Мир, 1999.
7. *Рубанов, И. С.* Как обучать методу математической индукции? [Текст] / И. С. Рубанов // Математика в школе. 1996. № 1.
8. *Окулов, С. М.* Задача о Ханойских башнях (о неисчерпаемости задач) [Текст] / С. М. Окулов, Р. А. Веснин // Информатика и образование. 2003. № 10.
9. *Шалыто, А.* Ханойские башни и автоматы [Текст] / А. Шалыто, Н. Туккель, Н. Шамгунов // Программист. 2002. № 8.
10. *Арсак, Ж.* Программирование игр и головоломок [Текст] / Ж. Арсак. М.: Наука, 1993.
11. *Савин, А. П.* Ханойская башня [Текст] / А. П. Савин // Квант. 1991. № 11.
12. *Рейнгольд, Э.* Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика [Текст] / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. М.: Мир, 1980.
13. *Шень, А.* Программирование: теоремы и задачи [Текст] / А. Шень. М.: МЦНМО, 2004.
14. *Окулов, С. М.* Задача о Ханойских башнях как задача о комбинаторном объекте [Текст] / С. М. Окулов, Р. А. Веснин // Вестник ВятГГУ. 2005. № 3.
15. *Грэхем, Р.* Конкретная математика [Текст] / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. М.: Мир, 1998.
16. *Златопольский, Д. М. Новая старая* задача [Текст] / Д. М. Златопольский // Информатика. 1999. № 1.

А. В. Лялин

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА. ДВА УРОКА ОДНОЙ ЗАДАЧИ

В статье приведена одна теоретико-числовая конструкция, которая исторически возникла как чисто математическая, но в дальнейшем нашла применение в информатике. Этот факт используется для построения двух взаимосвязанных уроков, математики и информатики.

Наука не является и никогда не будет являться законченной книгой.

А. Эйнштейн

Больше приносит пользы рассмотрение одного и того же вопроса с десяти различных сторон, чем десяти вопросов с одной стороны.

А. Дистервег

Информатика выросла из математики. Многие идеи чистой математики, считавшиеся иногда практически бесполезными, получали второе дыхание в Computer Science. Так, криптография вернула «заоблачную» теорию чисел к решению практических задач.

В статье эта взаимосвязь математики и информатики показана на примере дерева Штерна-Броко. В первой части дерево Штерна-Броко рассматривается с точки зрения чистой математики, как способ выписать все несократимые дроби, доказываются некоторые его интересные свойства. И это материал для урока математики. Во второй части – с точки зрения информатики, как система счисления, решается проблема представления рациональных чисел в памяти компьютера. И это материал для урока информатики. Второй урок – продолжение и развитие идей первого.

1. Дерево Штерна-Броко на уроке математики

Дерево Штерна-Броко – замечательную математическую конструкцию – открыли независимо друг от друга в середине XIX в. немецкий *математик* Морис Штерн (1858) и французский *часовщик* Ахилл Броко (1860). Профессиональный математик Штерн решал возникшую в его работах теоретико-числовую задачу. Часовых дел мастер Броко решал практическую задачу, о соединении шестерёнок в часовых механизмах. Об этом подробнее читайте в [2] и [3]. Нас же интересует Морис Штерн. Его можно назвать математиком-теоретиком, который ищет свои задачи исключительно в теории. Так, в одной из своих статей он интересовался различными способами построения множества рациональных чисел. Самый простой способ выписать все положительные рациональные числа показан на рис. 1.

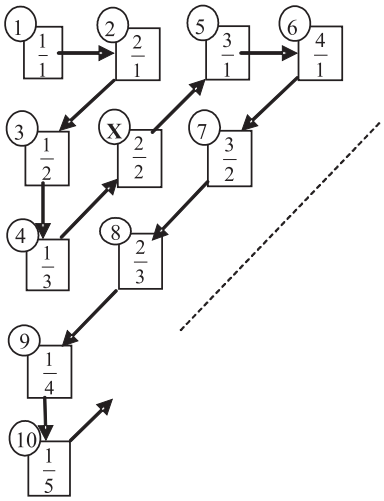


Рис. 1. Змейка

Установленный порядок обхода «змейкой» бесконечной таблицы гарантирует, что любое число будет выписано, при этом змейке приходится проглатывать числа, если они встречались ей раньше. Например, исключаются $2/2=1/1$. Единственное применение этой конструкции в математике – доказательство счётности множества положительных рациональных чисел, возможности «пересчитать», или пронумеровать их натуральными числами.

Но такая таблица порождает очень много лишних дробей. Возможно ли обойти этот недостаток? Штерн предлагает следующий *способ построения всех неотрицательных несократимых дробей*. В отличие от описанной «змейки» дроби здесь выстраиваются по возрастанию и не приходится заниматься лишней работой по исключению сократимых дробей.

Алгоритм такой: начиная с пары $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$, неограниченно повторяем процедуру вставки между любыми двумя соседними дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ их *медианты*, то есть дроби $\frac{m+m'}{n+n'}$, которую получаем раздельным сложением числителей и знаменателей «соседей» (подобно обычным *двоечникам*, складывающим дроби). Так, первый шаг добавляет одну дробь

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{1};\ \frac{1}{0},$$

ЛЯЛИН Андрей Васильевич – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ
© Лялин А. В., 2007

второй шаг – ещё две

$$\frac{0}{1}\,;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{1};\ \frac{2}{1};\ \frac{1}{0},$$

третий шаг – ещё четыре

$$\frac{0}{1};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{1};\ \frac{3}{2};\ \frac{2}{1};\ \frac{3}{1};\ \frac{1}{0}$$

и т. д...

Этот же процесс можно представить и в виде бесконечного двоичного дерева – дерева Штерна-Броко (рис. 2), где каждый уровень содержит *только новые* дроби, добавляемые с каждым шагом.

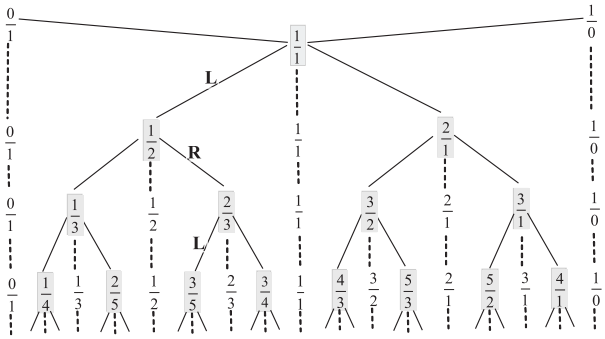


Рис. 2. Дерево Штерна-Броко

Изменили представление – переформулируем алгоритм. Используем традиционные для такого случая термины «вершина» и «предок». Начиная с $\frac{0}{1}$ в верхнем левом углу и $\frac{1}{0}$ в верхнем правом углу, записываем в каждую вершину дерева *медианту* ближайшего предка слева и ближайшего предка справа.

Оказывается, все дроби, «созревшие» на этом дереве, являются *несократимыми*. Никакая дробь не встречается дважды. Любая несократимая дробь рано или поздно «созревает». Ветви дерева «не переплетаются», сохраняя возрастающий порядок дробей на каждом уровне. Как результат дерево при неограниченном росте в точности совпадает с *упорядоченным* множеством *всех неотрицательных несократимых дробей*. Все эти замечательные факты имеют несложное объяснение.

Во-первых, покажем, что медианта $\frac{m+m'}{n+n'}$ двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ лежит где-то между ними. Не формально, «на пальцах» это можно сделать так. Пусть у n школьников есть m конфет, или по $\frac{m}{n}$ конфет на брата, а у других n' школьников есть m' конфет, или по $\frac{m'}{n'}$ конфет на каждого. При их встрече на $n+n'$ школьников придётся $m+m'$ конфет, или по $\frac{m+m'}{n+n'}$ на каждого. Понятно, что компания с меньшим количеством конфет на человека от такой встречи только выиграет, другая же проиграет – придётся делиться. То есть дробь $\frac{m+m'}{n+n'}$ будет лежать где-то между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$.

Если формально, на математическом языке, то так. Пусть $\frac{m}{n}<\frac{m'}{n'}$. Тогда $\frac{m'}{n'}-\frac{m}{n}>0$, $\frac{m'n-n'm}{n'n}>0$, $m'n-n'm>0$, и поэтому

$$\frac{m+m'}{n+n'}-\frac{m}{n}=\frac{(m+m')n-(n+n')m}{(n+n')n}=\frac{m'n-n'm}{(n+n')n}>0,$$

то есть медианта больше дроби $\frac{m}{n}$. Аналогично, показывается, что она меньше дроби $\frac{m'}{n'}$.

Следовательно, при построении дерева Штерна-Броко с помощью медиант сохраняется порядок дробей и появление одной и той же дроби в двух разных местах невозможно.

Во-вторых, докажем, что если $\frac{m}{n}<\frac{m'}{n'}$ – последовательные дроби на любом шаге их построения, то $m'n - n'm = 1$. Назовём дроби с таким свойством близкими. Начальные дроби $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$, конечно, близки. Кроме того, медианта $\frac{m+m'}{n+n'}$ двух близких дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$ близка к каждой из них. Между двумя близкими становится третий. И это проверяется простыми вычислениями: $(m + m')n - (n + n')m = 1$ и $(n + n')m' - (m + m')n' = 1$. Таким образом, в каждый момент построения дерева любые две последовательные дроби близкие.

Заметим также, что близкие дроби всегда несократимы. В самом деле, если, например, m и n имеют общий делитель $d \neq 1$, то и $m'n - n'm$ делится на d, что невозможно, ведь $m'n - n'm = 1$.

Следовательно, все дроби, «созревшие» на дереве Штерна-Броко, являются несократимыми.

Наконец, **в-третьих**, докажем, что если дробь $\frac{a}{b}$ лежит строго между двумя близкими дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{m'}{n'}$, то $a+b \geq m+n+m'+n'$. Действительно, условия $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}>0$ и $\frac{m'}{n'}-\frac{a}{b}>0$ означают, что $an-bm \geq 1$ и $bm'-an' \geq 1$. Поэтому $(m'+n')(an-bm)+(m+n)(bm'-an') \geq m'+n'+m+n$. А так как $m'n-n'm=1$, то это неравенство равносильно желаемому $a+b \geq m+n+m'+n'$.

Теперь мы можем ответить на последний вопрос: может ли какая-нибудь положительная несократимая дробь $\frac{a}{b}$ оказаться пропущенной деревом? Нет, и объяснение такое.

Вначале дробь $\frac{a}{b}$ лежит в промежутке $\frac{m}{n}=\frac{0}{1}<\frac{a}{b}<\frac{1}{0}=\frac{m'}{n'}$. Строим медианту $\frac{m+m'}{n+n'}$, и она делит этот промежуток на два. Если $\frac{m+m'}{n+n'}=\frac{a}{b}$, то наши поиски завершены, дерево достигло дроби. Иначе выбираем промежуток, в который попадает наша «неуловимая» дробь, стесняя её новыми границами $\frac{m}{n}<\frac{a}{b}<\frac{m'}{n'}$, и т. д. Такая погоня за дробью не может продолжаться бесконечно. На каждом шаге либо m, либо m', либо n, либо n' точно увеличиваются, сумма $m+n+m'+n'$ растёт. А так как $a+b \geq m+n+m'+n'$, то по крайней мере через $a+b$ шагов будет достигнуто равенство, очередная медианта совпадёт с искомой дробью.

Следовательно, любая несократимая дробь рано или поздно «созревает» на дереве Штерна-Броко.

Другие закономерности, затерявшиеся в ветвях дерева, предлагаем доказать самостоятельно.

Задача 1.1 Пусть h(a/b) – уровень, на котором находится дробь a/b. Докажите, что h(a/b)= h(b/a) и h(a/b+1)= h(a/b)+1.

Задача 1.2 Последовательность числителей на каждом из уровней дерева есть в точности последовательность знаменателей в обратном порядке. Докажите.

Задача 1.3 Определим функцию t от дроби a/b как t(a/b)=1/ab. Сумма значений этой функции от всех дробей на любом уровне дерева равна 1. Докажите.

Задача 1.4 Пусть дробь 1/1 представляет нулевой уровень дерева, дроби 1/2 и 2/1– первый уровень и т. д. Докажите, что сумма числителей или знаменателей всех дробей n-го уровня равна 3^n.

2. Дерево Штерна-Броко на уроке информатики

Построения всех неотрицательных несократимых дробей – интересная *теоретическая* задача, вызов нашему уму. Дерево Штерна-Броко – её оригинальное и красивое решение. Но какая практическая польза от этого? – спросит специалист прикладной математики или информатик. Не будем спешить с выводами.

Оказывается, дерево Штерна-Броко можно рассматривать и как систему счисления для представления рациональных чисел [1], ведь каждая положительная несократимая дробь встречается в нём, и только один раз. «Цифры» новой системы счисления – значки *L* и *R*, обозначающие выбор левой или правой ветви при движении вниз по дереву от корня *1/1* к заданной дроби. Так, дробь *3/5* представляется как строка *LRL*. Именно такой путь в дереве необходимо совершить, чтобы достичь её – вниз *влево* от *1/1* к *1/2*, затем *вправо* к *2/3*, и, наконец, *влево* к *3/5*.

Каждая положительная дробь получает при этом единственное представление в виде *конечной* строки символов *L* и *R*. А дробь *1/1* можно условиться обозначать пустой строкой.

Вспомним, что даже самые простые дроби в традиционных системах счисления (десятичной, двоичной), часто имеют бесконечное представление. Например, 1/3=0,33333... И приходится работать с приближениями. Представление же Штерна-Броко для любого рационального числа всегда конечно, а следовательно, точно. Можно сказать, что свойства чисел воспроизводятся здесь в *чистом виде* и нет никакой опосредующей связи с каким-либо определённым числом или числами, в отличие от обычных систем счисления, строго привязанных к своему основанию.

В статье [2] *упоминается*, что система счисления Штерна-Броко используется в векторной графике. Именно конечность и точность представления рациональных чисел делают привлекательным такое применение.

Ответим на два традиционных вопроса, возникающих при изучении любой системы счисления. Вопросы перевода. Как по заданной дроби a/b построить *LR*-строку и как по заданной *LR*-строке восстановить дробь a/b?

Алгоритм 1. Число → *LR*-строка.

Дроби в дереве упорядочены. Используя бинарный поиск, продвигаемся к дроби вниз по дереву и запоминаем каждый «поворот».

```
procedure NumToStr1 (a,b:LongInt; var s:String);
  var m,n, m1,n1, cm,cd: LongInt;
```

```
begin
  {поиск данной дроби начинаем в дереве,
  порождённом дробями 0/1 и 1/0}
  m:=0; n:=1;
  m1:=1; n1:=0;
  s:='';
  repeat
    {находим медианту – (m+m1)/(n+n1)}
    r:=b*(m+m1); l:=a*(n+n1);
   {если дробь меньше медианты, то переходим
   к левому поддереву, порождённому дробями
    m/n и (m+m1)/(n+n1)}
    if l<r then begin
      m1:=m+m1; n1:=n+n1;
      s:=s+'L'; {запоминаем направление
      перехода в строке}
    end
   {если дробь больше медианты, то переходим
    к правому поддереву, порождённому
    дробями (m+m1)/(n+n1) и m1/n1}
    else if l>r then begin
      m:=m+m1; n:=n+n1;
      s:=s+'R';
    end;
  until l=r; {пока дробь не совпадёт с очередной
  медиантой}
end;
```

Алгоритм 2. *LR*-строка → число.

На этот раз задача упрощается – закон построения ветви дерева, ведущей к заданной дроби a/b, известен. Остаётся только следовать этому закону. Последняя дробь на «выращенной» ветви и есть искомая дробь a/b.

```
procedure StrToNum1 (s:String; var a,b: LongInt);
  var i:Byte; m,n, m1,n1: LongInt;
begin
  {построение дроби начинаем с дробей 0/1 и 1/0}
  m:=0; n:=1;
  m1:=1; n1:=0;
  {просматриваем LR-строку, в соответствии
  с очередным символом переходим либо
  к левому поддереву, либо к правому}
  for i:=1 to length(s) do
  if s[i]='L' then begin
    m1:=m+m1; n1:=n+n1;
  end
  else begin
    m:=m+m1; n:=n+n1;
  end;
  a:=m+m1; b:=n+n1;
end;
```

Алгоритмы переводов построены. Однако некоторые *замечательные* свойства дерева Штерна-Броко позволяют найти более лаконичные и красивые алгоритмы.

Наблюдение 1. Поддерево с корнем *2/1*, в точности совпадает со всем деревом, если прибавить *1* к каждой вершине последнего. Объяснение индуктивное. Построение дерева начинается с дробей $\frac{m}{n}=\frac{0}{1}$ и $\frac{m'}{n'}=\frac{1}{0}$, а построения поддерева – с дробей, на единицу больших $\frac{m}{n}+1=\frac{1}{1}$ и $\frac{m'}{n'}+1=\frac{1}{0}$, то есть свойство «отличаться на *1*» справедливо первоначально. А так как пары дробей, отличные на 1, дают медианты, которые вновь отличны на 1, то свойство сохранятся и на всех шагах построения.

Наблюдение 2. Правое поддерево с корнем *2/1* можно получить, если симметрично отразить левое поддерево с корнем *1/2* и перевёрнуть его дроби. Верно и обратное. Также легко индуктивно доказать эту симметричность – она есть вначале для дробей *0/1*, *1/1* и *1/0* и сохраняется далее.

Введём необходимые обозначения. Пусть S – некоторая *LR*-строка. $f(S)$ – дробь, соответствующая S. $\overline{S}$ – строка, полученная из строки S её инвертированием, то есть заменой L на R и R на L. Например, $f(LRRL) = 5/7$, а $f(\overline{LRRL}) = f(RLLR) = 7/5$.

Переведём наши наблюдения на язык обозначений.

Наблюдение 1:

$$f(RS) = f(S) + 1 \text{ или } f(S) = f(RS) - 1 \qquad (1)$$

Наблюдение 2: $f(S)=\frac{1}{f(\overline{S})}$.

Откуда,

$$f(LS)=\frac{1}{f(\overline{LS})}=\frac{1}{f(R\overline{S})}=\frac{1}{f(\overline{S})+1}=\frac{1}{\frac{1}{f(S)}+1}=\frac{f(S)}{f(S)+1}$$

$$\text{или } f(S)=\frac{f(LS)}{1-f(LS)} \qquad (2)$$

Вот эти две формулы (1) и (2), подсказанные наблюдениями, и дают новые алгоритмы переводов.

Алгоритм 1′. Число → *LR*-строка.

Если $a>b$, то есть возможность применить (1), поскольку первым символом в представлении такой дроби всегда будет R, или $f(RS)=\frac{a}{b}$. Выводим R. Задача сводится к отысканию представления для дроби $f(S)=f(RS)-1=\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$.

Если же $a<b$, то есть возможность применить (2), поскольку первым символом в представлении такой дроби всегда будет L, или $f(LS)=\frac{a}{b}$.

Выводим *L*. Задача сводится к отысканию представления для дроби $f(S)=\frac{f(LS)}{1-f(LS)}=\frac{a/b}{1-a/b}=\frac{a}{b-a}$.

Продолжаем такой процесс получения очередного символа представления и сведения задачи к всё более простым дробям, пока это возможно. Очевидно, остановка алгоритма произойдёт при *a=b*.

Так, если *a/b=7/3*, то последовательно получаем:

a	**7**	**4**	1	1	1
b	3	3	**3**	**2**	1
LR-строка	R	R	L	L	

```
procedure NumToStr2 (a,b: LongInt; var s:String);
begin
   s:='';
   while a<>b do
   if a<b then begin
      b:=b-a; s:=s+'L';
   end
   else begin
      a:=a-b; s:=s+'R';
   end;
end;
```

Алгоритм 2′. *LR*-строка → число.

Формулы (1) и (2) позволяют решить и обратную задачу – задачу восстановления дроби *a/b* по заданной *LR*-строке.

Начинаем восстановление с дроби $f(S)=f('')=\frac{1}{1}=\frac{a}{b}$. *LR*-строку просматриваем символ за символом *справа налево*. Если очередной символ *R*, то применяем (1) (ф34). Если же очередной символ *L*, то применяем (2) $f(LS)=\frac{f(S)}{f(S)+1}=\frac{a/b}{a/b+1}=\frac{a}{a+b}$. И так пока не просмотрим всю строку. Последняя дробь и есть искомая.

Так, если *f*(*a/b*) = *RRLL*, то последовательно получаем:

Перевёрнутая *LR*-строка	L	L	R	R	
a	1	1	**1**	**4**	7
b	**1**	**2**	3	3	3

```
procedure StrToNum2 (s:String; var a,b:LongInt);
   var i:Byte;
begin
   a:=1; b:=1;
   for i:=length(s) downto 1 do
      if s[i]='L' then b:=b+a
      else a:=a+b;
end;
```

В заключение. Задача о бейсболисте [1].

Для оценки мастерства игроков в бейсбол существует коэффициент бэттера, который определяется как отношение числа удачных ударов к числу всех выходов на биту. Сколько раз, *по меньшей мере*, должен был выйти на биту бейсболист, коэффициент которого равен приближенно 0,334.

В переводе на математический язык для решения задачи нам необходимо найти дробь с *наименьшим* знаменателем в промежутке [0,3335; 0,3345) = $[\frac{667}{2000};\frac{669}{2000})$. Или в общем виде, в промежутке $[\frac{a1}{b1};\frac{a2}{b2})$.

А это можно сделать, просматривая штерно-броковские представления дробей $\frac{a1}{b1}$ и $\frac{a2}{b2}$ и останавливаясь непосредственно перед тем, как в первой из них встречается символ *L*, а во второй – символ *R*. Именно до этого момента пути к дробям *совпадают*, а после расходятся по сторонам. Дробь $\frac{a}{b}$, на которой происходит расхождение, – искомая.

Во-первых, $\frac{a}{b}$ лежит между $\frac{a1}{b1}$ и $\frac{a2}{b2}$. Во-вторых, $\frac{a}{b}$ имеет наименьший знаменатель среди всех дробей, лежащих в данном промежутке. Поскольку дроби эти – непосредственные или далёкие потомки дробей $\frac{a}{b}$. Им ещё *предстоит* появиться на дереве и, естественно, с большими числителями и знаменателями.

Например, для промежутка $[\frac{33}{142};\frac{48}{205}]$ получаем

$\frac{33}{142}$ = LLLLRRRL **L** LRR

$\frac{48}{205}$ = LLLLRRRL **R** RLLL

$\frac{a}{b}$ = LLLLRRRL = 7/30

Процедура решения задачи принимает следующий вид:

```
procedure MinMiddle1 (a1,b1, a2,b2:LongInt; var
a,b:LongInt);
   var i:Byte; s1,s2:String;
begin
   NumToStr (a1, b1, s1);
   NumToStr (a2, b2, s2);
   i:=1;
```

```
    while s1[i]=s2[i] do inc(i);
    StrToNum(Copy(s1,1,i-1), a,b);
end;
```

Для «бейсбольного» же примера в ответе имеем дробь $\frac{96}{287}$. И это означает, что бейсболист выходил на биту по меньшей мере *287* раз и *96* из них завершились удачно.

Однако процедура MinMiddle1 крайне несовершенна. Во-первых, она выполняет лишние вычисления – находит не участвующие в формировании ответа «хвосты» LR-представлений для дробей $\frac{a1}{b1}$ и $\frac{a2}{b2}$. Во-вторых, использование строк накладывает ограничение на входные данные. Так, LR-представление дроби $\frac{1}{311}$ требует 310 символов, а имеется только 255 – максимальная длина строки в Pascal.

Избавимся от этих недостатков. Объединим две процедуры NumToStr2 и StrToNum1 и не будем использовать строки в качестве промежуточных результатов.

```
procedure MinMiddle2 (a1,b1, a2,b2:LongInt; var
a,b: LongInt);
    var m,n, m1,n1: LongInt;
begin
    m:=0; n:=1;
    m1:=1; n1:=0;
    Repeat
        if a1<b1 then begin
            b1:=b1-a1; b2:=b2-a2;
            m1:=m+m1; n1:=n+n1;
        end
        else begin
            a1:=a1-b1; a2:=a2-b2;
            m:=m+m1; n:=n+n1;
        end;
    {пока в первой из дробей не встретится
    символ L, а во второй – символ R}
    Until (a1<b1) and (a2>b2);
    a:=m+m1; b:=n+n1;
end;
```

Попробуйте выполнить этот алгоритм на бумаге для промежутка $[\frac{33}{142};\frac{48}{205}]$. Потребуется восемь повторений цикла. Просматривается каждый символ *LR*-представлений дробей, по одному. Хотя делать можно более крупные шаги – просматривать *LR*-представления целыми группами символов. Количество шагов сокращается до трёх.

```
procedure MinMiddle3 (a1,b1, a2,b2: LongInt; var
a,b: LongInt);
    var m,n, m1,n1, k: LongInt;
begin
    m:=0; n:=1;
    m1:=1; n1:=0;
    Repeat
        if a1<b1 then begin
            k:=b2 div a2;
            b1:=b1- k*a1; b2:=b2- k*a2;
            m1:=m1+k*m; n1:=n1+k*n;
        end
        else begin
            k:=a1 div b1;
            a1:=a1- k*b1; a2:=a2- k*b2;
            m:=m+k*m1; n:=n+k*n1;
        end;
    Until (a1<b1) and (a2>b2);
    a:=m+m1; b:=n+n1;
end;
```

В таком виде алгоритм удобен и для ручного выполнения. Получаем следующую небольшую таблицу.

a1	*b1*	*a2*	*b2*	*m*	*n*	*m1*	*n1*	*k*
33	142	48	205	0	1	1	0	4
33	**10**	48	**13**	0	1	**1**	**4**	3
3	10	**9**	13	**3**	**13**	1	4	1
3	**7**	9	**4**	3	13	**4**	**17**	
a1<b1		*a2>b2*		*a=m+m1=7*		*b=n+n1=**30***		

Особенно разница в скорости между MinMiddle2 и MinMiddle3 заметна на промежутке $[\frac{667}{2000};\frac{669}{2000}]$. Старый алгоритм требует *97* повторений цикла. Новый же укладывается всего за три шага, которые легко выполнить и без компьютера. В общем, MinMiddle3 всегда быстрее MinMiddle2. За исключением некоторых вырожденных случаев, когда алгоритмы примерно равноценны. Это дроби типа LRLRLR...и RLRLRL..., или близкие к ним дроби, например LRRLLRLRL...

Задача 2.1. К сожалению, никаких практически осуществимых правил арифметических действий для LR-строк предложить нельзя. Но их можно сравнивать. Запрограммируйте способ сравнения двух чисел, записанных в системе счисления Штерно-Броко.

Задача 2.2. Выпишите в возрастающем порядке все дроби, лежащие в промежутке $[\frac{a1}{b1};\frac{a2}{b2}]$ и со знаменателями, не превосходящими данного числа *z*.

Примечания

1. *Грэхем, Р.* Конкретная математика [Текст] / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. М.: Мир, 1998.

2. *Кноп, К.* Недвоичная система [Текст] / К. Кноп // Домашний компьютер. 2001. № 8.

3. *Hayes, B.* On the Teeth of Wheels [Electronic recourse] / B. Hayes // American Scientist. Volume 88. Number 4. 2000.

И. В. Матанцев

О ПОИСКЕ ЭВРИСТИК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Проблема решения переборных задач – открытый вопрос в информатике. В статье на конкретном примере показано, как за счет поиска эвристик достичь результата при значительной размерности задачи и заданных временных ограничениях на решение.

В настоящее время, несмотря на прогресс в развитии производительности компьютеров, к нерешенным проблемам информатики относится проблема решения задачи большой размерности. Задачи, характеризующиеся этим свойством, решаются или приближенными методами, или находят из их особенностей ряд эвристик, позволяющих проводить эффективное отсечение ветвей перебора. Однако процесс поиска эвристик требует значительной аналитической деятельности. В работе на примере конкретной задачи показано, как осуществляется выявление эвристик из формулировки проблемы и методов её решения.

Задача о лабиринте является классической задачей информатики. Формулировка задачи проста. Есть клеточное поле, часть клеток занята препятствиями. Необходимо попасть из заданной клетки в другую заданную клетку путем последовательного перемещения по клеткам лабиринта. Решение данной задачи было предложено Э. Люка ещё в 1891 г. Решается задача перебором либо в глубину, либо в ширину (метод волны).

Обход в глубину предполагает следующие действия:

• в каждой клетке выбирается ещё не исследованный путь;

• если из исследуемой клетки нет неисследованных путей, возвращаемся на шаг назад.

Время работы в худшем случае O(n), где n – количество клеток.

Обход в ширину предполагает следующие действия:

• достаем клетку из очереди;

• просматриваем все соседние клетки, если есть не просмотренные свободные клетки, то заносим их в очередь.

Общее время работы алгоритма O(n), где n – количество клеток.

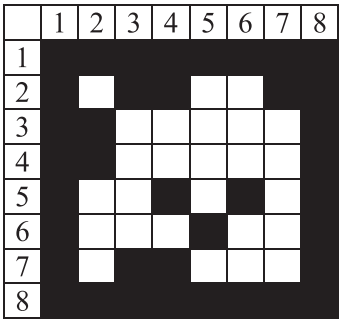
Рассмотрим несколько похожую задачу: есть закрытый лабиринт (по периметру лабиринта – препятствия), в котором находится формальный исполнитель, не знающий своего положения, который может перемещаться из клетки в соседние с ней и смотреть, свободна ли соседняя клетка. Требуется найти начальное положение, при этом постараться минимизировать количество операций анализа соседних клеток. Предполагается, что начальное положение однозначно для данного лабиринта. Ограничения на задачу: 1) лабиринт имеет размеры 200*200; время на решение задачи – 1 сек (см. http://www.ioi99.org.tr/tasks/under.html).

Решение

Построим множество S-клеток – кандидатов в начальное положение. Очевидно, что это множество будет состоять из свободных клеток лабиринта. Будем строить обход лабиринта и на каждом шаге обхода будем выбрасывать из множества S клетки, которые не будут удовлетворять полученному обходу на этом шаге. Обход продолжается до тех пор, пока в множестве S не останется одна клетка. Решение с обходом в ширину в худшем случае будет состоять из 40000*40000 операций, где первые 40000 – это обход в ширину (40000 клеток), а вторые 40000 – это работа с множеством S (проверка каждой вершины в множестве). $40000*40000 = 1.6*10^9$ операций. Современный компьютер осуществляет порядка 10^9 операций в секунду. Для выполнения алгоритма с обходом в ширину нам потребуется $1.6*10^9/10^9 = 1{,}6$ сек. Для ограничений задачи данный алгоритм не подходит. Те же рассуждения следуют и для обхода в глубину.

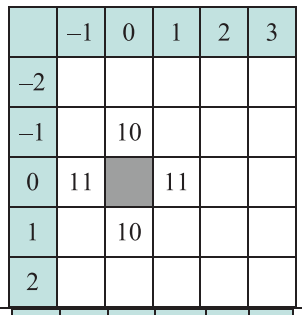
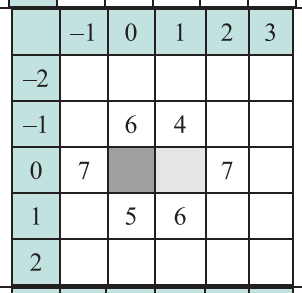
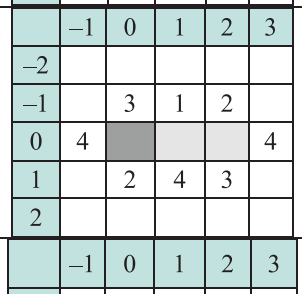
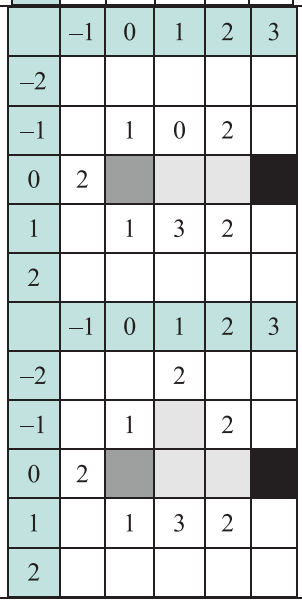
Ни один из известных алгоритмов не дает приемлемых результатов. Попробуем найти эвристику, с помощью которой решалась бы эта задача. Заметим, что в обоих обходах мы добавляем соседнюю клетку, из какой-то конкретной клетки, которая уже находится в обходе. Попробуем рассматривать все клетки, которые являются соседними со всеми клетками обхода. Это будет первая часть нашей эвристики. Второй частью эвристики будет критерий выбора клетки из множества соседних клеток. Пока оставим описание этого критерия и покажем на примере, как будет работать обход с применением эвристики. На рисунке показан пример лабиринта. Начальное положение – клетка (7,5). В таблице показано, как изменяется множество «кандидатов» на каждом шаге обхода.

Лабиринт:

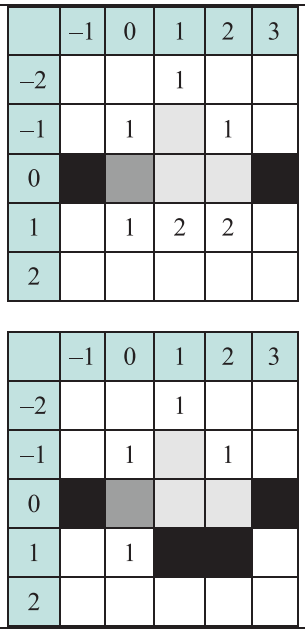


МАТАНЦЕВ Иван Владимирович – студент IV курса факультета информатики ВятГГУ

© Матанцев И. В., 2007

Номер шага	Множество S	Состояние обхода	Клетка, из которой задается вопрос и ответ на него	Измененное множество S
1	(2,2)(2,5)(2,6)(3,3) (3,4)(3,5)(3,6)(3,7) (4,3)(4,4)(4,5)(4,6) (4,7)(5,2)(5,3)(5,5) (5,7)(6,2)(6,3)(6,4) (6,6)(6,7)(7,2)(7,5) (7,6)(7,7) Мощность множества – 26		(0,0) справа – незанято	(2,5)(3,3)(3,4)(3,5) (3,6)(4,3)(4,4)(4,5) (4,6)(5,2)(6,2)(6,3) (6,6)(7,5)(7,6)
2	(2,5)(3,3)(3,4)(3,5) (3,6)(4,3)(4,4)(4,5) (4,6)(5,2)(6,2)(6,3) (6,6)(7,5)(7,6) Мощность множества – 15		(1,0) справа – свободно	(3,3)(3,4)(3,5)(4,3) (4,4)(4,5)(6,2)(7,5)
3	(3,3)(3,4)(3,5)(4,3) (4,4)(4,5)(6,2)(7,5) Мощность множества – 8		(2,0) справа – занято	(3,5)(4,5)(6,2)(7,5)
4	(3,5)(4,5)(6,2)(7,5) Мощность множества – 4		(0,0) справа – занято	(6,2)(7,5)

Окончание таблицы

5	(6,2)(7,5) Мощность множества – 2	

	–1	0	1	2	3
–2			1		
–1		1		1	
0					
1		1	2	2	
2					

	–1	0	1	2	3
–2			1		
–1		1		1	
0					
1		1			
2					

Для каждой клетки множества S наш обход представляет множество различных клеток с координатами относительно клетки из S и состояниями этих клеток. Возможны следующие состояния: свободна, занята, неизвестно. На первом шаге обход состоит только из одной клетки, это наша начальная позиция с координатами (0,0). Для каждой клетки из множества S подсчитаем количество стен слева, справа, снизу. Для нашего примера сверху и снизу по 10 стен, а слева и справа – по 11. Если мы зададим вопрос в одну из клеток с 10 стенами, то в случае ответа о том, что там стена, множество S сократится до 10 кандидатов, если же ответом будет то, что клетка свободна, то множество кандидатов измениться до 26–10 = 16 клеток. Если мы выберем для запроса сторону, на которой 11 стен, то если ответом будет «клетка свободна», то останется 15 клеток, если ответ будет «в клетке стена», то останется 11 клеток. Для каждого направления возможен лучший случай, когда множество S сокращается максимальным образом, и худший случай. В силу произвольности лабиринта и начального положения будем считать, что всегда происходят худшие случаи. Тогда лучшим выбором запроса на проверку клетки будет тот запрос, из которого худший случай будет минимален. Формула вычисления количества клеток в худшем случае следующая: max(|S|-m,m), где m – количество стен в этой клетке. Для минимизаций этого числа следует стремиться к тому, чтобы разница между значением |S|-m и m была минимальной => (|S|-m)-m→min, => |S|-m-m → 0 => m → |S|/2. т. е. для достижения оптимального результата нам нужно выбирать ту клетку, в которой число стен максимально близко |S|/2. Это и есть вторая часть эвристики. Для удобства далее по тексту эту эвристику будем называть критерием выбора. Если же клеток, удовлетворяющих критерию, несколько, то выбираем любую из них. В нашем случае выберем клетку (0,–1). Она находится слева от нашего начального состояния. Смотрим влево. Слева находится свободная клетка. Убираем из множества S все такие клетки, для которых слева находится стена. Заносим клетку справа в наш обход.

На втором шаге полагаем каждую клетку из S клеткой обхода с координатами (0,0) и считаем количество стен уже для двух клеток, клетки из множества S и клетки слева от выбранной клетки. Находим по критерию выбора клетку, из которой должен быть задан вопрос и направление для вопроса. Если эта клетка не совпадает с той клеткой, в которой мы стоим, то мы перемещаемся в эту клетку. Для нашего примера клетка будет иметь координаты (1,0) и направление – вправо. Задаем вопрос и получаем ответ – свободно. Убираем из множества все клетки, для которых не будет выполняться условие: клетка справа от клетки с координатами (x+1, y+0) свободна, где (x,y) – координаты точки из S. Добавляем клетку справа в обход.

На третьем шаге снова полагаем каждую клетку из S клеткой обхода с координатой (0,0). Считаем стены для всех клеток из обхода и всех клеток из S. После подсчета стен и применения критерия выбора клетка для задавания вопроса бу-

дет (2,0), направление вправо. Ответ: будет занято. Удаляем из S все клетки, для которых будет выполняться условие: клетка правее(x+2,y+0) свободна. Запоминаем в обходе, что клетка с координатами (3,0) занята.

На четвертом шаге полагаем каждую клетку из S клеткой обхода с координатой (0,0). Считаем стены для всех клеток из обхода и всех клеток из S. После подсчета стен заметим, что количество стен для клетки (1,–1) равно 0. Это значит, что для любой клетки (x,y) из S в клетке с координатами (x+1,y–1) свободно. Так как это выполняется для всех клеток из S, то мы можем добавить эту клетку в обход. После добавления клетки обход изменится и надо будет заново подсчитать стены. Заметим, что те клетки, в которых стены подсчитаны, пересчитывать не обязательно, следовательно, надо подсчитать только те клетки, которые граничат с новой добавленной клеткой и в которых количество стен не подсчитано. После того как мы посчитаем количество стен, применим критерий выбора. Клеткой для задавания вопроса будет клетка (0,0), направление вправо. Ответом на запрос будет «занято». Удалим из S все клетки, для которых не выполняется данное условие. Запомним, что клетка с координатами (–1,0) занята.

На пятом шаге полагаем каждую клетку из S клеткой обхода с координатой (0,0). Считаем стены для всех клеток из обхода и всех клеток из S. После подсчета стен заметим, что количество стен для клеток (1,1) и (2,1) будет равно количеству клеток в S, значит, для всех клеток из S на их местах стоят стены. Пометим в обходе, что эти клетки заняты. Применим критерий выбора. Клетка для задавания вопроса (1,–1), направление вверх. Ответом будет «свободно». После усечения множества S у нас осталась только одна клетка-кандидат. Она и будет ответом к поставленной задаче.

Приведем пример возможной реализации данного обхода в псевдокоде:

Инициализация;
While (*количество кандидатов*>1) do begin
    Откуда спрашивать;
    Задать вопрос;
    Уменьшить множество кандидатов;
End;

Procedure *Откуда спрашивать* ()
Begin
    Подсчитать количество стен для каждой клетки в обходе;
    Найти клетку, в которой (Walls[i,j] – *количество кандидатов*)/2 минимально.
    Найти, из какой клетки обхода и в каком направлении будет задаваться вопрос.
End;

Procedure *Задать вопрос*()
Begin
    Перейти из текущей клетки обхода в клетку, из которой будет задаваться вопрос;
    Задать вопрос в выбранном направлении;
End;

Применение данной эвристики позволяет уменьшать множество S каждый шаг в два раза. Тогда количество шагов обхода будет порядка $O(\log_2 n)$, где n – количество свободных клеток в лабиринте, что позволяет добиться скорости выполнения алгоритма порядка $O(Log_2 200)*40000 = 305755$ операций. На современном компьютере это будет выполняться $305755/10^9 = 0{,}0003$ сек.

М. Ю. Мельникова

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРПОРАТИВНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ В СИСТЕМЕ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ПРИ ПОДГОТОВКЕ IT-СПЕЦИАЛИСТОВ

В статье обоснован выбор корпоративной информационной системы при подготовке IT-специалистов.

Переход в нашей стране к рыночной экономике совпал по времени с революционным переворотом в компьютерной и телекоммуникационной технике – созданием высокоэффективных персональных компьютеров доступного ценового диапазона, внедрением сетевых технологий, появлением Интернета. В результате уже к середине 1990-х гг. появилась реальная возможность автоматизировать решение большинства задач управления предприятием. Западные менеджеры в полной мере воспользовались новыми возможностями. В то же время как мировой опыт, так и опыт передовых отечественных компаний показывает, что решение проблемы автоматизации управления предприятием необходимо искать на путях внедрения интегрированных корпоративных информационных систем, охватывающих практически все стороны его деятельности (управление персоналом, логистика, бухгалтерский учёт, управление финансами, управление производством), ориентированных на автоматизацию всех уровней управления (оперативного, тактического, стратегического) и обладающих средствами поддержки корпоративного управления. Важнейшее преимущество таких систем – возможность работы с единой реляционной базой данных, что оптимизирует трудозатраты на ввод информации, умень-

МЕЛЬНИКОВА Марина Юрьевна – преподаватель кафедры информационных технологий в экономике и управлении филиала ВятГГУ г. Кирово-Чепецка
© Мельникова М. Ю., 2007

шает вероятность ошибок, облегчает решение проблемы защиты информации.

В последнее время происходит оживление отечественной промышленности, сопровождаемое высокими темпами внедрения Корпоративных экономических информационных систем (КИС). Если вчера КИСы привлекали внимание довольно узкого круга руководителей, то сейчас проблемы автоматизации деятельности компаний стали актуальными практически для всех. Обусловлено это не только положительной динамикой развития экономики, но и тем, что сегодня предприятия уже обладают значительным опытом использования программных продуктов различного класса.

Таким образом, на повестку дня встаёт вопрос о необходимости подготовки информатиков, экономистов, бухгалтеров и менеджеров, имеющих соответствующие знания и навыки.

В перечне направлений подготовки специалистов Минобразованием сформированы направления, и в частности одно из них – «Информационные системы», в рамках которого открыт ряд специальностей, таких, как «Информационные системы и технологии», «Прикладная информатика в экономике», ориентированных на подготовку квалифицированных IT-специалистов. Так, для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная информатика в экономике», дисциплина «Корпоративные экономические информационные системы» является дисциплиной специализации в области экономики и изучается, как правило, уже после блока дисциплин, связанных с экономикой, управлением предприятием, бухгалтерским учётом и блоком информационных дисциплин.

Основные цели курса: изучение студентами архитектуры корпоративных информационных систем, получение базовых знаний по построению, выбору, развертыванию и сопровождению и КИС, освоение приемов администрирования и программирования в корпоративных информационных системах.

На сегодняшний день в большинстве вузов уже сформирована чёткая концепция изучения данной дисциплины, так, например, в МЭСИ структура курса такова, что в начале студентов знакомят с теоретическими аспектами роли корпоративных информационных систем, их разновидностями, структурой, особенностями проектирования – в частности, это методики MRPII, ERP и SAP, внедрения корпоративных информационных систем на предприятиях и обеспечения безопасности работы в них.

В практическом блоке изучения дисциплины, студенты должны освоить хотя бы основы работы с несколькими базовыми модулями Интегрированных корпоративных экономических информационных систем, в рамках лабораторного практикума, базирующегося на реальной современной версии системы. Именно на этом этапе большинство вузов сталкивается с проблемой выбора для лабораторного практикума примера КИС, также методики изучения КИС (последовательность, т. е. структура учебного процесса).

В настоящее время на российском рынке предлагается около 100 промышленных программных продуктов управления торговыми и промышленными предприятиями разного масштаба. Наиболее известными отечественными корпоративными программными продуктами управления предприятиями являются «Галактика»; «Парус»; «БОСС-Корпорация»; «Фигаро», «КСТ М-3» и др. По мнению ведущей международной исследовательской и консалтинговой компании, работающей в области информационных технологий и телекоммуникаций в 50 странах мира, серьёзного рассмотрения заслуживают 2 корпоративные системы: «Галактика» и «Парус».

Как показывает опыт, в большинстве вузов студентов знакомят именно с интегрированной корпоративной информационной системой «Галактика». Так как образовательная политика корпорации «Галактика» – программа «Галактика и вузы», которая предоставляет учебным заведениям высшего и среднего профессионального образования, имеющим необходимые условия, полнофункциональные демоверсии системы для внедрения в учебный процесс – именно этот фактор играет немаловажную роль при оценке качества подготовки современных IT-специалистов.

Хотелось бы отметить, что при знакомстве студентов с программным комплексом «Галактика» прежде всего необходимо рассказать о её базовой концепции, оценить структуру – модульность, дать представление о конфигураторе – Atlantic и далее уже переходить непосредственно к установке информационной системы «Галактика» в рамках лабораторного практикума, сконцентрировать внимание при изучении не на всех модулях, а именно на тех, которые могут быть задействованы на предприятии в целях автоматизации его деятельности. Так, на примере МЭСИ целесообразно сначала познакомить студентов с модулем или контуром «Управление персоналом», далее на его базе перейти к «Логистике», затем – к модулю «Бухгалтерский учёт» и в заключение – к самому основному – «Управлению производством» на примере выбранной учебной задачи, где именно может применяться эта КИС.

И в заключение хотелось бы отметить, что использование активных методов обучения и четкая организация самостоятельной работы студентов позволит освоить сложный материал курса «Корпоративные экономические информационные системы».

М. В. Петухова

ПРЕЗЕНТАЦИОННАЯ ПОДДЕРЖКА ЛЕКЦИЙ: ПО ОБЕ СТОРОНЫ ПРОЕКТОРА

В статье рассмотрены «плюсы и минусы» использования презентаций при проведении лекционных занятий.

В условиях современных требований к компьютеризации процесса обучения одним из популярных средств является презентационная поддержка лекции. Многие преподаватели рады возможности сопроводить свое занятие компьютерной презентацией, готовы потратить на ее подготовку силы и время. Конечно, пока главное препятствие – недостаточное техническое оснащение. Тем не менее это средство все активнее внедряется в учебный процесс. Поэтому оставим пока в стороне технические вопросы и обратимся к дидактической стороне применения компьютерной презентации в качестве поддержки лекции.

В общем плане цель, которую предполагает достичь преподаватель при создании и использовании компьютерной презентации, заключается в повышении качества изложения лекционного материала для наилучшего восприятия его студентами. При этом выделяются более конкретные задачи:

• усилить наглядность (чертежи, схемы, формулы, таблицы, графика, фото, анимация),

• улучшить структурность предъявления материала (оглавление со ссылками, списки-перечисления и т. п.),

• сэкономить время лекции (по сравнению с традиционными записями на доске).

Удается ли достичь цели с помощью решения этих задач? Обратимся к тем, кто находится по другую сторону проектора.

Среди студентов факультета информатики было проведено анкетирование на предмет выявления их восприятия презентационной поддержки лекций. Анализ анкет дал следующие результаты.

На общий вопрос «Облегчает ли восприятие материала лекций презентационная поддержка?» ответы распределились таким образом: 46% – «часто», 25% – «всегда», 21% – «частично, иногда», 8% – «только усложняет».

Что же в компьютерной презентации помогает восприятию лекционного материала? Прежде всего, как и следовало ожидать, это схемы, графики (96%) и рисунки, иллюстрации (63%). Есть свои поклонники и у чтения с экрана текстовой информации: определений (42%), списков-перечислений и текстовых пояснений (25%).

Интересными оказались результаты ответа на вопрос по поводу тех элементов презентаций, которые, напротив, мешают восприятию лекционного материала. Ожидаемый лидер здесь – текст (его плохо воспринимают с экрана 49% студентов). На втором и третьем местах – анимация при выводе текстовых фрагментов (42%) и анимация в схемах и других графических элементах (29%). Оказалось, что не всегда анимация (так любимая многими преподавателями) помогает. Дело, возможно, в избытке эффектов, которые мешают воспринять текст или графический фрагмент в целом. Кроме того, применение анимации не всегда оправдано, не всегда согласуется с материалом. Даже опытный преподаватель часто переоценивает значение анимационных эффектов при создании презентационной поддержки своей лекции.

Что касается других (не дидактических) факторов, которые мешают студентам при просмотре презентации, то здесь в основном были отмечены два. Во-первых, частичное затемнение кабинета, которое, с одной стороны, не всегда достаточно для четкости изображения на экране, а с другой стороны, все-таки заставляет напрягаться при ведении записи в тетради (этот фактор отметили 37% опрашиваемых). Во-вторых, 33% студентов отмечают утомляемость глаз при постоянном обращении к экрану на протяжении лекции. Здесь, кроме обычных физиологических факторов, утомление может быть связано с неверно подобранной цветовой гаммой слайдов, излишней или недостаточной контрастностью фона и изображения.

Из представленных данных видно, что не всегда стремление визуализировать материал приводит к удачным результатам.

Вспомним определение наглядности: «Наглядность – свойство, выражающее степень доступности и понятности психических образов объектов познания для познающего субъекта» (Педагогический энциклопедический словарь [Текст] / под ред. Б. М. Бим-Бад. М.: Науч. изд-во «Большая Российская энциклопедия», 2002.). Наглядный образ объекта в сознании человека возникает не сам по себе, а только в результате активной познавательной деятельности, то есть когда обучаемый анализирует и осмысливает объект, соотносит его с уже имеющимися у него знаниями и представлениями. Наглядность как принцип дидактики неразрывно связан со всеми другими принципами: систематичности и последовательности обучения, сознательности и творческой активности обучаемых, научности и посильности материала и др. Ни один из принципов не

ПЕТУХОВА Мария Владиславовна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой прикладной информатики ВятГГУ

© Петухова М. В., 2007

универсален, и его изолированное применение не дает необходимых результатов. Поэтому только использование различных форм сочетания слова и средств наглядности, знание их сравнительной эффективности дает возможность преподавателю творчески применять средства наглядности (в том числе компьютерной презентации), согласуя их с поставленной образовательной задачей, особенностями учебного материала, условиями обучения.

В результате анализа опыта создания и применения презентационной поддержки лекций преподавателями различных дисциплин можно выделить следующие общие особенности.

Обычно компьютерная презентация используется на лекции либо в качестве иллюстративного средства к некоторой части материала, либо в качестве сопровождения на протяжении всего изложения. Во втором случае структура презентации перекликается со структурой самой лекции, в которой преподаватель, как правило, выделяет следующие элементы: тема, основные моменты (или план), самый важный момент, что студенты должны знать в результате, вопросы для обсуждения (предварительного, последующего, для повторения предыдущих тем, для закрепления). Таким образом, помимо иллюстративного материала (схем, графиков, таблиц, программных кодов и т. п.) средства презентаций используются для отражения этих же моментов. Именно здесь и возникает опасность перенасыщения презентации текстовым материалом. Поэтому важно постоянно анализировать соотношение необходимости и достаточности выводимых текстовых фрагментов, избегать излишней анимированности при выводе информации.

С целью совершенствования своих «компьютерных лекций» преподавателям важно оценивать эффективность их использования, постоянно осуществлять обратную связь: просматривать конспекты студентов, анализировать их вопросы, ответы на зачете и экзамене именно с позиций усвоения того материала, который был представлен в презентации.

Еще один вопрос, который преподаватель так или иначе решает при использовании презентационной поддержки лекций: отдавать студентам электронный вариант презентации, или, может быть, раздавать распечатки основных фрагментов презентации, или ограничиться традиционным конспектированием? Если вспомнить ответы студентов в анкете по поводу затемнения (37%) и утомляемости глаз (33%), стоит задуматься над этим. Конечно, предоставление презентации в электронном виде совсем не гарантирует того, что студент будет ее изучать при подготовке к занятиям, а раздача печатных материалов связана с дополнительными затратами. Один из вариантов – до (или после) лекции передавать старостам групп распечатки с основными положениями, наглядными объектами и т. п. из презентации для обязательного самостоятельного копирования всеми студентами. Тогда можно сократить записи в тетрадь на занятии, что позволит сконцентрировать внимание студентов на демонстрируемом материале, а также обеспечить в кабинете достаточное затемнение.

Таким образом, презентационная поддержка лекции, несмотря на все свои плюсы, имеет немало «подводных камней». Выделим некоторые из них, обобщив результаты проведенного выше анализа.

Во-первых (самый общий момент), это стремление использовать презентацию «во что бы то ни стало», если есть техническая возможность, не оценивая ее дидактическое значение для усвоения материала.

Во-вторых, переизбыток текстовой информации.

В-третьих, излишнее, часто неоправданное использование анимации при выводе как текстовых, так и графических фрагментов.

В-четвертых, неправильный подбор цветовых сочетаний, что отрицательно влияет на зрение и восприятие.

В-пятых, проблемы с затемнением кабинета – нечеткость изображения (при слабом затемнении) или недостаток освещения для записи студентами конспекта лекции (при более сильном затемнении).

Таким образом, с одной стороны, есть желание преподавателей оптимизировать свои лекции с помощью этого все более доступного современного средства, но с другой стороны, весьма ограничены возможности «добыть» профессиональные презентации для своих дисциплин. Поэтому делаем сами, а при этом не избежать недостатков. Но их можно сократить, если постоянно учитывать, что наша цель – повысить качество изложения лекционного материала для наилучшего восприятия студентами. Только презентация, в которой адекватно и эффективно используются ее возможности, позволит достичь этой цели. Постоянная обратная связь и анализ недостатков своих материалов, знание общих принципов и требований, обращение к опыту коллег и готовым профессиональным программным продуктам помогут преподавателю подготовить качественную презентационную поддержку лекций.

Е. В. Соболева

ТРЕНИНГ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБЩЕНИЯ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ

В статье рассматриваются проблемы общения, возникающие на уроке информатики, и предлагается тренинг для учителей, ориентированный на оказание помощи в разрешении этих проблем.

Одной из целей обучения информатике в школе на современном этапе является развитие мышления. Общение как вид деятельности, организуемый учителем на уроке, является методом интеллектуального развития.

Использование компьютера позволяет не только усилить традиционные информационные потоки, возникающие при общении участников учебного процесса, тем самым активизируя информационный обмен, но и добавить новые (между учеником и компьютером, между учителем и учеником с помощью компьютера).

Таким образом, общение – это

1. Деятельность, в процессе которой осуществляется познание;

2. Информационные потоки между участниками процесса обучения.

Как уже отмечалось ранее, «искусство общения учителя – основополагающий фактор среды обучения» [1]. Но в чём заключается это искусство и как учителю им овладеть? Почему общение на уроках информатики важнее, чем на других уроках?

Предполагается, что для успешной организации педагогического общения достаточно владеть основными коммуникативными умениями и навыками. Однако следует учитывать особенности компьютерного урока и возникающие, при включении компьютера в учебный процесс, новые связи. Компьютер на уроке информатики является своеобразным участником учебного процесса, в результате чего увеличивается спектр взаимодействий [2]. Более того, высказываются предложения использования компьютера в целях повышения эффективности общения на уроке и предлагаются правила, которые могут помочь. Но применяются ли эти правила учителями и преподавателями на практике?

Оказывается, в большинстве случаев учителя о них знают, но считают, что применение их требует лишних временных затрат и эмоционального напряжения. Однако использование их могло бы предотвратить появление многих проблем.

СОБОЛЕВА Елена Витальевна – ассистент кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Соболева Е. В., 2007

Что же это за проблемы общения, возникающие на уроках информатики? Их можно условно разделить на 4 группы, если в основу такой классификации взять причины возникновения проблемы.

1. Проблема противостояния.

Эта проблема возникает, когда учителя отделяют свои цели от целей учеников, проводят «границу» и отдаляют их от себя. Учитель, используя различные методы и средства, сообщает ученику некоторое знание, пытается сформировать умение, показывая, как надо делать. А вот поймёт ли ученик, научится ли, получит ли новые навыки? Главное в этом случае, чтобы ученик выполнил некоторое контрольное задание. В результате возникают проблемы формализма знаний и списывания.

Между учителем и учеником огромная пропасть. Образуется, пользуясь терминологией А. А. Бодалёва, «полоса отчуждения» [3].

В таких случаях ученик начинает воспринимать учителя как противную сторону в прямом и переносном смысле.

2. Проблема авторитета.

Некоторые учителя боятся вопросов, которые им могут задать ученики, боятся ситуации, когда они не сразу найдут ошибку в программе, и это повредит их авторитету. Поэтому их общение на уроке сводится к контрольно-оценочной схеме.

3. Проблемы, связанные с неправильно выбранной формой общения.

Многие учителя считают, что любая помощь ученику принесёт больше вреда, чем пользы, так как развивает мышление только самостоятельное решение задачи. Никакого совместного поиска решения задач, никакой общей работы над исправлением ошибки. В большинстве случаев даётся задание и предоставляется инструкция. Но нет ни обучения работе с инструкцией, ни возможности учителю увидеть ход мысли ученика.

Очень редко в школе компьютер используется как средство разрешения спора или как инструмент для открытия нового способа решения. Работа многих учителей организуется по принципу «Делай как все!».

4. Проблемы стиля программирования как элемента культуры общения.

Ещё одна проблема – это отсутствие культуры оформления программы. Действительно, как показывает опыт, в школе мало внимания уделяют структуре программы, забывая, что это один из способов развития мышления. Правильно оформленный блок программы (процедура или функция) – это цельный образ, который достаточно легко воспринимается. В результате формируется образ программы как некой модульной структуры с определёнными внутренними связя-

ми. А это работает на формирование структурного мышления.

Более того, культура оформления программы – это элемент культуры общения. Неправильно оформленная программа становится нечитабельной. Однако программа как законченный продукт должна быть доступна пониманию других людей (в первую очередь учителя), а также и самого ученика спустя некоторое время.

Таким образом, читабельность можно интерпретировать как элемент общения.

А когда в университете с ученика начинают требовать структурирования программы, то это вызывает понятные возмущения: «Зачем? Мы в школе так не делали, а у нас всё работало».

Обучение программированию в школе, в большинстве случаев, связывают только с решением задач, а использование подсказок компьютера и HELPа считается необязательным, то есть не реализуются все возможности связки «ученик – компьютер», а значит теряется одна из сторон общения.

Таким образом, прививая культуру оформления программы, учитель учит ученика общаться.

Каким же образом разрешать подобные проблемы? Один из возможных путей – это проведение с учителями (будущими и работающими) ролевых игр и тренингов по общению.

Несмотря на многочисленность подобных тренингов в психолого-педагогической практике, они теряют свою эффективность на уроке информатики, так как не учитывают возможности компьютера.

Поэтому встаёт вопрос о разработке специального тренинга по общению для учителей информатики. Далее описана структура такого тренинга, состоящего из нескольких занятий. Для каждого занятия определена цель, перечислены основные средства и формы проведения.

Разрабатываемый тренинг рассчитан на 6 занятий. Каждое занятие направлено на достижение определённой цели и состоит из нескольких этапов. Трудность заключается в том, что цели перед каждым занятием учителя должны определять для себя сами. Как это организовать?

В данном случае предлагается провести на ***первом занятии*** тренинга тест «Психологический портрет учителя информатики», в котором присутствуют вопросы по следующим направлениям: приоритетные ценности учителя, психоэмоциональное состояние, самооценка, стиль преподавания. В каждом направлении основная часть вопросов относится к организации общения на уроке программирования и ориентирована на выявление конкретных проблем для конкретного учителя.

После того как участники ответят на вопросы, им, вопреки законам тестирования, интерпретация теста не выдаётся. Дело в том, что первое занятие направлено на определение круга проблемных вопросов, на ориентацию к работе, а не на мгновенную раздачу «слонов». Участник, отвечая на вопросы, задумывается над проблемами, которые в них охватываются, и на следующих занятиях при разрешении разных ситуаций будет поневоле их вспоминать, корректировать свою точку зрения или, наоборот, убеждаться в собственной правоте. Таким образом, участник сам определяет, что для него важно.

На первом же занятии предлагается провести деловую игру «Оценка педагогических программных средств по информатике», в которой учителя анализируют деятельность других учителей, связанную с применением компьютера на уроке. Однако в ходе обсуждения они всё равно «примеряют» каждое программное средство на себя. К игре предлагается сценарий, определены роли и функции участников, выделен игровой конфликт и даётся психологический комментарий.

В конце первого занятия участникам формулируется домашнее задание, связанное с разрешением конфликтных ситуаций на уроке информатики при помощи компьютера.

Второе занятие полностью посвящено анализу реальных практических конфликтных ситуаций, в которых компьютер используется как арбитр или помощник, и моделированию возможных решений. Значение этого занятия в том, что предложенные упражнения дают возможность участнику побыть и в роли учителя, и в роли ученика, и в роли стороннего наблюдателя, увидеть, как другие применяют компьютер в разных ситуациях и как это влияет на организацию взаимодействия. Каждый получает возможность увидеть чужие проблемы и ошибки и задуматься о своих. Особенностью является также то, что в результате никто не выносит оценок участникам, а значит, понижается вероятность скованности и неискренности в группе.

В конце второго занятия также формулируется домашнее задание. Однако оно уже дифференцировано, так как ***третье занятие*** – конференция, посвящённая вопросам и проблемам организации и проведения лабораторной работы по решению задач за компьютером.

Данное упражнение позволяет собрать воедино ряд проблем, которые возникают у всех учителей при организации и проведении лабораторной работы по решению задач за компьютером. Более того, такая форма работы позволит высказать несколько вариантов ответов на поставленные вопросы, а значит, учитель получает определённый набор методов и идей, как использовать компьютер для развития мышления и обучения. Самое главное, чтобы эти идеи и методы каждый выбрал для себя сам.

Четвёртое занятие посвящено обсуждению ситуаций общения на уроке информатики и возможностей применения компьютера в качестве активного участника общения.

Кроме того, в рамках четвёртого занятия предлагается провести упражнение, направленное на выявление общего начала у всех учителей информатики при организации процесса общения на уроке и при использовании компьютера в этом процессе.

Одним из наиболее интересных занятий, на наш взгляд, будет являться ***пятое занятие***. Данная работа направлена на формирование положительного отношения к привлечению игрового элемента при организации работы с компьютером, оценки его влияния на организацию учебного процесса и общения, выделение методических рекомендаций и особенностей, а также способствует накоплению средств и форм подобной работы.

Примером одной из таких ситуаций является игра «Пойми меня, если сможешь!».

Методист просит двух человек помочь ему. Один выступает в роли «исполнителя», а другой – в роли «пользователя». «Исполнитель» покидает на некоторое время аудиторию, а методист объясняет «пользователю», какую задачу «исполнитель» должен выполнить под его руководством, при этом не используя речь и письменность. Далее «пользователь» и «исполнитель» приступают к выполнению задачи. Методист и остальные участники следят за соблюдением правил.

Затем участники и методист обсуждают, при изучении какой темы и на каком этапе урока можно использовать такую игровую ситуацию, в чём её преимущества.

На ***шестом занятии*** предлагается проведение упражнения, в ходе которого участники обмениваются мнениями о методах и приёмах друг друга, используемых при организации процесса общения на уроке информатики и при использовании компьютера для взаимодействия в различных ситуациях.

Завершаться тренинг будет тем же тестом, с которого всё начиналось. Но здесь учителя не только получают интерпретацию, но и листы с результатами первого тестирования. Таким образом, учителю предоставляется возможность самому сравнить полученные результаты до и после тренинга и сделать соответствующие выводы, которые он может обсуждать или не обсуждать с другими участниками.

В предлагаемом тренинге используется индивидуальная работа, работа в паре, работа в микрогруппах, работа в целой группе. При выполнении упражнений участники, имитируя учебный процесс, играют разные роли и выполняют различные функции. Более того, на каждом занятии участники активно используют компьютер для организации общения и взаимодействия.

Однако особое внимание следует уделить структуре тренинга. При подборе упражнений и разбиении их по занятиям предлагается такая последовательность:

– «**Я** (сам учитель) и мои способы **общения** на **уроке информатики**».

– «Организация **общения** на **уроке информатики других** учителей с **моей** точки зрения».

– «**Я** и **другие** учителя **информатики**».

– «**Я** взаимодействую с **другими** учителями **информатики** при использовании **компьютера** в процессе **общения**».

– «**Мы** постигаем искусство **общения** на **уроке информатики**».

– «**Я** и мои способы **общения** на **уроке информатики** с точки зрения **других** учителей».

– «**Я** (сам учитель) и мои приёмы **общения** на **уроке информатики**».

Таким образом, предложенный тренинг позволит учителям информатики не только разрешать проблемы общения, возникающие на уроках информатики, в частности при программировании, но и приблизиться к цели овладения искусством общения.

Проблемы общения на уроке информатики – это достаточно большая тема, требующая дальнейшей работы, в связи с чем планируется:

1) придумать способы и приёмы для «видения мысли» ученика на конкретных ситуациях компьютерных уроков для различных тем;

2) разработать задания для студентов-методистов (чтобы учились учить) на применение компьютера как инструмента «видения мысли» ученика.

Примечания

1. *Окулов, С. М.* Информатика: Развитие интеллекта школьников [Текст] / С. М. Окулов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

2. *Васенина, Е. А.* Общение на уроке информатики [Текст] / Е. А. Васенина, С. М. Окулов // Информатика и образование. 2004. № 8.

3. *Бодалёв, А. А.* Психология общения. Избранные психологические труды [Текст] / А. А. Бодалёв. М.: Изд-во Моск. психолого-социального института; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 2002. С. 120–132.

Т. Н. Суворова

О ПРОБЛЕМЕ РАЗВИТИЯ МЫСЛИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ УЧАЩИХСЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

В статье рассматривается операциональная структура мышления учащихся. Анализируется одна из традиционных методик изучения информационных технологий в школе с целью выявить степень эффективности формирования мыслительных операций.

В трудах отечественных и зарубежных психологов (А. В. Брушлинский, Л. А. Венгер, П. Я. Гальперин, А. Н. Леонтьев, Ж. Пиаже, С. Л. Рубинштейн, Н. Ф. Талызина, О. К. Тихомиров и др.) значительное внимание уделяется проблеме операционального состава мышления. Конечно, нельзя весь процесс человеческого мышления сводить лишь к совокупности мыслительных операций, нельзя исключать из зоны рассмотрения психические процессы (ощущение, восприятие, память, внимание), подробно изученные такими учеными, как Б. Г. Ананьев, Б. М. Величковский, Л. С. Выготский, У. Джемс, П. И. Зинченко, Т. П. Зинченко, А. Н. Леонтьев, А. Р. Лурия, А. А. Смирнов и др. Познавательные процессы, несомненно, оказывают влияние на успешность мыслительных актов. Необходимо учитывать также воздействие эмоциональной и волевой сферы жизнедеятельности на процессы мышления [1]. Но, тем не менее, согласно деятельностному подходу, приверженцами которого являются многие известные психологи, умственные действия, умственные операции являются структурными единицами деятельности мышления и тем самым заслуживают пристального внимания психологов и педагогов.

В последние десятилетия в психологии традиционно выделяют восемь основных операций мышления: анализ, синтез, сравнение, абстракция, обобщение, конкретизация, классификация и систематизация. Результаты исследования данных мыслительных операций и закономерностей их развития опубликованы в ряде исследований ([2], [3], [4], [5]). Рассмотрим более подробно эти операции в психологическом контексте и попытаемся проанализировать эффективность развития выделенных мыслительных операций на примере одной из традиционных школьных методик обучения информатике.

Анализ (от греч. analysis – разложение, расчленение) является одной из основных операций мышления. Он представляет собой процесс целенаправленного выделения частей предметов или явлений действительности в их признаках и свойствах, а также связей и отношений между ними с целью более полного и глубокого их изучения и, тем самым, целостного познания этих предметов и явлений. Различные виды анализа и синтеза, а также закономерности их развития исследовались В. И. Абраменко [6], Н. Д. Богоявленским [7], А. В. Брушлинским [8], З. И. Калмыковой [9], А. А. Люблинской [10], Н. А. Менчинской [11], С. Л. Рубинштейном [12], М. Н. Шардаковым [13] в процессе изучения школьниками разных учебных предметов.

Выделяют четыре этапа развития анализа.

1. *Пробный, ориентировочный анализ.* Характерен для мыслительной деятельности учащегося в начале изучения нового материала, когда школьники в порядке «ориентировки» и «разведки» аналитически рассматривают разные отдельные части материала и в разных направлениях. В процессе этого пробного анализа учащиеся иногда на основе сходства некоторых внешних признаков совершенно разных предметов или вопросов учебного материала через *синтез-смешение* приходят к ошибочным выводам или решениям [14].

2. *Элементный, частичный анализ*, в ходе которого аналитическому разбору подвергаются лишь некоторые элементы предмета или явления, части целого с его признаками и отношениями между ними выделяются частично и без соблюдения иерархии, без соотнесения друг с другом, вследствие чего усвоение понятия или вопроса учебного материала оказывается частичным, односторонним.

3. *Комплексный анализ* происходит на более высокой ступени изучения учебного материала, в ходе которого анализируется комплекс частей целого. Благодаря такому анализу усвоение учебного материала оказывается достаточно богатым. Комплексный анализ является обычно экстенсивным, но не всесторонним. Он дает знания о предмете или явлении лишь в некоторой сумме признаков и свойств, а не в определенной системе их. В результате комплексного анализа должны быть иерархически выделены части целого. Кроме того, рассматриваются признаки отдельных частей целого, но выделяются не все признаки, а только их часть.

4. Для *высшего, системного, анализа* характерно всестороннее аналитическое изучение предметов или явлений в определенном направлении, рассмотрение частей их в свойственной им определенной системе связей и отношений, что позволяет школьнику добиться достаточно глубокого, полного и всестороннего знания предмета. Системный анализ является вместе с тем интенсивным, концентрированным анализом, в процессе

СУВОРОВА Татьяна Николаевна – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Суворова Т. Н., 2007

которого предметы изучаются в строгой системе и определенном направлении.

Таким образом, развитие анализа от одностороннего к всестороннему совершается через ряд все более усложняющихся видов анализа – пробный анализ, затем элементарный, или частичный, далее комплексный и, наконец, системный анализ.

Синтез (от греч. synthesis – соединение, сочетание, составление) – это познавательная, отражательная мыслительная деятельность, выражающаяся в установлении единого характера качеств и свойств элементов возможного целого, в определении единого и определенного направления связей и отношений между элементами этого целого, в соединении, связывании их и тем самым получении нового целого предмета или явления.

Синтез бывает различным по своему объему, по охвату синтезируемых элементов целого. В процессе обучения мыслительная деятельность школьников развивается *от элементарного к сложному и более широкому по объему синтезу*. При изучении нового учебного материала, при решении новой учебной задачи движение от незнания к знанию совершается через переход от *частичного синтеза к полному синтезу*.

Итак, можно выделить два основных уровня синтеза:

1-й уровень – частичный синтез (односторонний, элементарный);

2-й уровень – системный синтез (высший, наиболее полный, широкий по объему).

Системный синтез не является механическим соединением частей в целое, он не просто сумма частей целого. Подлинный синтез как особая мыслительная операция дает качественно новый результат, некоторое новое знание действительности. Любая учебная работа совершается посредством использования операции синтеза.

Сравнение – это установление сходства и различия предметов и явлений действительности. Сходство подразумевает наличие у объектов одинаковых свойств, качество или отношение между сравниваемыми объектами или явлениями, некоторые общие закономерности протекающих процессов. Сходство может быть разной степени, оно подготавливает синтез и обобщение. В учебной работе школьников сравнение играет важную положительную роль.

В обучении сравнение всегда служит какой-то познавательной цели, оно целенаправленно. В связи с этим предметы и явления с позиций одной цели могут быть сходными, с позиций другой – различными. Сравнение с целью изучения сходных и общих признаков или связей и отношений между предметами может применяться тогда, когда предметы в чем-то различны. И, наоборот, с целью изучения различий сравнение применяется в случаях, когда между предметами или явлениями есть нечто общее, есть какое-то сходство, так как сравнение совершенно различных предметов или явлений бесцельно.

Предметы и явления можно сравнивать по какому-нибудь определенному общему признаку или в каком-нибудь одном отношении. Но сравнивать предметы и явления, находить между ними сходное и различное можно и по разным признакам или в разных направлениях. В этом случае сравнение оказывается *комплексным*.

В учебном процессе применяется последовательное сравнение. Оно заключается в том, что изучаемый новый объект или понятие сравнивается с ранее изученными, имеющими по отношению к нему какое-то сходство или различие. Это сравнение давно уже имеет очень широкое применение в учебной практике.

В исследованиях отечественных психологов [15, 16] было доказано, что при использовании в обучении сравнения затормаживаются ошибочные и закрепляются правильные временные связи, повышается дифференцированное усвоение понятий, правил или законов, образуются прочные ассоциативные связи по сходству и контрасту.

Из всего изложенного вытекает, что использование сравнения в процессе учения способствует тому, что школьники усваивают учебный материал во всем его своеобразии и многообразии признаков и свойств. Благодаря сравнению предметы и явления изучаются в их сходных и отличных, общих и особенных признаках. Под влиянием последовательного и систематического обучения в школе мыслительная деятельность сравнения должна приобретать у учащихся все более организованный и целенаправленный характер. При условии постоянных упражнений она может стать усовершенствованным навыком мышления.

Абстракция (от лат. abstractio – отвлечение) – одна из основных операций мышления. Развитие абстракции выражается в формировании способности выделять и отвлекать от единичных предметов или явлений общие и существенные признаки, связи и отношения, а также отличать несущественные признаки и связи этих предметов или явлений и отвлекаться от них. Абстракция является конструирующим компонентом обобщающей мыслительной деятельности учащихся. Обобщение и формирование понятий совершается за счет абстракции.

В процессе изучения единичных предметов или явлений сначала выделяются и отвлекаются, т. е. абстрагируются от несущественных, общие, существенные свойства и связи. Затем путем синтеза и обобщения получают обобщенные, абстрактные знания в форме понятий, законов или правил.

Отечественными психологами показано, что в процессе абстрагирующей мыслительной деятельности учащихся «необходимо нейтрализовать и тем самым устранять или, по крайней мере, уменьшать воздействие несущественных признаков и отношений изучаемых предметов или явлений. Это облегчает абстракцию и обобщение существенных признаков и отношений, а вследствие этого возрастает и качество обобщенных теоретических знаний» [17].

Обобщение. Каждый предмет имеет свои существенные и несущественные свойства и признаки. Точно так же каждое явление возникает перед нами в существенных и несущественных связях и отношениях. Предметы или явления одного рода имеют существенные признаки или связи, которые всегда общие. Обобщаются абстрагированные общие и существенные признаки и связи какой-либо определенной группы предметов или явлений, следовательно, и получаются обобщенные теоретические знания именно об этой группе предметов или явлений.

Исследователями Т. И. Бочкаревой [18], А. П. Семеновой [19], А. В. Скрипченко [20] и Н. Х. Швачкиным [21] установлены три уровня развития обобщения признаков и свойств различных предметов и явлений действительности, связей и отношений между ними: *чувственное*, практически-действенное, совершающееся в наглядно данной ситуации; *образно-понятийное*; *понятийно-образное научное обобщение*.

1. *Чувственное обобщение* происходит в наглядно-данной ситуации при непосредственном восприятии единичных предметов и явлений на основе выделения внешних, наглядно-данных признаков. Чувственное обобщение происходит при манипулировании с вещами, когда действие с ними, ведущее к решению задачи, многократно повторяется и в результате этого обобщается. В процессе чувственного обобщения могут объединиться не только некоторые существенные общие признаки и отношения, но и несущественные, так как чувственно воспринимаются нами как те, так и другие свойства предметов или явлений действительности. Этот уровень обобщения С. Л. Рубинштейн называл *эмпирическим, элементарным* уровнем развития обобщения, который выражает начальные и элементарные понятийные знания о предметах и явлениях действительности.

2. *Образно-понятийное обобщение* представляет собой обобщение как существенных понятийных знаний о предметах и явлениях, так и несущественных признаков или отношений в виде наглядных образов, представлений. В обобщении этого уровня представлены как обобщенные понятийные знания о предметах и явлениях, так и единичные образы отдельных предметов или явлений данного рода.

3. *Понятийно-образное научное обобщение* характеризуется обобщением общих и существенных признаков предметов и явлений мира, связей и отношений, которые существуют между ними. Понятия, законы, правила, полученные в процессе понятийного, обобщающего мышления, представляют собой наиболее полные, глубокие и правильные знания о предметах и явлениях действительности. Обобщающее мышление – это научное теоретическое мышление.

Обобщение развивается у детей от чувственного через образно-понятийное к понятийно-образному. В процессе развития обобщения все время увеличивается роль словесно-понятийных компонентов. Развитие обобщающего мышления выражается также в том, что постепенно все больше устанавливается связь конкретного с общим и общего с конкретным.

Учащихся подводят к обобщениям через наблюдение и изучение чувственно воспринимаемого, наглядно данного, конкретного материала. Однако усвоение некоторых вопросов учебного материала совершается легче и быстрее тогда, когда сначала изучают абстрактный, обобщенный материал, а затем приступают к изучению конкретного материала. Это утверждение доказано в ряде исследований отечественных психологов ([22], [23], [24]) и созвучно с идеей П. Я. Гальперина об учении при помощи схем ориентировочной основы действия, которые как раз и представляют собой обобщенное знание [25]. Таким образом, П. Я. Гальперин предложил один из вариантов формирования обобщения. Кроме того, существует еще несколько приемов учебной деятельности школьников, которые способствуют формированию мыслительной операции обобщения. Среди них можно выделить составление плана изучаемого материала, построение выводов, составление тезисов, заголовков или сжатое обобщенное изложение материала.

Конкретизация. Мыслительная деятельность обобщения развивается у школьников в тесной взаимосвязи с мыслительным процессом конкретизации. Конкретизация определяется как применение общего к частному, конкретному, отдельному случаю. Одна из функций конкретизации заключается в иллюстрации понятий, законов и правил примерами в виде живых объектов, наглядных пособий, отдельных случаев и событий, лабораторных опытов и демонстраций и т. п.

Конкретизация ведет учащихся к более полному и глубокому пониманию и усвоению обобщенных знаний, понятий, правил, законов. Как показали исследования Н. А. Менчинской, чем больше разнообразных по построению задач решает школьник, тем лучше он знает общие принципы построения и решения подобных задач [26].

Выделяют два уровня конкретизации: *частичная* и *полная*. Частичная конкретизация является следствием неполной взаимной связи этого процесса с обобщением. Если, обобщая, школьники находят лишь часть общих признаков предметов или часть общих связей между ними, то их обобщение носит частичный характер. Частичной оказывается и конкретизация. Зная лишь один общий признак, одну общую связь, одну сторону того или иного учебного материала, учащийся, естественно, может конкретизировать его тоже частично на каком-либо примере.

Полная конкретизация возможна только после высшего понятийно-образного обобщения. На данной ступени формирования умственных операций школьники правильно, умело обобщают и конкретизируют содержание понятий и законов. Их мысль движется от единичных предметов и явлений к общему и от общего к единичным. Общее становится при этом ступенью к познанию новых единичных предметов и явлений.

Классификация – это отнесение единичных объектов или явлений к соответствующему роду или классу. Такая классификация выражается, во-первых, в выделении как существенных, общих признаков, связей и отношений единичных предметов или явлений, так и общих понятий, законов; во-вторых, в последующем отнесении единичных предметов к соответствующему общему понятию, закону или правилу.

Для повышения качества усвоения знаний и развития мышления учащихся необходимо систематически использовать умственную операцию классификации в процессе обучения. Исследования Н. З. Дьяченко, Н. Г. Кушкова, М. Н. Шардакова ([27], [28], [29]) показывают, что деятельность классификации состоит из следующих основных этапов.

1-й этап. Школьники изучают отдельный объект, явление.

2-й этап. В памяти школьников воспроизводится то родовое понятие, правило или закон, изученный ранее, к которому должен быть отнесен данный единичный объект или явление.

3-й этап. Существенные, общие признаки и отношения единичного объекта или явления соотносятся с такими же признаками и отношениями приведенного общего правила или закона.

4-й этап. Соотнесение единичного и общего завершается закреплением в мышлении и речи школьников дедуктивного умозаключения и причинно-следственного обоснования, в результате чего данные единичные предметы или явления классифицируются, то есть относятся к соответствующему роду или подводятся под определенный закон.

Развитие у учащихся мыслительной операции классификации выражается в том, что выявление существенных, общих признаков и свойств, или связей и отношений единичных объектов, или явлений и соответствующего им общего рода, закона начинает совершаться одновременно, как бы навстречу друг другу. Учащийся указывает на те признаки или отношения единичных объектов, которые являются общими с признаками того рода, закона, к которому данный единичный объект относится. Одновременно с этим воспроизводится и то общее с его существенными признаками, к которому относится данный единичный объект. Выделяются четыре уровня развития классификации.

Первый уровень характеризуется использованием преимущественно несущественных, внешних признаков для классификации. На этом уровне классификации ведущую роль играют восприятие и память. Мышление включается в эти процессы лишь в незначительной мере.

На втором уровне классификации школьники относят единичный объект к соответствующему общему понятию на основе их тождественных признаков, возможно, несущественных, иногда функционального характера.

На третьем уровне развития операции классификации учащиеся, как правило, способны называть все известные им существенные и несущественные признаки единичных предметов и общего понятия, располагая их в один ряд, не выделяя отдельно существенные признаки.

Наконец, школьники в процессе обучения достигают *четвертого уровня* развития мыслительной операции классификации, когда они, выделяя существенные признаки, способны правильно классифицировать не только изученные объекты, но и другие единичные объекты или явления того же рода, ими ранее не изучавшиеся.

Упражняясь в классификации, школьники при изучении той или иной науки усваивают понятия в их взаимной связи, в их общности и соподчинении, т. е. в определенной системе, а не отрыве одного понятия от другого. Умение классифицировать, сформировавшееся в работе над одним учебным материалом, применяется учащимися при изучении другого материала.

Систематизация. Мыслительная деятельность систематизации совершается в процессе учения, во-первых, в виде распределения совокупности каких-либо отдельных объектов на определенные группы или классы; во-вторых, в виде расположения учебного материала в каких-либо определенных системах.

Умственная операция систематизации может проходить как самостоятельно, так и вместе с операцией классификации. В единстве с классификацией она совершается тогда, когда требуется систематизировать отдельные объекты на соответствующие роды или классы по их объек-

тивно данным существенным, понятийным признакам. Лишь после правильно проведенной классификации возможна их систематизация, или группировка.

Между классификацией и систематизацией в учебной работе школьников имеется следующее различие. Так, конечный результат классификации – установление принадлежности единичного объекта или явления к определенному роду, закону или правилу. Конечный же результат систематизации – образование некоторой целой группы объектов или явлений. В связи с этим мыслительная операция систематизации часто совершается и без классификации систематизируемых объектов. В этих случаях объекты систематизируются в зависимости от возникших потребностей.

Второй вид систематизации, а именно систематизация учебного или какого-либо иного материала, заключается в приведении частей целого (темы урока, параграфа учебника, доклада и т. д.) в какой-то порядок, в определенную систему, в которой отдельные части, располагаясь в известных отношения друг к другу, составляют единое целое. Такая мыслительная деятельность систематизации в учебной работе школьников иногда протекает в единстве с процессом обобщения. Так, при составлении плана того или иного изучаемого раздела учебного материала учащиеся вначале устанавливают определенную систему связей между частями этого материала и лишь после этого составляют план в виде обобщенных пунктов-заголовков, располагая их в этой системе.

Для правильного и успешного выполнения умственной операции систематизации требуется выполнение следующих *трех основных правил*.

1. Необходимо определить признак или принцип, по которому должна быть проведена систематизация. Систематизация отдельных объектов может совершаться по родовым понятийным признакам. Определенный материал может быть систематизирован по какому-нибудь избранному принципу, например, материал доклада – по индуктивному принципу, т. е. от фактов к выводам.

2. Систематизировать нужно все данные единичные объекты, или весь данный материал.

3. Систематизация данных объектов или материала лишь тогда будет успешной и правильной, когда она будет проведена на основании только одного определенного признака или принципа. Например, доклад можно строить или по индуктивному принципу – от фактов к выводу, или по дедуктивному – от выводов к фактам. Группировка объектов или материла одновременно по разным признакам или принципам не ведет к систематизации и оставляет материал по-прежнему несистематизированным.

Формирование мыслительной операции систематизации имеет чрезвычайно большое значение в учебной работе школьников: она способствует развитию мышления учащихся и прочности запоминания материала. Систематизированные знания по определенному вопросу представляют собой некоторое целое в единстве своих частей и связей между ними. Вследствие этого они хорошо запоминаются, прочно сохраняются и легче актуализируются при решении новых задач.

Исследуем условия формирования и развития выделенных операций традиционными школьными методиками обучения информатике. В качестве объекта нашего внимания случайным образом выберем учебно-методический комплект для изучения курса «Информатика и информационные технологии» в общеобразовательных учреждениях, а именно – учебник для 10–11-х классов Н. Д. Угриновича [30]. Рассматриваемая методика, на наш взгляд, является типичной для современной школьной информатики.

Каждая тема в данном учебном пособии начинается с изучения теоретического материала (например, назначение прикладного программного средства, основные типы и форматы данных, относительные и абсолютные ссылки и так далее), затем формулируется задание и сразу следует подробное описание шагов по его выполнению. На протяжении изучения темы встречается 2–3 задания с готовыми решениями. Темы заканчиваются формулировками заданий 1–4, не содержащих решения. Кроме того, некоторые из тем содержат контрольные вопросы. Проанализируем условия формирования умственных операций учащихся при выполнении заданий из параграфа «Математические функции» темы «Встроенные функции» главы «Технология обработки числовых данных» [31].

Анализ. В данном параграфе учащиеся анализируют категорию электронных таблиц – «математические функции». Проследим, на каком уровне возможно формирование операции анализа. MS Excel, программное средство, на примере которого происходит изучение, содержит порядка пятидесяти различных математических операций. В данном учебнике рассмотрены всего лишь две функции: СУММ и СТЕПЕНЬ. Об остальных функциях не упоминается и не дается никаких заданий для самостоятельного ознакомления учащихся с ними. В ходе такого анализа изучению подвергаются лишь некоторые элементы целого. Не просматривается взаимодействие между элементами. Не производится анализ иерархических отношений функций и категорий, к которым они относятся: почему функция МАКС относится к категории статистических функций, а функция КОРЕНЬ – к категории математических и т. д. Таким образом, с большим основанием можно предположить, что данная методика способна реализовать умственную операцию ана-

лиза на втором из возможных четырех уровней развития данной операции, на уровне элементного, частичного анализа.

Синтез. Синтез и анализ дополняют друг друга, каждый из них осуществляется с помощью и посредством другого. Аналогично в рассматриваемом нами фрагменте учебного материала учащиеся анализируют, чтобы затем синтезировать понятие «математические функции». В ситуации неполного, несистемного анализа невозможно становление операции сложного, системного синтеза, так как полный синтез возможен только при оперировании достаточным количеством элементов. В нашем случае рассмотрено лишь два элемента, две функции. При этом знание или незнание о существовании других более чем сорока функций из данной категории не влияет на решение разобранной в параграфе задачи, так как в инструкции подробно сказано, где и как нужно щелкнуть мышкой, чтобы выполнить нужное действие. Итак, при изучении информационных технологий по данной методике происходит формирование частичного синтеза.

Сравнение. В параграфе «Математические функции» отсутствуют какие-либо признаки организации операции целенаправленного сравнения. Их нет ни в теоретической, описательной части материала, ни в практической.

Абстракция. Мы уже упоминали о том, что для облегчения абстракции необходимо по возможности уменьшать воздействие несущественных признаков и отношений изучаемых предметов или явлений. Внутренняя структура учебного материала выстроена таким образом, что данная рекомендация не выполняется. Приведенная в учебнике технология решения задач состоит из 15 действий следующего плана: «выделить ячейку...», «щелкнуть по кнопке...», «нажать клавишу...», «ввести команду...», «выбрать вариант...», «ввести значения...», «ввести число...», «выполнить команду...» и так далее. В данном случае для мыслительного процесса учащегося крайне сложно абстрагировать существенные признаки и ключевые способы действия, выделить их из обилия элементарных действий, приводящих к формальному результату, но не «включающих» умственную операцию абстракции.

Обобщение. В педагогической науке вопрос о развитии обобщения изучается уже достаточно давно, подробно описаны приемы учебной деятельности школьников, развивающие эту мыслительную операцию. Среди них и составление плана, и построение выводов, и составление тезисов и т. д. Но подобных способов организации учебной деятельности школьников в данном фрагменте материала не обнаружено. Кроме того, известно, что обобщаются только абстрагированные общие и существенные признаки, а абстракция, как мы убедились, в данных условиях затруднена и маловероятна. Все это является достаточно веским основанием для вывода о том, что операция обобщения не формируется. Конечно, в результате многократного выполнения схожих действий существует вероятность (но нет никаких гарантий) того, что обобщение все же произойдет, однако уровень сформированного обобщения будет низшим, эмпирическим.

Конкретизация. Рассматриваемая методика содержит конкретные знания сами по себе, но нет конкретизации в строгом смысле как применения общего к частному, как активной деятельности учащегося по конкретизации усвоенного понятия «математическая функция» и общих способов действий с функциями при решении задачи. Помимо этого для формирования полной конкретизации необходимо высшее понятийно-образное обобщение. Анализ методики не выявил признаков данного уровня обобщения. Следовательно, конкретизация может не произойти вовсе или может быть только частичной.

Классификация. В тексте рассматриваемого параграфа присутствует такое описание: «Электронные таблицы имеют несколько сотен встроенных функций, которые подразделяются на категории: *Математические*, *Статистические*, *Финансовые*, *Дата и время* и так далее». Это замечание автора не побуждает учащихся к каким-либо действиям, в том числе и умственным. Единственное, что потребуется от учащегося – механическое запоминание данного высказывания для возможного воспроизведения на следующем уроке по требованию учителя. Данная классификация не содержит ни существенных признаков функций, относящихся к тем или иным категориям, ни особенностей их взаимодействия, ни даже примеров конкретных функций, включенных в соответствующие классы. Далее в рассматриваемом фрагменте не обнаружено иных описаний классификаций, нет специальных заданий на классификацию элементов. Как показал анализ психологической литературы по данному вопросу, классификация должна пройти четыре этапа: а) изучение объекта; б) воспроизведение правила; в) соотнесение существенных признаков единичного объекта с такими же признаками приведенного правила; г) дедуктивное умозаключение. В данном случае эти этапы не реализованы, значит, нельзя считать операцию классификации сформированной.

Систематизация. Анализируемый фрагмент не содержит специальных заданий на систематизацию объектов или систематизацию учебного материала. Не выполняется ни одно из трех правил, являющихся обязательными для успешной систематизации. Кроме того, прежде чем систематизировать какие-либо объекты, их необходи-

мо классифицировать, но классификация не совершена, соответственно, операция систематизации также, вероятно, не произойдет.

Итак, в ходе исследования данной методики обнаружили себя лишь низшие уровни мыслительных операций: элементный анализ, частичный синтез, эмпирическое обобщение, частичная конкретизация. Четыре оставшиеся операции, вероятно, вовсе не включены в мыслительный процесс, среди них: сравнение, абстракция, классификация и систематизация. Но как показывают данные научных работ [6], учащимся старших классов уже доступны высшие уровни операций мышления, такие, как системный анализ и синтез, понятийно-образное научное обобщение, полная конкретизация, четвертый, высший, уровень классификации. Таким образом, становится очевидным противоречие между возрастными психическими возможностями школьников и уровнем организации мыслительных процессов, обусловленных традиционными методиками изучения информатики в школе.

Вполне возможно, что наиболее способные школьники, умственные операции которых сформированы и превращены в навык мышления на предыдущих этапах обучения или в рамках других предметов, покажут неплохой уровень анализа, синтеза, обобщения и конкретизации, смогут отделить существенное от несущественного в ходе абстракции. Но это будет скорее исключение, чем правило в общей массе учащихся.

Задачей педагога должна стать организация такого учебного процесса, при котором большинство учащихся старших классов, изучающих информатику в школе, активизировали бы высшие уровни умственных операций, доступные им в таком возрасте, развивая тем самым мышление в целом.

Примечания

1. *Абульханова-Славская, К. А.* Личностные типы мышления [Текст] / К. А. Абульханова-Славская // Когнитивная психология: Материалы советско-финского симпозиума. М.: Наука, 1986. С. 98–130.

2. *Брушлинский, А. В.* Субъект: мышление, учение, воображение [Текст] / А. В. Брушлинский. М.: Изд-во «Институт практической психологии»; Воронеж: НПО «Модэк», 1996. 392 с.

3. *Менчинская, Н. А.* Очерки психологии обучения арифметике [Текст] / Н. А. Менчинская. М.: Учпедгиз, 1947.

4. *Пиаже, Ж.* Избранные психологические труды [Текст] / Ж. Пиаже. М.: Просвещение, 1969.

5. *Рубинштейн, С. Л.* О мышлении и путях его исследования [Текст] / С. Л. Рубинштейн. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

6. *Абраменко, В. И.* Аналитико-синтетическая мыслительная деятельность школьников V–VII классов (при усвоении некоторых тем курса русского языка средней школы) [Текст] / В. И. Абраменко // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. Т. 159. Л.: Изд-во ЛГПИ, 1958.

7. *Богоявленский, Н. Д.* О некоторых особенностях анализа и синтеза при усвоении знаний [Текст] / Н. Д. Богоявленский // Вопросы психологии. 1956. № 2.

8. *Брушлинский, А. В.* Указ. соч.

9. *Калмыкова, З. И.* Процессы анализа и синтеза при решении арифметических задач [Текст] / З. И. Калмыкова // Известия АПН РСФСР. Вып. 71. 1955.

10. *Люблинская, А. А.* Анализ и синтез в учебной работе младшего школьника [Текст] / А. А. Люблинская // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. Т. 159. Л.: Изд-во ЛГПИ, 1958.

11. *Менчинская, Н. А.* Указ. соч.

12. *Рубинштейн, С. Л.* Указ. соч.

13. *Шардаков, М. Н.* Мышление школьника [Текст] / М. Н. Шардаков. М.: Учпедгиз, 1963. 256 с.

14. *Калмыкова, З. И.* Указ. соч.

15. *Богоявленский, Н. Д.* Указ. соч.

16. *Менчинская, Н. А.* Указ. соч.

17. *Шардаков, М. Н.* Указ. соч. С. 121.

18. *Бочкарева, Т. И.* Образное и понятийное в формировании у старших школьников типичного литературного образа [Текст] / Т. И. Бочкарева // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. Т. 96. Л.: Изд-во ЛГПИ, 1954.

19. *Семенова, А. П.* Некоторые вопросы понимания школьниками аллегории [Текст] / А. П. Семенова // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. Т. 96. Л.: Изд-во ЛГПИ, 1954.

20. *Скрипченко, А. В.* Особенности обобщения у учащихся I–II классов [Текст] / А. В. Скрипченко // Материалы психологического совещания, 1955, сб. АПН РСФСР. 1957.

21. *Швачкин, Н. Х.* Экспериментальное изучение ранних обобщений ребенка [Текст] / Н. Х. Швачкин // Известия АПН РСФСР. Вып. 54. 1954.

22. *Давыдов, В. В.* Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. М.: Педагогика, 1986. 240 с.

23. *Народицкая, Г. Д.* Сложная динамическая структура у детей различных возрастов [Текст] / Г. Д. Народицкая // Труды ин-та Высшей нервной деятельности, серия патофизиология. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1956.

24. *Ярощук, В. Л.* Формирование понятий о типе задач [Текст] / В. Л. Ярощук // Известия АПН РСФСР. № 2. 1957.

25. *Гальперин, П. Я.* Основные результаты исследования по проблеме «Формирование умственных действий и понятий» [Текст] / П. Я. Гальперин. М.: Изд-во МГУ, 1965. 51 с.

26. *Менчинская, Н. А.* Указ. соч.

27. *Дьяченко, Н. З.* Развитие мыслительного процесса классификации у школьников II–VII классов [Текст] / Н. З. Дьяченко // Ученые записки ЛГПИ им. Герцена. Т. 96. Л.: Изд-во ЛГПИ, 1954.

28. *Кушков, Н. Г.* Воспитание мышления учащихся в процессе начального и повторного изучения материала [Текст] / Н. Г. Кушков // Вопросы воспитания мышления в процессе обучения. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1949.

29. *Шардаков, М. Н.* Указ. соч.

30. *Угринович, Н. Д.* Информатика и информационные технологии. 10–11 класс [Текст] : допущен в качестве учебника для классов естественно-математического профиля / Н. Д. Угринович. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 512 с.

31. *Угринович, Н. Д.* Указ. соч. С. 367–368.

Т. Н. Суворова

ФОРМИРОВАНИЕ УМСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИНФОРМАТИКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПРОЕКТОВ

В статье рассматривается теория планомерно-поэтапного формирования умственных действий и понятий П. Я. Гальперина. Анализируется одна из проектных методик изучения информационных технологий в школе с целью выявить степень выполнения выделенных в теории условий умственного развития учащихся.

Для большинства специалистов в области педагогики и психологии имя П. Я. Гальперина ассоциируется с созданной им всемирно известной теорией планомерно-поэтапного формирования умственных действий и понятий. В действительности его вклад в научное знание значительно шире. П. Я. Гальпериным сформулирован уникальный по своей целостности и системности подход к сущности психических явлений и процессов, к механизмам их формирования и развития. Основными составляющими концепции П. Я. Гальперина являются учение о предмете психологии, объективной необходимости психики, об основных закономерностях ее развития в фило-, антропо- и онтогенезе, о закономерностях формирования элементов психической деятельности.

В учении о предмете психологии П. Я. Гальперин рассматривает ориентировочную деятельность как генеральное жизненное предназначение психики. Действия человека в отличие от действий животных обладают двумя существенными особенностями. Первая особенность – «бинарная структура всякого человеческого действия, включающая в себя ориентировочную (регулирующую, направляющую, контролирующую) и исполнительную части» [1, с. 13]. Вторая особенность действий человека заключается в его опосредованности различными психологическими орудиями – схемами, формулами, знаками и т. д.

Действие – единица анализа деятельности учащихся. Задачей учителя является не только выделение действий, входящих в различные виды познавательной деятельности учащихся, но и понимание их структуры, функциональных частей, основных свойств, этапов и закономерности их становления. Действие представляет собой целостную систему взаимосвязанных элементов. В ходе выполнения действия эти элементы обеспечивают *три основные функции: ориентировочную, исполнительную, контрольную.*

Рассмотрим *исполнительную часть* действия. Н. Д. Гордеева определяет её следующим образом: «Если действие имеет отчетливо выраженную внешнюю форму, его называют исполнительным – предметным в широком смысле этого слова. Если действие не имеет отчетливо выраженной внешней формы, его называют психическим или когнитивным (перцептивным, мнемическим, умственным)» [2, с. 28]. Е. И. Машбиц, предварительно ссылаясь на П. Я. Гальперина, пишет: «Исполнительная часть непосредственно обеспечивает преобразование объекта (перевод его из одного состояния в другое, замещение одного объекта другим и т. д.). Характер этого преобразования задается тем отношением между объектами, которое соответствует определенному действию. Поскольку это отношение всегда предметно, содержательно, то различают математические, грамматические, физические и другие отношения» [3, с. 65].

Ориентировочная часть является центральной, и именно она обеспечивает успех действия. Ее можно раскрыть как процесс использования ориентировочной основы действия. Обычно, когда говорят о действии, имеют в виду его *исполнительную часть* и забывают о том, что само исполнение в решающей степени зависит от ориентировки субъекта в условиях этого действия. Ориентировочная часть намечает пути и способы действия, а исполнительная часть их реализует. Как отмечал П. Я. Гальперин, «поскольку характер и успешность исполнения непосредственно зависят от ориентировочной части, основную задачу формирования действия составляет формирование его ориентировочной части; изменения исполнительной части являются вторичными» [4, с. 5]. Однако и учителя и учащиеся, часто недооценивая ориентировочную часть действия, спешат направить процесс обучения к исполнительной части, т. е. к преобразованию предмета действия, к получению результата.

Контрольная часть направлена на проверку правильности как результатов ориентировочной части, так и исполнительной, на слежение за ходом исполнения, на проверку соответствия его намеченному плану. В случае обнаружения ошибки, отклонения от правильного пути необходима коррекция, исправление. В контрольной части повторяется и момент ориентировки, и момент исполнения, и соотнесения того и другого. Эта составляющая способа действия, связана, как было впервые доказано школой П. Я. Гальперина, с особой функцией внимания в структуре действия. Но «внимание есть не всякий контроль, а контроль, ставший идеальным, сокращенным,

СУВОРОВА Татьяна Николаевна – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Суворова Т. Н., 2007

автоматизированным действием» [5, с. 280]. Пока контрольная часть действия остается развернутой, она сама требует внимания, сложившегося прежде. В некоторых случаях контрольно-корректировочная часть рассматривается П. Я. Гальпериным в составе ориентировки действия, но с уточнением, что этот компонент «может вырастать в большую самостоятельную специфическую деятельность». Различные виды контроля являются обязательным компонентом учения.

В разных действиях *ориентировочная, исполнительная и контрольная части* представлены не в одинаковой степени – любая из них может превалировать или даже стать самостоятельным действием. В этом случае, например, может быть дано специальное задание на ориентировку: составление плана решения или выделение условий, которые необходимо учитывать при решении задачи; на контроль: ученик не получает нового результата, а лишь проверяет правильность выполненной работы; на исполнение: если учитель выполнит за ученика ориентировочную часть и проведет контроль.

«Всякое учение всегда реализуется действием или цепью действий» [6, с. 46]. Такова позиция деятельностного подхода по отношению к образовательной области. При этом отмечается, что предметом обучения учащихся должны быть *ориентировочная и контрольная часть* действия, а «чисто исполнительные функции должны быть по возможности исключены из учебного процесса, потому что они формируют механические навыки, не обеспечивают понимания» [6, с. 99]. Действительно, трудно переоценить роль когнитивных компонентов действия: без предвидения, т. е. без цели, действие не может начаться, без оценки и контроля оно лишь случайно может оказаться эффективным.

П. Я. Гальпериным и Н. Ф. Талызиной сформулирован функционалистический подход к определению места операций в структуре действия. То есть, выстраивая соотношение операций по изучению информационных технологий и собственно психических операций, необходимо опираться на цели, преследуемые субъектом при выполнении той или иной операции и исходя из полученных данных при определении целей и функций относить эти структурные единицы к ориентировочной, исполнительной или контрольной частям действия.

По способу организации ориентировочной деятельности П. Я. Гальперин выделяет три типа учения.

Обучение *по первому типу* характеризуется отсутствием значительной части условий, необходимых для правильного выполнения нового действия. При таком типе учения объяснение того или иного действия сводится к его однократной демонстрации, показу образца и к очень неполному словесному описанию по ходу показа. Дефицит начальных условий становится причиной большого числа характерных для данного типа учения проб и ошибок. На тех участках действия, для которых у ученика нет нужных указаний и ориентиров, он действует вслепую, и лишь в результате многочисленных проб осваивает данное действие. Даже сформированное действие остается для ученика не полностью осознанным, перенос этого действия на новые объекты, решение новых задач с помощью этого действия весьма ограниченны. «Первый тип учения у большинства детей в лучшем случае ведет к накоплению узких знаний и умений и не развивает ни мышление, ни тем более способностей» [7, с. 32].

Однако всю систему необходимых условий можно заранее изложить и в готовом виде предоставить учащимся. Вся ориентировочная сторона, которая, собственно, заключена в эту систему условий, дается сразу. На ней не останавливаются и переходят к исполнительному действию учащихся – это характеристика *второго типа* учения. «Здесь каждое действие соотнесено со своими объективными условиями и в меру этого разумно. Здесь уже нет слепых проб, ошибки возникают лишь по “невнимательности”, становятся случайными и несущественными. Четкие признаки объекта и ясная траектория действия освобождают ученика от влияния несущественных изменений обстановки и расширяют область применения знаний и умений... так как при формировании новых действий и понятий по II типу устраняется самый длительный и трудный период выяснения существенных признаков и свойств объекта, с одной стороны, и становления нового действия – с другой, то в результате по сравнению с учением по I типу получается большая экономия времени, сил и материальных средств» [7, с. 4]. Итак, учение по второму типу лишено таких недостатков первого типа, как большое количество ошибок, значительные затраты времени и сил учащихся. Но при систематическом общем обучении начинает выступать существенный недостаток второго типа – «он опирается на отличительные характеристики отдельных конкретных объектов, и перенос на новые объекты ограничен их внешним сходством» [7, с. 33]. Поэтому для новых объектов систему необходимых условий приходится составлять заново и снова преподносить ее ребенку в «готовом виде». Еще более существенный недостаток второго типа учения состоит в том, что он имплицитно воспитывает определенное отношение к предмету и процессу учения. Так как система начальных условий уже содержит всю необходимую в данный момент информацию, то активность ученика направляется не на открытие неизвестного, а на

усвоение «готового знания»; воспитание теоретического, познавательного интереса к знанию, к сожалению, не происходит [7, с. 34].

И, наконец, третий тип учения характеризуется полной системой условий, которая не задается в готовом виде, а наоборот, строится самим учащимся, который исходит из проблем, возникающих при столкновении фактов. Двигаясь шаг за шагом под руководством учителя, он составляет схему ориентировочной основы действия, в которой «ориентиры представлены в обобщенном виде, характерном для целого класса явлений» [8, с. 87]. В таком случае решение отдельной, частной задачи отступает на второй план. На первый план выходит все большее проникновение в предмет, что создает совершенно новую установку на само исследование. «Такая установка на исследование объектов как бы заранее подготавливает широкий перенос на другие области, связанные с теми или такими же структурами» [7, с. 39]. Причем вместе с гораздо более высокими интеллектуальными возможностями развивается и внутренняя, собственно познавательная мотивация учения. В третьем типе учения эффект общего развития мышления проявляется не только в самостоятельном распространении усвоенных приемов исследования на дальнейшие разделы того же учебного предмета и за его границы, но и разных формах интеллектуальной деятельности.

В соответствии с этой теорией главным содержанием обучения должны быть общие способы действий по решению широких классов задач, чтобы деятельность учащихся была направлена на овладение этими общими способами. П. Я. Гальперин писал: «Все приобретения в процессе учения можно разделить на две неравные части: одну составляют новые общие схемы вещей, которые обусловливают новое их видение и новое мышление о них, другую – конкретные факты и законы изучаемой области, конкретный материал науки. По общей массе вторая часть намного превышает первую, но в такой же мере уступает ей в значении для развития мышления» [9, с. 24].

Итак, П. Я. Гальпериным были сформулированы основные положения, следование которым является непременным условием умственного развития учащихся. Выделим из них следующие.

1. Предметом обучения должны быть ориентировочная и контрольная части действия, исполнительные функции должны быть по возможности исключены из учебного процесса, потому что они формируют механические навыки, не обеспечивают понимания, не способствуют развитию мышления, умственных способностей.

2. В основу организации обучения умственным действиям должен быть положен третий тип учения, когда учащиеся самостоятельно, на основе данных им общих принципов, составляют ориентировочную основу действий.

Далее на примере одной из проектных методик изучения информационных технологий проанализируем, выполняются ли эти условия умственного развития учащихся. В качестве объекта анализа выберем (случайным образом) методику изучения информатики на основе метода проектов С. В. Малясовой [10].

Название проекта: «Программируем на языке Паскаль. Задачник-решебник». Описание проекта содержит перечень технических средств, необходимых для его реализации, цели проекта для учителя и для учащихся, сформулирована идея проекта, обоснована его типология, выполнение проекта разбито на четыре этапа, продумана дифференциация по уровням подготовки учащихся и приведены рефлексивные высказывания учащихся по результатам проекта.

Идея проекта была обусловлена тем, что группа учащихся, увлекающихся программированием, за несколько лет решила большое количество различных задач, из которых задумали «собрать» электронный учебник, предназначенный для использования в практике программирования учителем и учащимися на уроках информатики. Задачник-решебник содержит теоретический материал по каждому разделу, задачи с вариантами решения, задачи для самостоятельного решения, проверочные тесты.

На *первом этапе* работы над проектом группа учащихся формирует структуру проекта: определяет разделы, главы учебника. Между участниками распределяются задания по темам. Например, один учащийся выполняет задание по темам «Следование» и «Ветвление», другой – по теме «Массивы» и т. д. В ходе этого этапа у участников проекта, с одной стороны, формируется общее представление о структуре их дальнейшей деятельности, с другой – происходит ориентировка в уже изученном школьниками материале, так как в данном случае пройденный материал рассматривается учащимися с точки зрения новых целей. Участники проекта выступают не в своей прежней роли – роли изучающих информатику, а в роли учителя, и должны задуматься о том, как структурировать материал электронного учебника, как построить изложение теории, как организовать тестирование и т. д. Таким образом, на первом этапе ориентировочные действия учащихся будут превалировать.

На *втором этапе* начинается индивидуальная работа учащихся: подбор теоретического материала по своему разделу. Они изучают большое количество учебной литературы и выбирают самую важную информацию – снова наблюдается

преобладание ориентировочных действий. Далее на протяжении второго этапа участникам проекта необходимо разработать вопросы для теста и подобрать задачи для самостоятельного решения. В ходе выполнения этой работы учащиеся невольно переносятся на позиции учителя и, исходя из сложившегося у них опыта, предполагают основные затруднения обучающихся по их задачнику, выделяют ключевые моменты в теории и практике, на которые должны быть нацелены вопросы проверочных тестов. Здесь необходимо подключение контрольных действий учащихся. В некоторых других методиках иногда приходится встречать способы организации действий школьников, связанных с самоконтролем или контролем действий одноклассника. В этом случае контроль представляет собой «выполняемое действие» [1, с. 8], происходящее «здесь-и-сейчас». Можно констатировать, что в данной проектной методике используется несколько иной способ – контроль организуется в плане образа, в ситуации «намечаемого действия» [1, с. 8]. А это когнитивно более высокий уровень действия.

Третий этап посвящен анализу собранной информации с целью обнаружения недостатков, недочетов. Здесь мы снова наблюдаем побуждение к активизации действий контроля. Если были выявлены недостатки, учащиеся исправляют их, редактируют форму и стиль изложения теоретического материала и тестовых вопросов – это не что иное, как корректировочные действия. Только после окончания контроля и корректировки учащиеся приступают к созданию макета учебника, который выполняется в MS Word. Этот этап является исполнительным по функции, которую он выполняет в данном проекте – происходит внешне наблюдаемое действие, преобразование информации с явно ощутимым и конкретным результатом (в отличие от когнитивных действий, когда внешние проявления действия являются лишь вспомогательными для основного умственного действия, например, запись на листочке или электронном носителе разрабатываемой структуры проекта). Данный этап деятельности, несомненно, будет содержать отдельные ориентировочные и контрольно-корректировочные действия, поскольку создание макета выполняется учащимися самостоятельно, а не по готовым инструкциям. В ходе такой деятельности зачастую возникают проблемные ситуации, а для их решения потребуется выполнение и ориентировочных, и контрольных, и, возможно, корректировочных действий. Таким образом, мы приходим к выводу, что исполнительные действия на данном этапе преобладающими не являются.

На *четвертом этапе* каждый участник, используя средства создания web-страниц (прежде всего языка HTML, JavaScript), создает в текстовом редакторе Блокнот страницы электронного учебника согласно собранной им информации. Страницы выполняются в едином стиле, а затем объединяются с помощью гиперссылок в общий документ – электронный учебник «Программируем на языке Паскаль. Задачник-решебник». В общей структуре деятельности по созданию проекта – это исполнительный этап – в ходе него создается конечный продукт (электронный учебник). Но если внедриться в структуру этой деятельности, мы снова обнаружим в ней отдельные ориентировочные и контрольно-корректировочные действия. Так, прежде чем заполнить web-страницы собранной на предыдущем этапе информацией (исполнительные действия), нужно сначала создать дизайн, используя HTML и JavaScript (преимущественно ориентировочные действия), затем проверить с помощью браузера, совпадает ли полученное и намеченное (контрольные действия), если не совпадает, внести изменения в управляющую или отображаемую часть страницы (корректировочные действия). Аналогично разработка стиля оформления представляет собой преимущественно ориентировочные действия, применение уже разработанного стиля – исполнительные действия, анализ полученного результата – контрольные действия, исправление недочетов на любом из предыдущих этапов – корректировочные действия. Еще один пример: освоение приемов добавления гиперссылки в документ – ориентировочные, применение освоенных приемов – исполнительные, анализ эффективности работы гиперссылок – контрольные, повторная настройка гиперссылок в случае обнаружения ошибок – корректировочные действия. Итак, исполнительные действия на этом этапе также не превалируют.

Остается определить, к какому типу учения относится данная методика. Признаки первого типа (дефицит начальных условий) и второго типа (вся система необходимых условий изложена заранее и в готовом виде предоставлена учащимся) не наблюдаются. Проанализируем, присутствуют ли в данной методике признаки обучения по третьему типу:

a) полная система условий и схема ориентировочной деятельности, составленная учащимися самостоятельно под руководством учителя;

b) ориентиры представлены в обобщенном виде, характерном для целого класса явлений, решение частной задачи вынесено на второй план;

c) распространение приемов на другие разделы предмета и за его границы, в разных формах интеллектуальной деятельности.

О полноте системы начальных условий свидетельствует то, что участники проекта хорошо знакомы с учебным материалом, который впоследствии должен стать содержанием учебника, сами

владеют приемами, которым намерены обучить своих читателей. Вся деятельность учащихся – и не только на начальном ориентировочном этапе, но и на остальных этапах – самостоятельная и выполняется под руководством учителя, что позволяет делать процесс обучения наиболее эффективным и в то же время управляемым. В данной методике в конце описания каждого этапа отдельными пунктами выделяется роль учителя. Вот несколько примеров: на первом этапе – «помощь в определении темы и разработке проекта», на втором этапе – «рекомендации по подготовке, сбору информации, составлению вопросов» и т. д. [10, с. 12]. Таким образом, можно констатировать наличие в рассматриваемой нами методике первого признака учения по третьему типу.

Судя по тому как описана в методике роль учителя, ориентиры даются не для каждого конкретного случая, а обобщенно. Например, как составлять вопросы (не какой-то конкретный вопрос, а целый класс – учебные вопросы для контрольного тестирования)? Или другой пример: консультация учителя «по способам размещения информации в электронном учебнике» [10, с. 12] (не в данном формируемом учебнике, а в электронных учебниках вообще). При помощи таких приемов абстрагирования и обобщения происходит постепенный вынос частной задачи на второй план. А решение частной задачи по ходу выполнения проекта лишь конкретизирует обобщенные до этого знания. Происходит процесс гармоничного взаимодействия умственных операций. Итак, выделен еще один признак третьего типа учения.

Имея опыт создания электронного учебника по одному разделу информатики, учащиеся смогут уже вполне самостоятельно создать подобные учебники и по другим разделам предмета. Возможен перенос сформированных приемов и за пределы информатики, например, для создания электронных задачников по физике, математике и т. д. Помимо этого отдельные виды деятельности, которые были освоены учащимся в процессе подготовки данного проекта, могут быть использованы в различных ситуациях, не имеющих отношения к созданию электронного учебника. Например, умение самостоятельно определить тему предстоящего проекта, наметить структуру деятельности, умение искать информацию, формулировать вопросы – являются общеучебными умениями, но могут быть применены учащимися и вне учебной деятельности. Вышеперечисленное составляет последний признак обучения по третьему типу.

Итак, анализ проектной методики изучения информационных технологий на предмет соответствия условиям, необходимым для умственного развития школьников (П. Я. Гальперин) позволил сделать следующие общие выводы.

1. При организации данного проекта как в целом, так и в отдельных этапах выдерживается последовательность основных элементов деятельности: ориентировочные действия → исполнительные действия → контрольно-корректировочные действия.

2. Когнитивные действия (ориентировочные и контрольно-корректировочные) в рассматриваемой методике являются преобладающими; проект предусматривает выделение самостоятельных этапов для выполнения ориентировочных (1-й этап и часть 2-го этапа) контрольно-корректировочных действий (значительная часть 2-го и 3-го этапов). Исполнительные (по назначению) этапы в своей структуре также содержат когнитивные действия (часть 3-го и 4-й этапы).

3. Данная методика нацелена на реализацию третьего типа учения, наиболее эффективного для общего развития мышления учащихся.

Примечания

1. *Подольский, А. И.* Вступление к первому изданию [Текст] / А. И. Подольский // Гальперин П. Я. Лекции по психологии. М.: КДУ, 2005. С. 3–21.

2. *Гордеева, Н. Д.* Экспериментальная психология исполнительного действия [Текст] / Н. Д. Гордеева. М.: Тривола, 1995. 324 с.

3. *Машбиц, Е. И.* Психолого-педагогические проблемы компьютеризации обучения [Текст] / Е. И. Машбиц. М.: Педагогика, 1988. 192 с.

4. *Гальперин, П. Я.* Основные результаты исследования по проблеме «Формирование умственных действий и понятий» [Текст] / П. Я. Гальперин. М.: Изд-во МГУ, 1965. 51 с.

5. *Гальперин, П. Я.* Лекции по психологии [Текст] / П. Я. Гальперин. М.: КДУ, 2005. 400 с.

6. *Талызина, Н. Ф.* Педагогическая психология [Текст] / Н. Ф. Талызина. М.: Издательский центр «Академия», 2002. 297 с.

7. *Гальперин, П. Я.* Актуальные проблемы возрастной психологии. Материалы к курсу лекций [Текст] / П. Я. Гальперин, А. В. Запорожец, С. Н. Карпов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 118 с.

8. *Талызина, Н. Ф.* Управление процессом усвоения знаний [Текст] / Н. Ф. Талызина. М., 1975.

9. *Гальперин, П. Я.* К исследованию интеллектуального развития ребенка [Текст] / П. Я. Гальперин // Вопросы психологии. 1969. № 1. С. 15–25.

10. *Малясова, С. В.* Творческий проект – от идеи до разработки [Текст] / С. В. Малясова // Информатика и образование. 2005. № 9. С. 10–19.

О. В. Токмакова

ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРЕЗЕНТАЦИЙ НА УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЯХ

В статье рассмотрены наиболее повторяющиеся ошибки применения, а также показаны пути повышения эффективности использования презентаций на учебных занятиях.

Под средствами информационных и коммуникационных технологий (ИКТ), как правило, понимаются программные, программно-аппаратные и технические средства и устройства, функционирующие на базе микропроцессорной, вычислительной техники, применяемые для транслирования информации, информационного обмена и обеспечивающие операции по сбору, продуцированию, накоплению, хранению, обработке, передаче информации и возможность доступа к информационным ресурсам компьютерных сетей, в том числе и глобальных [1]. Одно из наиболее популярных средств ИКТ – презентации, созданные в программе Microsoft PowerPoint. Такая презентация представляет собой набор слайдов, в которых можно широко использовать текстовую, графическую, звуковую и видеоинформацию, готовые варианты дизайна. Не следует отождествлять электронный учебник и презентацию. Это разные объекты по технике и принципам изготовления, по целям использования. Стоит хотя бы напомнить о том, что презентации – это сопроводительный материал к лекционному курсу, и он никогда не заменит педагога, а вот электронный учебник может периодически присваивать себе такие функции. Активное применение презентаций требует внимательного отношения к проблемам проектирования и использования их на учебном занятии. Обозначим наиболее повторяющиеся ошибки применения и покажем пути повышения эффективности презентаций на учебных занятиях.

Ситуация 1. Расстановка приоритетов. Педагог пытается работать с новым дидактическим средством по старинке, помещая на слайд текст из учебника или картинки. На самом деле возможности презентации намного шире, чем примитивная демонстрация страницы из учебного пособия на экране. И другая крайность. Преподаватель, увлеченный новым дидактическим средством, придает ему слишком большое значение, забывая о целях занятия, о том, что презентация – это всего лишь средство обучения. Такая однобокость в восприятии приводит к нарушению логики процесса познания у студентов.

Ситуация 2. Последовательность слайдов. Иногда педагоги, использующие презентации на своих занятиях, опасаются свободного диалога, считая, что это может привести к отклонению от общего плана, будет нарушена последовательность слайдов и т. п. На самом деле преподаватель, использующий презентации, как правило, свободен в обращении с объемом и последовательностью изложения информации, он в любой момент может легко вернуться к началу занятия или забежать вперед, какие-то моменты в изложении пропустить, а на каких-то – остановиться подробнее. Отклонение от изначального плана в беседе будет нетрудно осуществить, если презентацию создавал он сам и сам же управляет ею на занятии.

Ситуация 3. Структурирование информации. У некоторых педагогов слайды представляют собой текстовую информацию большого объема (более 30 слов на слайде!). Была ситуация, когда в течение одного занятия учащимся пришлось просмотреть 153 слайда, каждый из которых содержал текстовую информацию объемом примерно 90–100 слов. В течение минуты обучаемые в быстром темпе прочитывали около 200 слов, отвечали на вопросы педагога, что-то даже успевали записать в тетради. Качество такого занятия, безусловно, вызывает сомнения. В этом случае стремление педагога сообщить информацию превышает желание аудитории получить ее. Не стоит пытаться на таких занятиях давать всеобъемлющую информацию по теме. Для педагога важно грамотно структурировать содержание учебного материала, выбрать из всего известного ему самое значимое и суметь проблематизировать его так, чтобы обучаемым захотелось остальное добыть самостоятельно. Цель лекции-презентации заключается в инициировании любопытства и стимулировании желания получить как можно больше информации по обсуждаемому вопросу во время последующей самостоятельной работы.

Ситуация 4. Приемы работы на занятии. Педагог предлагает поработать с информацией, таблицей или схемой, представленными на слайде. Однако ему непривычно находиться в пассивной роли на занятии. Он или полностью читает текст, забывая о том, что обучаемые это могут сделать намного быстрее сами, или пытается комментировать слайды, или вообще рассказывает о чем-нибудь постороннем. Его ученики отвлекаются, их внимание рассеяно, работа со слайдом идет формально – цели обучения не достигаются. Иногда педагог по разным причинам разрабатывает презентацию не сам, а поручает эту работу кому-нибудь, например лабо-

ТОКМАКОВА Ольга Викторовна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре информатики и методики обучения информатике ВятГГУ
© Токмакова О. В., 2007

ранту или ассистенту. На занятиях со слайдами за компьютером работает посторонний человек, а педагог время от времени дает указания для демонстрации очередной картинки. В этой ситуации может ярко проявиться ошибка несогласованности действий. Примеры таких ошибок мы часто наблюдаем во время выступлений докладчиков на конференциях, когда презентация используется в качестве сопроводительного материала к основным моментам выступления. При этом докладчик не видит демонстрационный экран, а техник, демонстрирующий слайды, не всегда свободно ориентируется в видеоряде и тексте. Поражает терпимость, спокойствие и вежливость аудитории, на восприятии которой ставятся такие эксперименты.

Ситуация 5. Система обратной связи с аудиторией на занятии. У лекции с мультимедийным сопровождением особые принципы, правила и техники реализации. Далеко не всегда на таких занятиях срабатывают типичные приемы связи с аудиторией, приемы побуждения слушателей к самостоятельной работе или приемы активизации их деятельности. Педагоги, впервые использующие презентации во время своих занятий, отмечают, что поведение обучаемых изменяется, нет полной сосредоточенности, как на обычной лекции, приходится использовать специальные приемы, чтобы постоянно удерживать внимание аудитории. Это связано с тем, что на таких занятиях вместе с целями изменяются и функции преподавателя. Лекция-презентация отличается от лекции, идущей в традиционном режиме, хотя бы тем, что лекция-презентация нужна для того, чтобы стать предтечей самостоятельной работы, а цель традиционной лекции – как можно подробнее информировать студентов по конкретной теме. Поэтому для педагога в первую очередь становится важнее организовать деятельность обучаемых и управлять ею, а не только информировать.

Ситуация 6. Подведение итогов занятия. Занятие завершается банальной фразой на экране: «Спасибо за внимание», итоги не подводятся, обобщение отсутствует, нет повторения главных идей занятия, нет возврата к началу... У такого занятия отсутствует окончание как таковое, а у обучаемых оно не вызывает вопросов, желания пообщаться с педагогом подробнее по теме занятия. Лекция-презентация терпит неудачу, если после нее не возникает стремления подробнее изучить предмет обсуждения.

Ситуация 7. Информационный дизайн. Педагог, освоивший элементарные способы работы в программе Microsoft PowerPoint, не придает значения законам и принципам создания презентаций. В разработанной им презентации невооруженным взглядом заметны дизайнерские просчеты, к месту и не к месту используется анимация, бросаются в глаза буйство красок, несоразмерность шрифтов и невыдержанность элементарных типографских требований или, наоборот, уже на третьем-четвертом слайде аудитория начинает скучать из-за однообразия визуального ряда и т. п. Особенно неприятно, когда в тексте слайдов обнаруживаются орфографические, пунктуационные и речевые ошибки.

Проанализировав эти и некоторые другие ситуации неудачного применения презентаций на учебных занятиях, мы выходим на две группы проблем: проблемы разработки презентаций к учебным занятиям и проблемы использования презентаций на учебных занятиях. Первая группа проблем связана с разработкой новых подходов и принципов информационного дизайна. Вторая – с методикой использования презентаций на учебных занятиях. Предоставим специалистам в сфере информационного дизайна разработку первой проблемы. Вторая проблема требует методического решения.

На факультете информатики ВятГГУ с успехом применяются новые информационные и коммуникационные технологии обучения. Опыт работы наших преподавателей позволяет, несмотря на принципиальную разницу в назначении, целях и содержательной основе разных типов лекций-презентаций, выделить общие черты в их разработке и реализации.

В настоящее время наиболее четко сформированы следующие виды лекций-презентаций:

- «презентация идеи»,
- «тематическая презентация»,
- «презентация теории»,
- «историческая презентация»,
- «презентация проблемы»,
- «персональная презентация»,
- «презентация проекта»,
- «презентация эксперимента» и др.

Преподаватель начинает подготовительную работу с формулировки цели презентации по отношению к изучаемому материалу и аудитории. Как только он определит точную цель, детально выяснит, для какой аудитории будет проводиться занятие, что уже известно студентам, что им хочется узнать и каковы их интересы, можно планировать общую логику презентации: зачем, для чего, что, за какое время и в какой последовательности собирается говорить преподаватель на занятии. Все хорошие презентации похожи друг на друга и состоят, как правило, из трех частей: вступление, основная часть и подведение итогов.

Презентация начинается со *вступления*: приветствие и краткая информация о преподавателе (если он не знаком с аудиторией); цели и план

презентации; организационные моменты. Наиболее успешные приемы начала лекции-презентации: «блиц-опрос», «интервью», «две противоречивые цитаты», проблемный вопрос, задание или задача и др. Названия приемов любому педагогу говорят сами за себя и не требуют подробной расшифровки.

Основную часть лекции-презентации также можно структурировать. Обычно в ней выделяют следующие составляющие:

- провокация (логика нарушена),
- осмысление (логика изменена),
- рефлексия (логика восстановлена).

Логика основной части требует проблематизации материала, поэтому педагогу, работающему в таком инновационном режиме на учебном занятии, необходимо владеть приемами современных образовательных технологий (например, технологии развития критического мышления) и умело включать их в ход занятия или вообще всё занятие выстраивать в соответствии с выбранной технологией. Во время основной части лекции-презентации можно использовать приемы «найди ошибку (или противоречие) в рассуждениях» и «послушать, сговориться, обсудить», работу в динамических и вариационных четверках, приемы группового обучения и др. Образовательные технологии нового поколения позволяют существенно изменить способы управления познавательной деятельностью на учебных занятиях, вовлечь обучаемых в активную работу, погрузить в проблемную ситуацию, а также обеспечить необходимую и своевременную педагогическую поддержку их личностного и индивидуального развития. Особо хотелось бы отметить возможность и необходимость освоения учащимися способов работы с текстовой информацией на этом этапе лекции-презентации. Преподаватель, кроме основных задач занятия, может решить еще и задачу формирования способов графической систематизации информации.

Подведение итогов лекции-презентации, как и ее начало, слишком важно, чтобы оставлять это на волю случая. *Итоговый этап* должен быть обдуман заранее и хорошо отрепетирован. При этом следует помнить основной композиционный закон: «цель диктует окончание». Наиболее успешные приемы окончания лекции-презентации: «три вопроса к теме», «шпаргалка», «эстафета мудрых мыслей», «совет самому себе», «две противоречивые цитаты» и др. Итоговый этап по содержанию обычно включает следующие компоненты: краткое резюме важнейших фактов и аргументов, повтор главных слайдов; описание литературы по проблеме; итоговую ключевую фразу и предложение задавать вопросы. Если лекция-презентация удалась, то по ее окончании обязательно происходит свободный диалог со слушателями. По крайней мере, необходимо предусмотреть 5–7 минут для ответа на возможные вопросы аудитории. Если вопросов не возникает – над занятием нужно еще поработать.

Таким образом, возвращаясь к поднятым в начале статьи проблемам, можно сделать вывод о том, что профессорско-преподавательскому составу вузов необходимо осваивать и совершенствовать не только простейшие навыки работы в программе Microsoft PowerPoint, но и умения непосредственно использовать презентации на занятиях. А это значит, что должна быть разработана система обучения преподавателей новым информационным и коммуникационным технологиям, широкое внедрение которых в учебный процесс неизбежно.

Примечания

1. *Селевко, Г. К.* Современные образовательные технологии [Текст] / Г. К. Селевко. М.: «Народное образование», 1998. 256 с.

2. *Джей, Э.* Эффективная презентация [Текст] / Э. Джей; пер. с англ. Т. А. Сиваковой. Минск: «Амалфея», 1997. 208 с.

У. А. Токмакова

МЕТОДИКА СПЕЦИФИКАЦИИ ТРЕБОВАНИЙ К САЙТУ (НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ПРЕЦЕДЕНТОВ)

В статье рассмотрена методика выявления и спецификации требований к сайту в рамках унифицированного процесса на основе UML.

Жизненный цикл любого проекта, в том числе сайта, состоит из нескольких стадий, которые имеют свойство итеративно повторяться. Стадии эти известны:

1) анализ требований;
2) проектирование;
3) разработка;
4) оценка и коррекция;
5) применение на практике.

Начальный этап (анализ требований) является переходным между естественным языком и языком моделирования. Рассмотрим анализ требований, выявив основные принципы построения концептуальной модели проектируемой системы.

Одна из основных предпосылок успешности проекта – участие в разработке на начальном этапе конечных пользователей системы [1]. Это позволяет в оперативном режиме отслеживать появляющиеся вновь требования к системе, тем

ТОКМАКОВА Ульяна Александровна – студентка IV курса факультета информатики ВятГГУ
© Токмакова У. А., 2007

самым повышая ее конкурентоспособность с каждой итерацией унифицированного процесса. Но обеспечить участие конечных пользователей возможно лишь в том случае, если барьер между естественным языком и языком моделирования будет сведен к необходимому минимуму.

Оптимизировать взаимодействие проектировщиков со специалистами в конкретной предметной области позволила идея, высказанная Айваром Якобсоном [2]. Возникающий при описании функциональных требований к системе пресловутый языковой барьер был преодолен с помощью *вариантов использования* (use cases), также называемых *прецедентами*.

Вариант использования позволяет ответить на вопрос: что именно пользователь намерен получить от системы? Строгая, но естественная форма ответа – возможность принимать участие в формализации требований как профессиональным проектировщикам, так и конечным пользователям системы.

Описание вариантов использования производится при помощи построения диаграмм и написания сценариев, их дополняющих.

Для ясности введем некоторые определения:

1. Предметная область (domain) – часть реального мира, которая имеет непосредственное отношение к процессу функционирования системы [3].

2. Исполнитель (actor) – любая сущность, действующая на систему извне. Подразделяются на основных (primary) – тех, кто достигает своих целей с использованием системы – и вспомогательных (supporting) – тех, кто поддерживает деятельность системы.

3. Варианты использования (или прецеденты) – это функции системы, инициатором которых может стать исполнитель.

4. Сценарий (scenario) – последовательное описание взаимодействия исполнителя с системой.

5. Диаграмма прецедентов (use case diagram) – это граф, элементами которого являются варианты использования, исполнители и отношения между ними [4]. В графической нотации UML варианты использования обозначаются эллипсами, исполнители – фигурками «человечка». Подробнее об отношениях будет сказано в п. 4.

Для построения диаграммы вариантов использования необходимо:

1) определить границы моделируемой предметной области;

2) определить основных исполнителей и их цели по отношению к системе;

3) выявить прецеденты;

4) составить сценарии некоторых из них;

5) установить взаимосвязи (отношения) исполнителей и прецедентов.

1. Определение границ предметной области и исполнителей

Выяснение границ интересующей нас *предметной области* подразумевает обязательное привлечение к обсуждению специалиста в этой области, обладающего достаточным уровнем компетенции.

Хорошо ориентирующийся в конкретной сфере специалист способен предусмотреть все внешние сущности, оказывающие влияние на проектируемую систему. В нашем случае *исполнителями* являются посетители сайта, администратор и программные службы.

Результатом работы на этом этапе является черновой вариант документа «Видение», содержащий:

• краткое описание проекта, начинающееся со слов «Нам видится...»;

• экономические предпосылки (обоснование необходимости собственной разработки, а не использования готового продукта);

• формулировку проблемы;

• целевую аудиторию системы и ее отличия от подобных конкурентных;

• список прямо или косвенно заинтересованных в разработке лиц, пользователей;

• разноуровневые цели, перспективы, преимущества и основные свойства системы.

Когда проблема сформулирована и целесообразность проекта ни у кого не вызывает сомнений, группа разработчиков приступает к последовательному уточнению требований к ней. Один из основных методов при этом – определение прецедентов.

2. Определение прецедентов

При выявлении вариантов использования проектируемой системы возникает ряд трудностей. Рассмотрим их подробнее на примере модели сайта организации.

Типичный сайт организации содержит новостную систему, статичный раздел с информацией об организации, каталог ресурсов, форум, поисковый механизм и формы обратной связи (оформление заказа, анкета клиента, отправка сообщения на e-mail и т. п.).

Уровней представления модели такой системы может быть несколько. Зачастую сложно определить целевую установку посетителя сайта. Это может быть «Поиск механизмов взаимовыгодного сотрудничества» или «Отправка руководителю организации сообщения на e-mail». При формулировке прецедентов необходимо придерживаться единого уровня представления согласно следующим принципам:

1) избегать излишне абстрактных вариантов использования, не дающих пользователю каких-либо *ощутимых результатов;*

2) избегать таких подробностей, как описание интерфейса взаимодействия пользователя с системой (мы описываем, *что* должна делать система, а не *как*);

3) в случае если между системой и пользователем имеют место быть несколько типовых операций, рассмотреть возможность их объединения в одну (например, «Изменение пароля», «Изменение параметров рассылки» и «Загрузка фотографии» желательно объединить в «Управление профилем»);

4) помнить о том, что варианты использования выявляются для формирования самого общего представления о проектируемой системе и все детали будут уточняться позднее.

Для нашего примера выделим следующие базовые *прецеденты:* авторизация; регистрация; управление пользователями; управление профилем; просмотр новостей; публикация новостей; изменение статичной информации; работа с каталогом ресурсов; участие в работе форума; поиск по сайту; осуществление обратной связи. В процессе дальнейшего уточнения требований выявляются дополнительные, вспомогательные прецеденты.

Все *исполнители* в рамках нашего проекта будут делиться на гостей и зарегистрированных посетителей, из которых в отдельную группу выделим администраторов.

3. Написание сценария

В зависимости от уровня детализации варианты использования бывают двух типов:

1) «черный ящик» – не требует дополнительного текстового сценария взаимодействия исполнителя с системой;

2) «белый ящик» – напротив, подразумевает текстовое описание, по объему варьирующееся от краткого до развернутого.

Приведем пример сценария для «белого ящика» на основе варианта использования «Авторизация».

3.1. Краткая форма

Посетитель заходит на сайт. Посетитель желает авторизоваться. Посетитель вводит необходимые данные и отправляет их системе. Система подтверждает правильность введенных данных и авторизует посетителя.

3.2. Свободная форма включает успешный сценарий – лучший случай – и его альтернативы – действия в исключительных ситуациях.

Успешный сценарий. Посетитель заходит на сайт. Посетитель желает авторизоваться. Посетитель вводит необходимые данные и отправляет их системе. Система подтверждает правильность введенных данных и авторизует посетителя.

Альтернативные сценарии. Если данные введены неверно, система сообщает об этом посетителю и предлагает ввести их повторно.

Если посетитель забыл свои регистрационные данные, система по его требованию высылает их ему на e-mail.

Если пользователь не зарегистрирован, система предлагает ему зарегистрироваться. Посетитель вводит необходимые данные и отправляет их системе. Система подтверждает регистрацию и высылает посетителю регистрационные данные на e-mail. Посетитель зарегистрирован на сайте.

Развернутая форма описания прецедента включает множество дополнительных характеристик взаимодействия. Указание или игнорирование этих характеристик производится по необходимости. Но одним из наиболее важных разделов сценария в развернутой форме является *список заинтересованных в прецеденте лиц и их требований.*

Эти характеристики указываются в начале развернутой формы. Таким образом, по окончании написания сценария проектировщики имеют возможность свериться со списком и внести некоторые дополнения в последовательность действий в случае, если интересы не всех сторон были учтены должным образом.

3.3. Развернутая форма

Основной исполнитель: посетитель сайта.

Заинтересованные лица и их требования:

Посетитель: намерен авторизоваться с минимальными усилиями (затратами трафика и времени), чтобы получить доступ ко всему содержимому сайта.

Служба авторизации системы: стремится обеспечить безопасный вход посетителя на сайт, исключить любую возможность несанкционированного доступа к содержимому сайта.

Администратор сайта: стремится создать условия для того, чтобы больше посетителей регистрировалось.

Рекламодатели: требуют от администратора обеспечения условий для максимального количества просмотров баннера.

Предусловия: посетитель заходит на сайт.

Постусловия: посетитель авторизован на сайте и получил доступ ко всему содержимому сайта.

Успешный сценарий:

1. Посетитель желает авторизоваться на сайте.

2. Система предлагает ему ввести регистрационные данные.

3. Посетитель вводит необходимые данные и отправляет их системе.

4. Система сверяет полученные регистрационные данные с теми, которые есть в ее базе данных зарегистрированных посетителей.

5. Система подтверждает правильность введенных данных.

6. Посетитель авторизован и получает доступ ко всему содержимому сайта.

Альтернативные сценарии:

*а. Прерывание сеанса работы посетителя с сайтом (соединение с Интернет).

1. Посетитель вновь заходит на сайт.

2. Система предлагает ему ввести регистрационные данные.

1а. Посетитель не зарегистрирован.

1. Система предлагает посетителю пройти регистрацию.

2. Посетитель вводит необходимые данные и отправляет их системе.

2а. Данные введены не полностью.

1. Система указывает посетителю на отсутствующие данные.

2. Посетитель вводит необходимые данные и отправляет их системе.

2б. Данные введены неправильно...

2б. Такой логин уже существует в базе данных посетителей...

3. Система подтверждает регистрацию и высылает посетителю регистрационные данные на e-mail.

2а. Посетитель не помнит своих регистрационных данных.

1. Посетитель сообщает системе, что регистрационные данные утеряны.

2. Система предлагает посетителю отправить регистрационные данные на e-mail, указанный им при регистрации.

2а. Посетитель не указывал e-mail при регистрации.

1. Система предлагает посетителю пройти регистрацию повторно.

3. Посетитель подтверждает свое согласие на отправку его регистрационных данных на e-mail.

4. Система отправляет его регистрационные данные ему на e-mail.

4а. Системе приходит уведомление о том, что e-mail недействителен.

1. Система сообщает о недействительном e-mail посетителю.

2. Система предлагает посетителю пройти регистрацию повторно.

5. Посетитель получает регистрационные данные.

3а. Система не находит таких регистрационных данных.

1. Система сообщает об этом посетителю.

2. Система поясняет посетителю возможные причины неправильного ввода данных.

3. Система предлагает повторно отправить данные.

3а. Посетитель не помнит своих регистрационных данных...

4. Посетитель повторно вводит необходимые данные и отправляет их системе.

Частота использования: несколько раз в день.

Открытые вопросы: обеспечение локальной копии базы данных посетителей для профилактики сбоев системы; алгоритм генерации случайного пароля от восьми символов; возможность сохранения авторизованного статуса и после выхода с сайта; регистрация показов баннера для отчета рекламодателям; ведение статистики количества зарегистрированных посетителей...

Приведенный сценарий поясняет основные принципы формализации взаимодействия системы с исполнителем. Как уже было сказано, не каждый вариант использования требует столь подробного рассмотрения. Но единожды хорошо прописанный сценарий можно использовать при моделировании и других систем тоже. Использование удачных шаблонов при моделировании не редкость, а необходимость, часто значительно ускоряющая ход работы.

Как видно из альтернативных сценариев развернутой формы, некоторые варианты использования задействуются не всегда, а некоторые варианты использования являются обязательной частью других. Эти особенности взаимодействия прецедентов формализуются непосредственно на диаграмме вариантов использования.

4. Построение диаграммы прецедентов

Как правило, одной диаграммы вариантов использования недостаточно для описания всей функциональности проектируемой системы. Обычно для этого используется ряд диаграмм, сопровождаемых дополнительными сценариями наиболее критичных прецедентов.

Унифицированный язык моделирования предполагает четыре типа отношений между исполнителями и прецедентами: ассоциация, расширение (extend), включение (include) и обобщение.

Отношение ассоциации обнаруживает факт инициации исполнителем варианта использования. В случае если это основной исполнитель, то отношение ассоциации отвечает его целям по отношению к системе. Участие в отношении ассоциации вспомогательного исполнителя предполагает реализацию им этого варианта использования. Ассоциация обозначается сплошной линией, соединяющей исполнителя и прецедент.

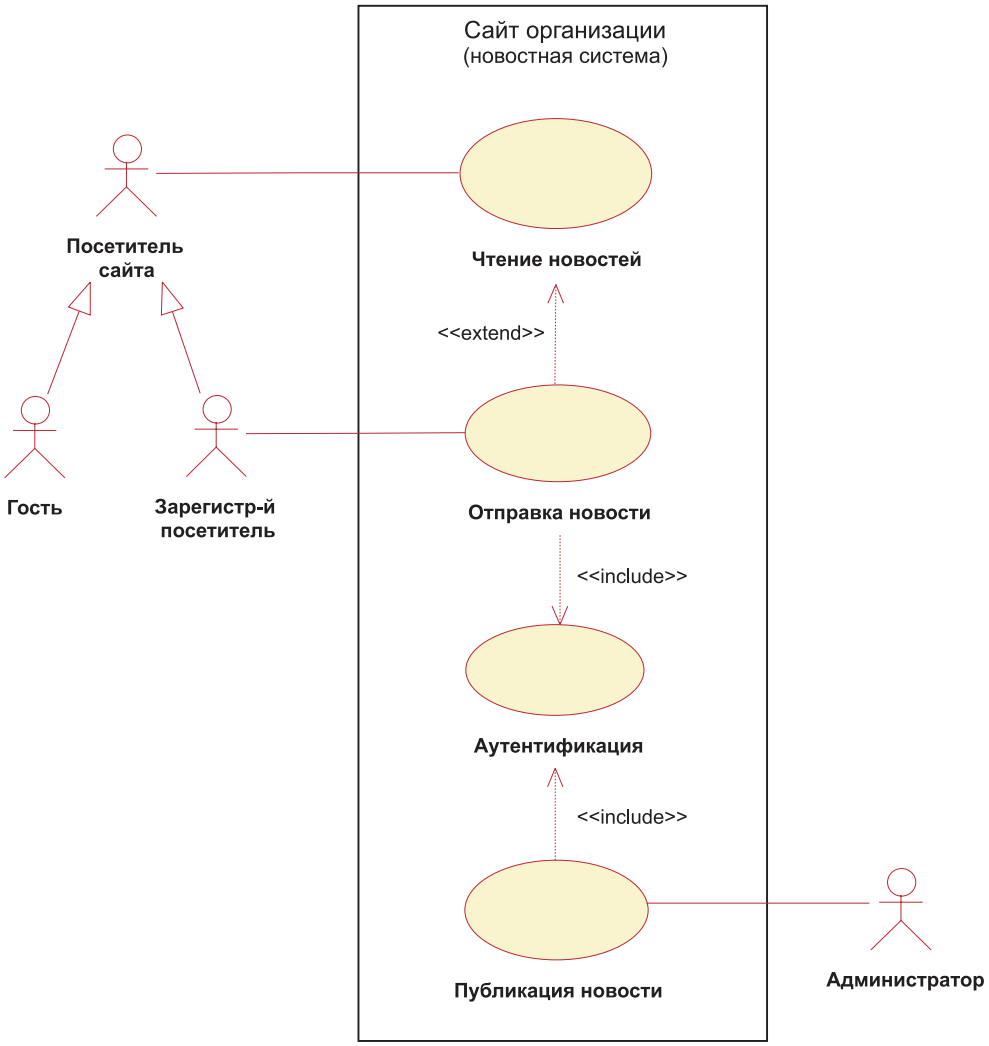
Кардинальное отличие *отношений включения и расширения* в том, что при отношении включения в процессе выполнения базового вариан-

та использования *обязательно* задействуется включаемый вариант использования. При отношении расширения – задействуется *не всегда*, а только по выполнению определенного условия. Например, прецедент «Регистрация» инициируется только при условии, что посетитель не зарегистрирован (или забыл регистрационные данные, и нет возможности их восстановить). Включение обозначается пунктирной линией, идущей от базового варианта использования к вспомогательному, с пометкой <<include>>. Расширение обозначается также пунктирной линией, направленной в обратную сторону, с пометкой <<extend>>.

При *отношении обобщения* один из прецедентов (или исполнителей) является «родителем», а остальные – «потомками». «Потомки» наследуют все поведенческие особенности своего «родителя», но при этом могут иметь и свои, отличные от «родительских». В отношении обобщения обычно участвуют два или более прецедента (или исполнителя). Обобщение обозначается сплошной линией с треугольной стрелкой на конце, направленной от «потомка» к «родителю».

Приведем фрагмент диаграммы вариантов использования, отражающий работу посетителя сайта с новостной системой (см. рисунок). Основным исполнителем на этой диаграмме будет являться посетитель, а вспомогательным – администратор сайта.

После построения необходимых диаграмм вариантов использования, выяснения взаимосвязей всех прецедентов и исполнителей, составления дополняющих диаграммы сценариев становится ясным, *что* должна делать система, то есть ее функциональное наполнение. Это и есть основная цель концептуального моделирования.



Фрагмент диаграммы прецедентов: новостная система сайта

Представленная методика анализа требований к проектируемой системе получила широкое распространение в связи с тем, что она ставит в соответствие каждому требованию общепризнанной классификации требований FURPS+ определенный артефакт концептуальной модели [5].

Требования высокого уровня фиксируются в документе «Видение» и уточняются на последующих итерациях унифицированного процесса. В процессе разработки модели прецедентов формулируются свойства и возможности системы, что соответствует ее функциональным требованиям. Нефункциональные требования, в частности – атрибуты качества (удобство, надежность, производительность и возможность поддержки), отражаются в детальном описании прецедентов и дополнительной спецификации. Артефакт «Словарь данных» обеспечивает однозначные формулировку и понимание требований.

Прямое сопоставление артефактов с конкретными требованиями к системе делает возможной проверку корректности осуществления начального этапа жизненного цикла проектируемой системы.

Таким образом, следование методике выявления прецедентов, предложенной Айваром Якобсоном, позволяет значительно упростить процесс определения требований к проектируемой системе и гарантировать соответствие разработки общепризнанной модели FURPS+. Более того, несмотря на специфичность используемой терминологии, этот процесс полностью ориентирован на участие в нем конечных пользователей системы. Следующая из этого динамичность учета поступающих требований значительно повышает шансы проекта на успешную реализацию.

Примечания

1. *Леффингуэлл, Д.* Принципы работы с требованиями к программному обеспечению. Унифицированный подход [Текст] / Д. Леффингуэлл, Д. Уидриг. М.: Вильямс, 2002.

2. *Якобсон, А.* Унифицированный процесс разработки программного обеспечения [Текст] / А. Якобсон, Г. Буч, Дж. Рамбо. СПб.: Питер, 2002.

3. *Леоненков, А. В.* Нотация и семантика языка UML [Электронный ресурс] / А. В. Леоненков // http://www.intuit.ru.

4. Там же.

5. *Крэг, Л.* Применение UML и шаблонов проектирования [Текст] / Л. Крэг. М.: Вильямс, 2002. С. 70–71.

О. Н. Тупицына

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ СТУДЕНТАМИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ В БАНКОВСКОМ ДЕЛЕ»

В статье подробно рассмотрено содержание дисциплины «Информационные системы в банковском деле», в процессе изучения которой используется методическое программное средство для проведения практических занятий учебная версия автоматизированной банковской системы «RS-Bank 5.0» компании «R-Style Softlab».

Дисциплина «Информационные системы в банковском деле» – часть общего учебного плана профессиональной подготовки экономистов, приобретающих специальные знания по функционированию банковской информационной системы в сфере денежно-кредитных и финансовых отношений, механизму управления банковскими операциями, их организации и проведению в деятельности банков.

В Государственном стандарте высшего профессионального образования данная дисциплина находится в разделе «Дисциплины специализаций в области» и соответственно её содержание достаточно вариативно в разных вузах.

В рамках данного курса должна рассматриваться некоторая автоматизированная банковская система (АБС) как пример информационной системы в банковском деле, тем более что многие фирмы-производители стараются плодотворно сотрудничать с учебными заведениями, предлагая учебные версии АБС, таковыми, например, являются лидеры рынка АБС: «Диасофт» и «R-Style Softlab».

Проанализировав учебные программы различных вузов по данной дисциплине, мы сделали вывод о недостаточно глубокой проработанности содержания, что связано с новизной курса и относительно высокой стоимостью методического программного обеспечения.

В качестве основы для дальнейшего совершенствования можно предложить апробированное на факультете информатики ВятГГУ содержание курса «Информационные системы в банковском деле».

Конечной целью преподавания данного курса является формирование у будущих специалистов экономической сферы теоретических знаний об АБС и практических навыков по использованию конкретной банковской информационной системы.

ТУПИЦЫНА Оксана Николаевна – старший преподаватель кафедры прикладной информатики ВятГГУ
© Тупицына О. Н., 2007

В ходе преподавания дисциплины были поставлены следующие задачи:

• изучить историю развития автоматизированных банковских систем;

• изучить классификацию АБС;

• изучить технологии АБС;

• изучить современное состояние АБС;

• изучить тенденции развития АБС.

В результате изучения дисциплины студенты должны:

1) иметь представление о финансовых потоках в автоматизированной банковской системе, принципе многофазных опердней; CRM-системе в банковском бизнесе; вопросах безопасности ИТ в банке;

2) знать сущность банков и их роль в экономике; виды пассивных и активных операций коммерческих банков; содержание баланса коммерческого банка, принципы его построения; порядок осуществления операций по видам банковских услуг: кредитования, расчетно-кассового обслуживания, с ценными бумагами и др.; основные законодательные акты и нормативные положения, регламентирующие деятельность банков на территории Российской Федерации;

3) уметь читать баланс банка; анализировать структуру пассивных и активных операций банка; настраивать и выполнять администрирование в АБС; работать с подсистемой «Многовалютного ОДБ»: вводить сведения о клиентах и документы, создавать необходимые для работы счета, формировать баланс и другие отчетные формы.

Изучение данной дисциплины по видам учебной работы осуществляется в следующем объеме часов:

• общая трудоемкость (по ГОС ВПО) – 130;

• аудиторные занятия – 52;

• лекции – 16;

• практические занятия (семинары) – 36;

• самостоятельная работа – 78.

Видом контроля по окончании изучения курса является зачет.

Рассмотрим основные темы данного курса. Лекционный материал, в соответствии с поставленными задачами, включает следующие темы:

1. Введение. Предмет, цели, задачи, план курса. Основные термины и определения.

2. Финансовые потоки. Особенности финансовых потоков в автоматизированной банковской системе.

3. История развития АБС.

4. Классификация АБС, обзор зарубежных и российских систем.

5. Существующие технологии АБС.

6. Современное состояние АБС, принципы их построения.

7. Тенденции развития АБС как следствие развития рынка кредитных организаций.

8. ЦАБС, принцип ЭДО в АБС. Реализация принципа ЭДО на примере «RS-Bank».

9. Принцип многофазных опердней в АБС на примере «RS-Bank».

10. CRM-системы в банковском бизнесе.

11. Организация службы ИТ в банке.

12. Вопросы безопасности ИТ в банке.

Большинство этих тем хорошо освещены в различных учебных пособиях и Интернете [1]. Однако, продумывая содержание практикума, как показал анализ программ различных вузов, возникает много сложностей. Решающей в этом списке является проблема выбора АБС. На факультете информатики ВятГГУ в качестве методического программного средства для проведения практических занятий по курсу «Информационные системы в банковском деле» была выбрана учебная версия автоматизированной банковской системы «RS-Bank 5.0» компании «R-Style Softlab» [2].

Компания «R-Style Softlab» – ведущий отечественный разработчик специализированного программного обеспечения для автоматизации банков и предприятий. Год её основания – 1992.

Программные решения «R-Style Softlab» охватывают все направления банковской деятельности: банковский программный комплекс «RS-Bank» на платформах баз данных «Pervasive» и «Oracle», специализированные системы электронного дистанционного обслуживания, автоматизацию розничных банковских услуг, обслуживание и кредитование физических и юридических лиц, выполнение дилинговых операций банка, комплексную автоматизацию операций с ценными бумагами, обслуживание внутрибанковских платежных систем для гибкого управления финансовыми потоками и многое другое.

Выбор данной АБС был обусловлен её распространенностью на рынке банковских услуг, высоким качеством и наличием доступной по цене учебной версии программы.

Переходя к рассмотрению тем практикума, нельзя обойти его цели, каковыми являются следующие:

• знакомство студентов с настройкой, администрированием и функционированием модулей, составляющих ядро «RS-Bank» версии 5.0;

• выполнение основных функций операционной бухгалтерии как по рублевым, так и по валютным денежным средствам;

• формирование на основании данных «Многовалютного ОДБ» (МВОДБ) всех видов отчетности, необходимых для отражения результатов работы банка;

• изучение операций с корреспондентским счетом банка и организации межбанковских расчетов.

В соответствии с данными целями темами практикума являются следующие:

1. Настройка и администрирование в АБС «RS-Bank» (подсистема «Системный сервис»).
2. Работа в подсистеме «Системный сервис». Ознакомительное занятие с процедурами. Справочники. Параметры.
3. Общие принципы бухгалтерского учета в кредитных организациях. Открытие счетов.
4. Учётное ядро системы. Элементы банковского учёта.
5. Подсистема МВОДБ: виды документов.
6. Подсистема МВОДБ: клиенты.
7. Подсистема МВОДБ: счета.
8. Подсистема МВОДБ: документы.
9. Подсистема МВОДБ: формирование баланса.
10. Подсистема МВОДБ: отчетные формы.

По данному курсу разработан методический материал в виде инструкций (методических указаний). Данный материал содержит практические работы по освоению студентами подсистемы «Системный сервис». «Системный сервис» является «рабочим местом» администратора банка и предоставляет ему мощный инструмент для управления различными составляющими многоцелевой АБС, организации рабочих мест пользователей системы и их доступа к данным, осуществления контроля за работой сотрудников. На уровне администратора студенты знакомятся с ведением всевозможных справочных данных системы.

Подсистема «Многовалютный ОДБ» предназначена для выполнения основных функций операционной бухгалтерии как по рублевым, так и по валютным денежным средствам. Одной из важных особенностей подсистемы является одновременная с проводкой валютных документов проводка по счетам рублевого покрытия суммы в национальной валюте по курсу ЦБ, устанавливаемому на начало текущего операционного дня. Это позволяет в любой момент времени получить консолидированный баланс, включающий в себя суммы на счетах рублевого покрытия как эквивалент валютных средств, находящихся в банке.

По разработанным методическим указаниям обучаемые имеют возможность в данной подсистеме познакомиться со следующими видами работ, решающими операционно-учетные задачи в банковской практике:

- выполнение всего спектра операций с лицевыми счетами банка, в том числе обслуживание валютных счетов клиентов банка и связанных с ними счетов рублевого покрытия;
- работа с различными видами платежных документов.

Подсистема «Отчеты банка» предназначена для выпуска на основании данных МВОДБ всех видов отчетности, необходимых для отражения работы банка.

При выполнении задач методических указаний студенты имеют возможность сформировать в данной подсистеме разнообразные отчеты операционного дня банка как по рублевым, так и по валютным средствам и проанализировать их. К ним относятся:

- балансы различных видов;
- разнообразные ведомости, выписки и справки по лицевым счетам;
- справки о проведенных документах;
- мемориальные ордера и платежные поручения;
- отчеты по счету невыясненных сумм;
- различные ведомости начисления и оплат процентов;
- кассовые формы;
- отчеты по кассовому плану и кассовые журналы.

Таким образом, по окончании изучения дисциплины «Информационные системы в банковском деле», имеющей вышеописанное содержание, у студентов будут сформированы теоретические знания о современных АБС и практические навыки по использованию конкретной банковской информационной системы, например «RS-Bank».

Примечания

1. *Габарева, Я. Л.* Банковские информационные системы и технологии [Текст] / Я. Л. Габарева. М.: Финансы и статистика, 2005; Тютюнник, А. В. Информационные технологии в банке [Текст] / А. В. Тютюнник. М.: Издательская грауппа «БДЦ-пресс», 2003.
2. [Электронный ресурс] http://www.softlab.ru; Справочная документация, поставляемая с дистрибутивным комплектом «RS-Bank R-Style Softlab».

Р. В. Шарыгин

ИСКУССТВО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ОПИСАНИЯ ЗАДАЧИ ПРИ ПОИСКЕ ЭФФЕКТИВНОГО АЛГОРИТМА ЕЕ РЕШЕНИЯ

В статье показано, как эффективность алгоритма решения задачи зависит от преобразования пространства ее описания. Смена пространства описания задачи позволяет находить и использовать более эффективные алгоритмы ее решения, которые порой бывают совсем не очевидны или кажутся неприменимыми в конкретном случае.

Что значит изменить пространство описания задачи? Попробуем показать суть преобразования, слабо представленного в методической литературе по информатике, на примере конкретной задачи.

ШАРЫГИН Роман Владимирович – аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Шарыгин Р. В., 2007

• Известный математик и философ Пифагор считал, что реальность носит математический характер. Современные биологи изучают свойства *биопоследовательностей*. Биопоследовательность – это последовательность M целых чисел, которая:

• содержит все целые числа 0, 1, ..., $n - 1$;

• начинается с 0 и заканчивается числом $n - 1$;

• не имеет двух подряд идущих элементов E, $E+1$ именно в этом порядке.

Подпоследовательность идущих подряд элементов биопоследовательности называется *сегментом*.

Сегмент биопоследовательности называется *фрейм-интервалом*, если он содержит все целые числа, значения которых находятся между значениями первого и последнего элементов сегмента. При этом первый элемент должен быть наименьшим в сегменте, а последний элемент – наибольшим в сегменте и отличным от первого. Фрейм-интервал называется *эмподио*, если он не содержит внутри себя более короткий фрейм-интервал.

В качестве примера рассмотрим биопоследовательность (0,3,5,4,6,2,1,7). Вся биопоследовательность является фрейм-интервалом. Эта биопоследовательность, в свою очередь, содержит другой фрейм-интервал (3,5,4,6), и, следовательно, она не является эмподио. Фрейм-интервал (3,5,4,6) не содержит более короткий фрейм-интервал и поэтому он является эмподио. Этот фрейм-интервал является единственным эмподио в данной биопоследовательности.

Требуется написать программу, которая по заданной биопоследовательности находит все эмподио, которые в ней содержатся.

Ограничения:

• $3 \le n \le 1100000$;

• ограничение времени на тест 1 секунда;

• ограничение памяти 128 Мб.

Пространством описания задачи является множество целых чисел. Первые два метода решения «работают» в нем.

Решение сложности $O(N^3)$. Формализуем поставленную задачу. Наша последовательность целых чисел (биопоследовательность) есть не что иное, как перестановка чисел $\{0, ..., n - 1\}$ или $\{1, ..., n\}$. Обозначим нашу перестановку за $\pi = (\pi_1 ... \pi_n)$. Для фрейм-интервала будут верны следующие утверждения [2].

Для первой π_i и последней π_j точки фрейм-интервала выполняется условие: $\pi_j = \pi_i + j - i$.

Все значения, которые находятся внутри фрейм-интервала, различные и принадлежат отрезку $[\pi_i + 1, \pi_j - 1]$.

Используя данные утверждения, достаточно просто решить поставленную задачу. Будем последовательно для каждого i-го элемента искать фрейм-интервал минимальной длины. В результате поиска мы будем получать пары элементов (i, j), для которых следует проверить выполнение утверждений 1 и 2. Первая часть решения может выглядеть так:

```
C++:
eCount = 0;
for (i = 0; i < N - 1; i++)
      for (j = 1; j < N - i; j++)
            // утверждение 1
            if (a[i + j] == a[i] + j) {
                  rBound = i + j;
                  // утверждение 2
for (k = i + 1; (k < rBound) &&
(a[i] < a[k]) && (a[k] < a[rBound]); k++);
                  if (k == rBound) {
                        bound[i] = rBound;
                        eCount++;
                        break;
                  }
            }

Pascal:
eCount := 0;
for i := 0 to N - 2 do
      for j := 1 to N - i - 1 do
            if (a[i + j] = a[i] + j) then
            begin
                  rBound := i + j;
                  k := i + 1;
                  while (
(k < rBound) and (a[i] < a[k]) and (a[k] <
a[rBound])) do
                  begin
                        k := k + 1;
                        if (k = rBound) then
                        begin
                              bound[i] := rBound;
                              eCount := eCount
+ 1;
                              break;
                        end;
                  end;
            end;
```

где eCount – количество выделенных фрейм-интервалов. Переменная rBound – правая граница рассматриваемого интервала. Элемент массива bound[i] содержит индекс последней точки фрейм-интервала, который начинается с индекса i, либо 0.

После того как мы выделили фрейм-интервалы, следует исключить из найденных все фрейм-интервалы, которые содержат в себе другие фрейм-интервалы. В результате такого исключения у нас останутся только эмподио:

```
C++:
for (i = 0; i < N − 2; i++)
        for (j = i + 1; j < bound[i]; j++)
                if ((0 < bound[j]) && (bound[j] <
bound[i])) {
                        bound[i] = 0;
                        eCount--;
                        break;
                }

Pascal:
for i := 0 to N − 3 do
        for j := i + 1 to bound[i] − 1 do
                if ((0 < bound[j]) and (bound[j] <
bound[i])) then
                begin
                        bound[i] := 0;
                        eCount := eCount − 1;
                        break;
                end;
```

Элементы массива bound[i] будут содержать индексы последних точек для найденных эмподио, начинающихся с индекса i, либо 0, если эмподио не найдено. Переменная eCount будет содержать количество найденных эмподио.

Легко видеть, что первая часть решения имеет сложность $O(N^3)$, а вторая половина – $O(N^2)$, поэтому общая сложность решения оценивается как $O(N^3)$.

Решение сложности $O(N^2)$. Приведем еще несколько утверждений [2]:

• первый элемент в эмподио – минимальный элемент;

• последний элемент в эмподио – максимальный элемент.

Используем их. Поочередно просматривая элементы последовательности, будем запоминать максимальное значение (max). Если мы найдем элемент π_x, для которого выполняется соотношение $\pi_x = max + 1$ и утверждение 1, то мы нашли фрейм-интервал.

```
C++:
eCount = 0;
for (i = 0; i < N − 1; i++) {
        max = a[i];
        for (j = 1; j < N − i; j++)
                // утверждение 1 и 4
if ((a[i + j] == a[i] + j) && (a[i + j] == max + 1))    {
                        length[i] = j + 1;
                        eCount++;
                }
                // утверждение 3
                else if (a[i + j] < a[i])
                        break;
                else if (a[i + j] > max)
                        max = a[i + j];
}
Pascal:
eCount := 0;
for i := 0 to N − 2 do
begin
        max := a[i];
        for j := 1 to N − i − 1 do
                if ((a[i + j] = a[i] + j) and (a[i + j] =
max + 1)) then
                begin
                        length[i] := j + 1;
                        eCount := eCount + 1;
                end
                else if (a[i + j] < a[i]) then
                        break
                else if (a[i + j] > max) then
                        max := a[i + j];
end;
```

Массив length[i] содержит длины фрейм-интервалов, начинающихся с индекса i, либо 0. Теперь мы проверяем порядка O(N) элементов и для каждого из них еще порядка O(N) кандидатов на правую границу фрейм-интервала. Общая сложность нахождения фрейм-интервалов таким способом составит порядка $O(N^2)$ операций.

Особое значение для решения поставленной задачи имеет следующая лемма: *концевые (первая и последняя) точки одного эмподио не могут находиться во внутренней части другого эмподио.*

Доказательство.

Первый случай: концевые точки одного эмподио находятся во внутренней части другого эмподио. Тогда, согласно определению, очевидно, что один из перечисленных интервалов не эмподио. Получаем противоречие.

Второй случай: только одна из концевых точек лежит во внутренней части другого эмподио (рис. 1). На рисунке эмподио E_1 содержит внутри себя начальную точку π_k эмподио E_2. Тогда

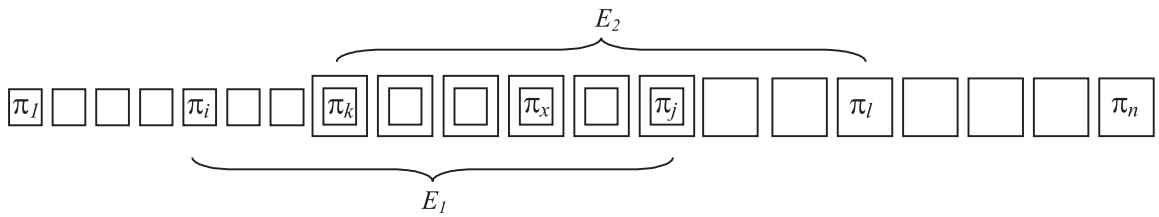


Рис. 1. Второй случай расположения интервалов

можно заключить, что $\pi_i < \pi_k < \pi_j < \pi_l$, так k-й элемент есть внутренняя точка E_1, а j-й элемент – внутренняя точка E_2. Возьмем любой π_x ($k < x < j$). Очевидно, что $\pi_x < \pi_j$ и $\pi_k < \pi_x$. Получаем, что либо E_1, либо E_2 не эмподио. Как результат все значения, лежащие между π_k и π_j, образуют фрейм-интервал. Получаем противоречие, которое доказывает лемму.

Другими словами, мы получили, что пары (π_i, π_k), (π_k, π_j), (π_j, π_l) образуют фрейм-интервалы. Этот факт поможет нам за линейное время исключить все ложные эмподио. Будем последовательно просматривать элементы массива length[i], если мы получим, что начался новый фрейм-интервал, а текущий еще не закончился, то текущий интервал не может быть эмподио. Это займет порядка O(N) операций.

```
C++:
for (i = 0; i < N − 1; i++)
        if (length[i] != 0) {
                for (j = i + 1; j < i + length[i] − 1; j++)
                        if (length[j] != 0) {
                                length[i] = 0;
                                eCount--;
                                break;
                        }
                i = j − 1;
        }

Pascal:
i := 0;
while (i < N − 1) do
begin
        if (length[i] <> 0) then
        begin
                for j := i + 1 to i + length[i] − 2 do
                        if (length[j] <> 0) then
                        begin
                                length[i] := 0;
                                eCount := eCount − 1;
                                break;
                        end;
                i := j − 1;
        end;
i := i + 1;
end;
```

Общая сложность решения порядка $O(N^2)$ операций.

Решение сложности O(N). А сейчас опишем пространство задачи как некий граф, в котором поиск фрейм-интервалов сводится к установлению некоторых свойств графа.

Задача может быть решена за линейное время, если для ее решения мы обратимся к одному из разделов информатики – сортировка инверсиями [1] (*sorting by reversals*). Цель сортировки инверсиями – по данной перестановке $\pi = (\pi_1 \ldots \pi_n)$ найти наименьшее количество таких инверсий, чтобы в результате их применения получить тождественную перестановку (1, ..., n). Применение инверсии ρ (i, j) к перестановке $\pi = (\pi_1 \ldots \pi_n)$ изменяет порядок элементов π_i, π_{i+1}, ..., π_j на обратный π_j, π_{j-1}, ..., π_i. Если в предыдущей задаче к каждому элементу перестановки добавить знак, то мы получим более узкую задачу – сортировку знаковых перестановок инверсиями [1] (*sorting signed permutation by reversals*).

Трансформируем перестановку из нашей задачи в знаковую перестановку, а точнее в знаковую перестановку, где всем элементам присвоен знак «+». Полученная перестановка преобразуется в беззнаковую перестановку следующим образом. Элемент $+x$ заменятся элементами $2x - 1$, $2x$, а элемент $-x$ заменяется элементами $2x$, $2x - 1$, дополним перестановку элементами $\pi_0 = 0$ и $\pi_{2n+1} = 2n + 1$ (рис. 2).

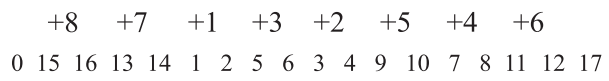


Рис. 2. Трансформация знаковой перестановки в беззнаковую перестановку (n = 8)

Построим граф циклов (*циклический граф перестановок* [3]) по полученной перестановке. Соединим вершины π_{2i} и π_{2i+1} черными ребрами (непрерывная линия), вершины $\pi_k = 2i$ и $\pi_l = 2i+1$ – серыми ребрами (пунктирная линия), где $0 \le i \le n$ (рис. 3).

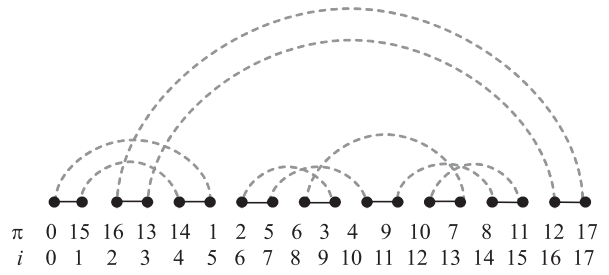


Рис. 3. Граф циклов (n = 8)

Назовем два ребра (π_i, π_j) и (π_k, π_l) *перекрывающимися*, если перекрываются, но не содержат друг друга интервалы [i, j] и [k, l]. Например, ребра (π_1, π_4) и (π_3, π_{16}) есть перекрывающиеся ребра, (π_1, π_4) и (π_0, π_5) – нет (рис. 3).

Циклы C_1 и C_2 *перекрывают* друг друга, если они содержат перекрывающиеся ребра. Например, циклы A и C не перекрывают друг друга, а циклы A и B перекрываются, так как содержат перекрывающиеся ребра, например ребра (π_1, π_4) и (π_3, π_{16}).

Пространством цикла *C* называется интервал, левой границей которого является минимальный номер вершин цикла, а правой границей – максимальный номер вершин цикла или $[C.b = \min\{i \mid \pi_i \in C\}, C.e = \max\{j \mid \pi_j \in C\}]$. Пространством множества циклов $\{C_1, ..., C_k\}$ называется интервал $[b = \min_{i=1}^{k}\{C_i.b\}, e = \max_{j=1}^{k}\{C_j.e\}]$. На рис. 3 пространство цикла *B* есть интервал [2, 17]. Пространство циклов *A* и *B* есть интервал [0, 17].

Для нас важным моментом является то, что каждый цикл есть некоторая перестановка элементов (комбинация инверсий) [4], применение которой упорядочивает элементы в пространстве цикла.

Рассмотрим цикл *C* (рис. 3) и соответствующую ему часть перестановки (рис. 2). Видим, что внутренняя часть цикла может быть упорядочена применением инверсий, которые не выходят за пределы пространства цикла (рис. 4).

Если рассмотреть элементы эмподио, а точнее их упорядоченность, то мы заметим, что первый и последний элементы в последовательности уже упорядочены и стоят на своих местах, а внутренние элементы нуждаются в перестановке, т. е. внутренние элементы образуют цикл, который не выходит за пределы первого и последнего элемента эмподио и не содержит в своем пространстве других циклов. Наличие таких циклов означало бы, что наш эмподио всего лишь фрейм-интервал. Пространство цикла *C* не содержит в себе других циклов, т. е. цикл *C* выделяет некоторую перестановку, необходимую для упорядочивания элементов внутри эмподио.

После того как построен граф циклов, необходимо выделить пространства циклов и найти *граф перекрытий* [3]. В графе перекрытий вер-

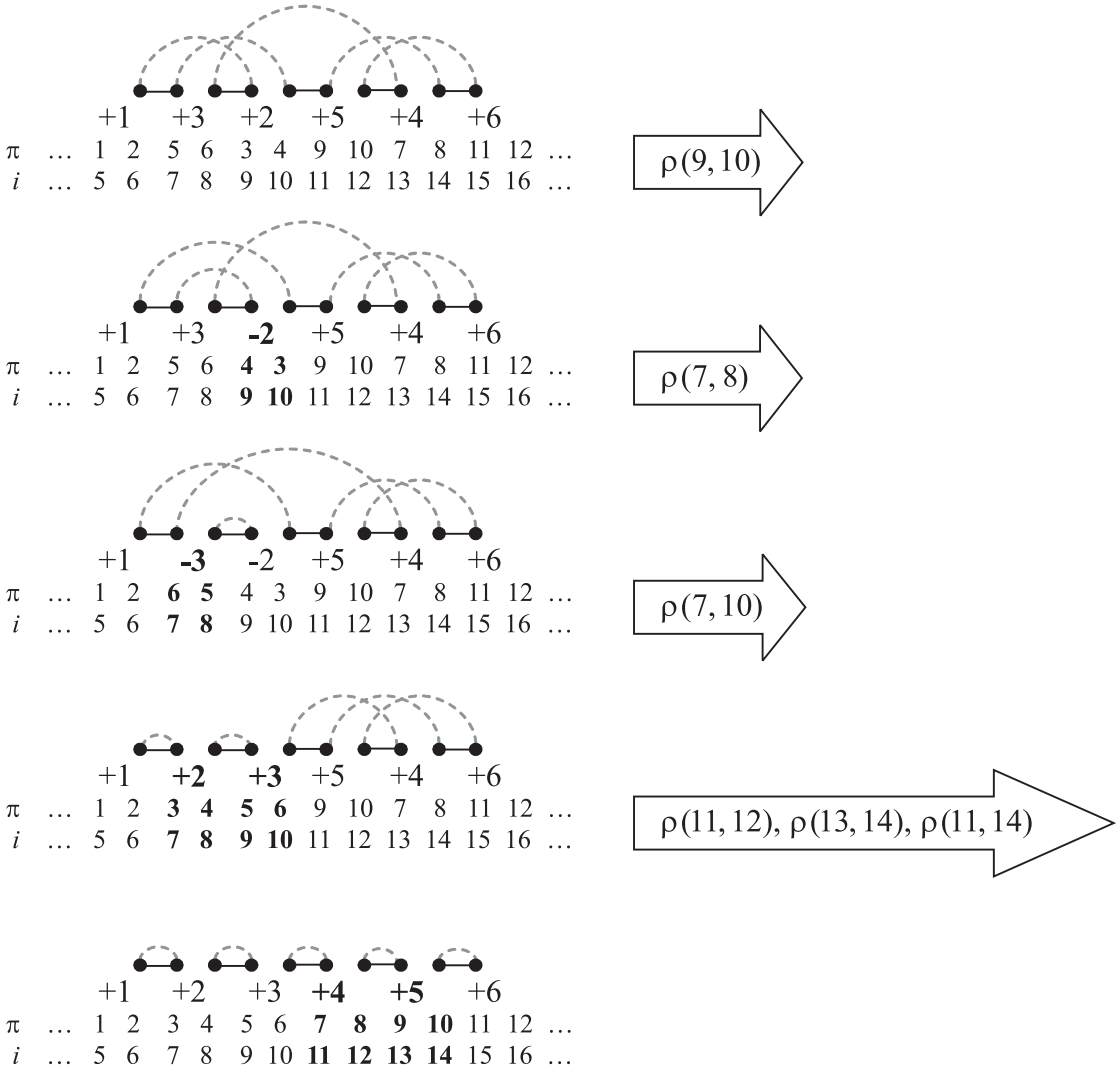


Рис. 4. Упорядочивание элементов в пространстве цикла C

шинами являются циклы графа циклов, а ребра соединяют вершины, которым соответствуют перекрывающиеся циклы в графе циклов (рис. 5).

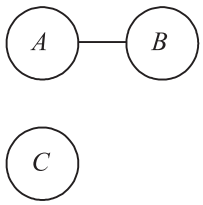


Рис. 5. Граф перекрытий для графа циклов (рис. 3)

Выделим в графе перекрытий компоненты связности и их пространства. Пространством некоторой компоненты связности в графе перекрытий называется пространство множества циклов, которые входят в эту компоненту связности. Следующим нашим шагом будет выделение компонент связности, пространства которых не будут содержать в себе пространств других компонент связности. Таким образом, будут выделены только те компоненты связности (соответственно циклы), которые будут представлять собой перестановки внутри эмподио (рис. 6).

Для получения всех пространств компонент связности поступим следующим образом. Будем последовательно рассматривать серые ребра графа циклов, если рассматриваемое ребро первое или оно не перекрывается с ребром на вершине стека, то помещаем рассматриваемое ребро в стек. Если же ребро перекрывается с ребром на вершине стека, то расширяем интервал ребра на вершине стека интервалом нашего ребра. После расширения интервала вершины стека может возникнуть такая ситуация, когда расширенный интервал на вершине стека будет перекрываться с интервалом, лежащим ниже по стеку, в этом случае расширение интервала следует продолжить. Если при просмотре ребер будет достигнута правая граница интервала ребра, которое лежит на вершине стека, то мы получаем, что интервал на вершине стека больше не может пересекаться с другими интервалами и этот интервал есть пространство некоторой компоненты связности, извлекаем это пространство (интервал) из стека как фрейм-интервал. Для реализации нам потребуется

Структура для представления интервала (или пространства)

```
C++:
struct cBound {
        int begin;
        int end;
};

Pascal:
TCBound = record
        _begin: integer;
        _end: integer;
end;
```

Массив для организации стека и массив для хранения интервалов

```
C++:
dN = (N + 1) << 1;
stack = (cBound *)calloc(dN, sizeof(cBound));
frame = (cBound *)calloc(dN, sizeof(cBound));

Pascal:
type TDRecs = array [0..2 * maxN] of TCBound;
var stack, frame: TDRecs;
...
dN := (N + 1) shl 1;
```

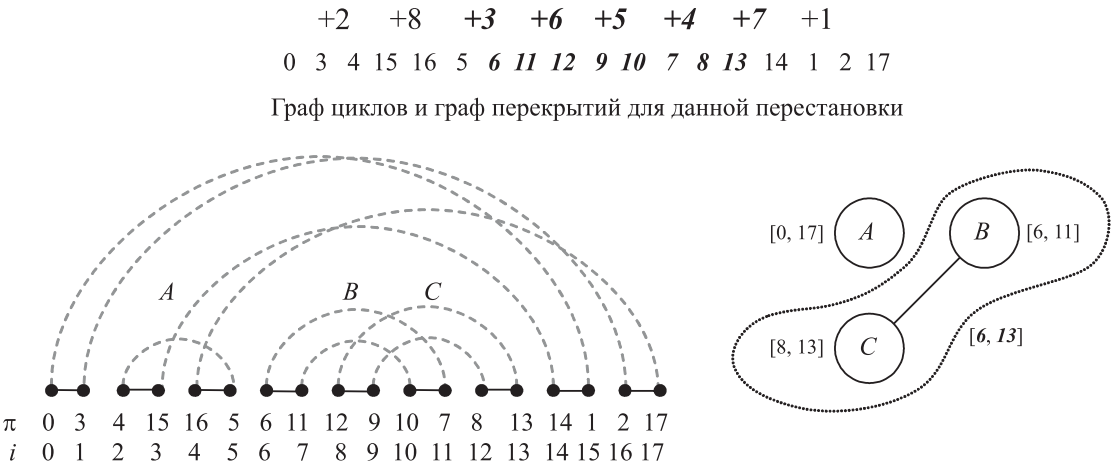


Рис. 6. Выделение эмподио на основе пространств компонент связности

Массив для хранения беззнаковой перестановки (удвоенного размера) и массив инвертированных элементов (по индексу элемента массива получаем его положение в перестановке)

```
C++:
da = (int *)calloc(dN, sizeof(int));
ida = (int *)calloc(dN, sizeof(int));

Pascal:
type TInts = array [0..maxN] of integer;
var da, ida: TDInts;
```

4. Массив для хранения интервалов для каждой вершины массива da (элементы массива содержат интервалы серых ребер выходящих из соответствующих вершин da)

```
C++
c = (cBound *)calloc(dN, sizeof(cBound));

Pascal:
var c: TDRecs;
```

Заполняем массивы на основе входной перестановки a

```
C++:
for (i = 0, j = 1; i < N; i++, j += 2) {
        da[j + 1] = (a[i] + 1) << 1;
        ida[da[j + 1]] = j + 1;
        da[j] = da[j + 1] − 1;
        ida[da[j]] = j;
}
da[dN − 1] = dN − 1;
ida[dN − 1] = dN − 1;

Pascal:
j := 1;
for i := 0 to N − 1 do
begin
        da[j + 1] := (a[i] + 1) shl 1;
        ida[da[j + 1]] := j + 1;
        da[j] := da[j + 1] − 1;
        ida[da[j]] := j;
        j := j + 2;
end;
da[dN − 1] := dN − 1;
ida[dN − 1] := dN − 1;
```

Для каждой вершины вычисляем интервалы серых ребер

```
C++:
for (i = 0; i < dN; i += 2) {
        begin = ida[i];
end = ida[i + 1];
        if (begin > end) {
                begin = begin ^ end;
                end = begin ^ end;
                begin = begin ^ end;
        }
        c[begin].begin = c[end].begin = begin;
        c[begin].end = c[end].end = end;
}

Pascal:
i := 0;
while (i < dN) do
begin
        _begin := ida[i];
        _end := ida[i + 1];
        if (_begin > _end) then
        begin
                _begin := _begin xor _end;
                _end := _begin xor _end;
                _begin := _begin xor _end;
        end;
        c[_begin]._begin := _begin;
        c[_end]._begin := _begin;
        c[_begin]._end := _end;
        c[_end]._end := _end;
        i := i + 2;
end;
```

Вычисляем пространства для компонент связности (фрейм-интервалы)

```
C++:
topStack = -1;
topFrame = -1;
eCount = 0;
for (i = 0; i < dN; i++)
{
        if (i == c[i].begin)
                stack[++topStack] = c[i];
        extent = c[i];
        // если ребро перекрывается с ребром на
вершине стека, то
        // расширяем границы интервала (extent)
        // и исключаем ребро на вершине стека
        for (;stack[topStack].begin > c[i].begin;) {
                extent.begin = min(extent.begin,
stack[topStack].begin);
                extent.end = max(extent.end,
stack[topStack].end);
                topStack--;
        }
        // объединим получившийся интервал с
интервалом на вершине стека
stack[topStack].begin = min(extent.begin,
stack[topStack].begin);
        stack[topStack].end = max(extent.end,
stack[topStack].end);
        // если мы рассматриваем конечную точку
интервала на вершине стека,
```

Начальное состояние массива da:
0 3 4 15 16 5 6 11 12 9 10 7 8 13 14 1 2 17
Начальное состояние массива c:
c[0] = (0, 15) c[9] = (9, 12)
c[1] = (1, 16) c[10] = (7, 10)
c[2] = (2, 5) c[11] = (6, 11)
c[3] = (3, 14) c[12] = (9, 12)
c[4] = (4, 17) c[13] = (8, 13)
c[5] = (2, 5) c[14] = (3, 14)
c[6] = (6, 11) c[15] = (0, 15)
c[7] = (7, 10) c[16] = (1, 16)
c[8] = (8, 13) c[17] = (4, 17)

i = 0
Условие (i = c[0].begin) выполнено – пополним стек:
stack[0] = (0, 15)
c[0] = (0, 15), extent = (0, 15)
Объединим extent (расширение интервала)
с интервалом на вершине стека:
stack[0] = (0, 15)

i = 1
Условие (i = c[1].begin) выполнено:
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
c[1] = (1, 16), extent = (1, 16)
Объединим интервал extent с вершиной стека:
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)

i = 2
Условие (i = c[2].begin) выполнено:
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
c[2] = (2, 5), extent = (2, 5)
Объединим интервал extent с вершиной стека:
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)

i = 3
Условие (i = c[3].begin) выполнено:
stack[3] = (3, 14)
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
c[3] = (3, 14), extent = (3, 14)
Объединим интервал extent с вершиной стека:
stack[3] = (3, 14)
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
и т. д.

i = 5
Состояние стека:
stack[4] = (4, 17)
stack[3] = (3, 14)
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
c[5] = (2, 5), extent = (2, 5)
Условие (stack[4].begin > c[5].begin) т.е. (4 > 2):
расширяем extent = (2, 17)
stack[3] = (3, 14)
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)

Условие (stack[3].begin > c[5].begin) т.е. (3 > 2):
расширяем extent = (2, 17)
stack[2] = (2, 5)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
Объединим интервал extent с вершиной стека:
stack[2] = (2, 17)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)

Далее до i = 10 изменений в границах интервалов
происходить не будет.
i = 10
Состояние стека:
stack[6] = (9, 12)
stack[5] = (8, 13)
stack[4] = (7, 10)
stack[3] = (6, 11)
stack[2] = (2, 17)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)

c[10] = (7, 10), extent = (7, 10)
Условие (stack[6].begin > c[10].begin) т. е. (9 > 7)
расширяем extent = (7, 12)
stack[5] = (8, 13)
stack[4] = (7, 10)
stack[3] = (6, 11)
stack[2] = (2, 17)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
Условие (stack[5].begin > c[10].begin) т. е. (8 > 7)
расширяем extent = (7, 13)
stack[4] = (7, 10)
stack[3] = (6, 11)
stack[2] = (2, 17)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
Объединим интервал extent с вершиной стека:
stack[4] = (7, 13)
stack[3] = (6, 11)
stack[2] = (2, 17)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
и т. д.

На шаге i = 13 мы попадем в условие
(i = stack[3]._end). Это значит, что мы нашли
замкнутый интервал, который не имеет перекрытий
с другими интервалами – запоминаем такой
интервал (кандидат во фрейм-интервалы).
stack[3] = **(6, 13)**
stack[2] = (2, 17)
stack[1] = (1, 16)
stack[0] = (0, 15)
Исключаем интервал на вершине стека: (6, 13).

Далее аналогичная ситуация возникнет при i = 17,
когда на вершине стека будет интервал
stack[0] = **(0, 17)**

```
        // то интервал больше не расширить и поэтому мы получили
        // пространство компоненты связности или фрейм-интервал
if (i == stack[topStack].end) {
                // исключим мнимые фрейм-интервалы
if (stack[topStack].begin != 0 && stack[topStack].end != dN − 1) {
                        // необходимо перевести индексы из перестановки удвоенного
                        // размера в нашу перестановку размера N
begin = convert(stack[topStack].begin);
                        end = convert(stack[topStack].end);
                        length[begin] = end − begin + 1;
                        eCount++;
                }
                topStack--;
        }
}
```

```
Pascal:
topStack := -1;
topFrame := -1;
eCount := 0;
for i := 0 to dN − 1 do
begin
        if (i = c[i]._begin) then
        begin
                topStack := topStack + 1;
                stack[topStack] := c[i];
        end;
        extent := c[i];

        while (stack[topStack]._begin > c[i]._begin) do
        begin
                extent._begin := min(extent._begin, stack[topStack]._begin);
                extent._end := max(extent._end, stack[topStack]._end);
                topStack := topStack − 1;
        end;
        stack[topStack]._begin := min(extent._begin, stack[topStack]._begin);
        stack[topStack]._end := max(extent._end, stack[topStack]._end);
        if (i = stack[topStack]._end) then
        begin
                if ((stack[topStack]._begin <> 0) and (stack[topStack]._end <> dN − 1)) then
                begin
                        _begin := convert(stack[topStack]._begin);
                        _end := convert(stack[topStack]._end);
                        length[_begin] := _end − _begin + 1;
                        eCount := eCount + 1;
                end;
                topStack := topStack − 1;
        end;
end;
```

Разберем пошагово логику работы алгоритма на примере рис. 6 (см. таблицу).

После того как мы получили фрейм-интервалы, необходимо отсеять фрейм-интервалы, которые не являются эмподио (так же, как и в случае решения сложности $O(N^2)$).

Вычисление пространств для компонент связности графа перекрытий имеет сложность решения порядка O(N), выбор из получившихся фрейм-интервалов эмподио – сложность порядка O(N). Общая сложность решения получается порядка O(N).

Примечания

1. *Berman, P.* Fast sorting by reversals [Text] / P. Berman, S. Hannenhall // 1996.

2. IOI'04, Enumerating Hurdles. 2004.

3. *Bader, A.* A linear-time algorithm for computing inversion distance between signed permutations with an experimental study [Text] / David A. Bader, Bernard M. E. Moret, Mi Yan // 2001.

4. *Siepel, A.* Exact algorithms for the reversal median problem [Text] / Adam C. Siepel // 1994.

Е. В. Югрина

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ПРОГРАММЫ 1С:ТОРГОВЛЯ И СКЛАД

В статье рассматриваются методика изучения программы 1С:Торговля и склад в ВятГГУ на специальности «Прикладная информатика в экономике», актуальность изучения этой программы в наше время, приводятся примеры и специфика использования предприятиями разных отраслей Кировской области в своей деятельности рассматриваемой программы.

Сегодня на рынке труда есть потребность в людях, умеющих быстро и качественно работать в программах, автоматизирующих определённые сферы экономической деятельности. 30% объявлений в газетах города Кирова на 2006 г. – это поиск работников на программы 1С:Торговля и склад, СБиС, Парус и др. (т. е. операторов на выписку товара, продавцов, кассиров-операционистов, коммерсантов в торговле со знанием соответствующих программ, программистов и внедренцев на эти программы).

В оперативном учёте среди перечисленных программ на первом месте по использованию стоит программа 1С:Торговля и склад, входящая

ЮГРИНА Елена Вячеславовна – старший преподаватель кафедры информационных технологий и ТСО ВятГГУ

© Югрина Е. В., 2007

в состав системы 1С:Предприятие. 1С:Предприятие – это универсальная система автоматизации деятельности предприятия. За счёт своей универсальности система 1С:Предприятие может быть использована для автоматизации самых различных участков экономической деятельности предприятия: учёта товарных и материальных средств, взаиморасчётов с контрагентами и пр. 1С:Предприятие состоит из трёх компонент: «бухгалтерский учёт», «оперативный учёт» и «расчёт», которые основаны на единой технологической платформе и имеют схожие принципы функционирования. Компонента «бухгалтерский учёт» используется для ведения учёта на основе бухгалтерских операций, компонента «оперативный учёт» – для учёта наличия и движения средств в самых различных разрезах в реальном времени, компонента «расчёт» – для выполнения сложных периодических расчётов. Конкретные прикладные программы, созданные на основе компонент и ориентированные на автоматизацию определённой сферы экономической деятельности, называются конфигурациями (табл. 1).

Примечание. Конфигурирование – важнейшее свойство системы программ 1С:Предприятие, за счёт которого на одной и той же технологической платформе могут создаваться существенно различающиеся прикладные решения. Для создания и изменения конфигураций используются средства конфигурирования. Программа может содержать или не содержать их. Если программа содержит такие средства, пользователь имеет возможность изменить конфигурацию, настраивая продукт на особенности учёта конкретной организации.

Конфигурация обычно поставляется в качестве типовой для конкретной области применения и, в большинстве случаев, изменяется или дополняется пользователем системы, умеющим конфигурировать в 1С.

В помощь организациям, желающим работать с программами фирмы 1С, создана современная схема развития внедренческого бизнеса – 1С:Франчайзинг. Это сеть организаций, сертифицированных фирмой 1С на оказание комплексных услуг по автоматизации учетной и офисной работы. Фирма 1С имеет развитую и развивающуюся структуру фирм-партнёров 1С по России, со статусом «франчайзи», которые гарантируют грамотные консультации в выборе программного продукта фирмы 1С, его внедрение, послепродажное обслуживание, консультации, индивидуальное обучение и доработку под специфику конкретной организации. К настоящему моменту с фирмой 1С сотрудничают как франчайзи более 3300 организаций в городах России и стран СНГ. Например, в Кирове – ООО «МастерСофт», ООО «Орком» и др.

На сегодняшний день в Кировской области компоненту «оперативный учёт» используют многие предприятия различных отраслей. Приведём примеры (см. табл. 2).

Особенности использования: если в других отраслях есть возможность установки только одной компоненты – например, оперативный торговый и складской учёт, то в производстве устанавливаются, как правило, все три компоненты. Особую популярность сейчас приобретает программа 1С:Управление производственным предприятием 8.0, которая позволяет полностью

Таблица 1

Примеры конфигураций (программ) системы 1С:Предприятие

Название конфигурации	Компоненты, используемые при создании конфигураций		
	Компонента «Бухгалтерский учёт»	Компонента «Оперативный учёт»	Компонента «Расчёт»
Типовые конфигурации	1С:Бухгалтерия, 1С:Бухгалтерия для бюджетных организаций и др.	1С:Торговля и склад, 1С:Предприниматель, 1С:Школьная библиотека и др.	1С:Зарплата и кадры, 1С:Налогоплательщик и др.
Комплексные конфигурации (созданные на основе трёх компонент)	1С:Предприятие 7.7. Комплексная поставка (ведётся всё в одной базе, в одной программе), 1С:Предприятие 7.7. Набор для небольшой фирмы (три разные базы, три разные программы), 1С:Предприятие 7.7. Набор для бухгалтерии образовательного учреждения и др.		
Не типовые конфигурации (т. е. конфигурации, созданные другими фирмами на основе типовых конфигураций при помощи конфигурирования)	Софт-Портал: Управление сбытом тепловой энергии и др.	Альфа-Авто: Автосалон + Автосервис и др.	Север: Расчёт квартплаты и др.

автоматизировать управление предприятием на производстве на новой, улучшенной платформе 1С:Предприятие 8.0 (см. табл. 3, 4).

Особенности использования программы 1С:Торговля и склад в торговле: перед началом эксплуатации системы в торговле специалист, устанавливающий программу, должен сделать настройки в программе под использование контрольно-кассовых машин, если таковые имеются, и подключить их. Кроме того, настроить права, меню и интерфейс пользователям; показать, как делать резервное копирование; обучить элементарным приёмам работы с программой кассира, оператора на выписку товара в оптовой и розничной торговле, с подключением или без подключения ККМ; для работающих с удалёнными торговыми точками – предоставить алгоритм их работы и информацию о возможностях настройки автоматизированной работы с удалённой торговой точкой (см. табл. 5).

Особенности использования программы 1С:Торговля и склад в ресторанах и общественном питании: ставится компонента «оперативный торговый и складской учёт» (сетевая), но в связи со спецификой ресторанного бизнеса (наличие блюд) предпочтение отдаётся программе АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ, принципы работы в которой схожи с принципами работы в программе 1С:Торговля и склад.

Отраслевая специализация фирм-франчайзи обеспечивает существенное повышение эффективности их деятельности за счет хорошего знаком-

Таблица 2

Отрасль: Производство

Предприятие, дата внедрения	Компоненты, виды учёта, базовая конфигурация	Параметры
1	2	3
Производство: Машиностроение/приборостроение		
Компания «ИмЛайт» (ЧП Преснецов), Киров, Сентябрь 2006. Компания «ИмЛайт» занимается производством светотехнических изделий. Была внедрена программа 1С:Управление производственным предприятием 8.0 без доработок	Б Т Р; 8.0; для SQL; Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет, Управление производственным предприятием (8.0) 1.1	Объем базы: 400 Мб. Общее число автоматизированных рабочих мест: 4. Среднее число одновременных подключений к базе: 2
Производство: Лесная и деревообрабатывающая промышленность		
ЗАО «Лесбод», Киров, Август 2004. «Лесбод» – предприятие деревообрабатывающей промышленности (в составе Нововятского лыжного комбината г. Киров), осуществляющее выпуск комплектующих для изготовления мебели. За базовую конфигурацию была взята разработка «ИТРП: Производственное предприятие ПРОФ». «ИТРП ПРОФ» – комплексное решение уровня MRPII-ERP для средних и крупных промышленных предприятий. Задействованы модули: «Управление складскими запасами» и «Учет хозяйственных операций». Ведется пооперационный производственный учет с расчетом себестоимости по каждой операции	Б Т Р; 7.7; для SQL; Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет, Расчет зарплаты и кадровый учет. Базовая конфигурация: Сертиф. продукт (1С:Совместимо)	Клиент-серверный вариант работы. Общее количество автоматизированных рабочих мест – 10. Количество вводимых документов в день – 50. Среднее количество строк в одном документе – 10. Объем информационной базы – 100 Мб. У конечных пользователей используются терминалы (бездисковые рабочие станции). Сеть – 100 Мбит
Производство: изготовление продуктов питания		
ООО «Бизон-Т»	Оперативный торговый и складской учет	
Производство: изготовление меховых изделий		
Зверохозяйство «Вятка»	Оперативный торговый и складской учет	

Окончание табл. 2

1	2	3
Производство: Электроэнергетика		
ОАО «Коммунэнерго» Киров, Сентябрь 2006 ОАО «Коммунэнерго» – предприятие энергетической отрасли, основными видами деятельности которого являются производство и передача теплоэнергии и передача электроэнергии. На предприятии работают 2500 сотрудников. Руководство предприятия поставило цель внедрить систему автоматизации, которая позволит создать единое информационное пространство, куда войдут 9 предприятий электрических сетей (МПЭС) и 8 предприятий котельных и тепловых сетей (ПК и ТС); каждое предприятие, в свою очередь, делится на участки, охватывающие все 34 района Кировской области. В апреле 2005 года руководством компании было принято решение внедрения единой автоматизированной системы управления финансово-хозяйственной деятельностью холдинга на базе 1С:Управление производственным предприятием 8.0. Партнером по внедрению была выбрана компания НТЦ «Электрон» – благодаря опыту ее специалистов, статусу «ЦКП» и 1С:Франчайзи, хорошей репутации в сфере автоматизации производственных предприятий. В январе 2006 года специалисты компании «Электрон» успешно завершили доработку базового функционала 1С:Управление производственным предприятием 8.0, перенос данных из существующих систем учета, подготовку к запуску системы в эксплуатацию, и с января 2006 года система автоматизации была запущена в опытно-промышленную эксплуатацию. С сентября 2006 специалисты компании «Электрон» запустили систему автоматизации на 140 рабочих мест в промышленную эксплуатацию. Система автоматизации охватывает следующее участки: Управление договорной базой организации; Бюджетирование; Управление денежными средствами; Бухгалтерский учет; Кадровый учет; Расчет заработной платы; Управление закупками; Управление материально-производственными запасами; По объектный учет затрат; Учет затрат и расчет себестоимости. Внедрение единой информационной системы на базе 1С:Управление производственным предприятием 8.0 позволило руководству холдинга и входящих в него предприятий оперативно принимать управленческие решения на основании объективных и актуальных данных	Б Т Р ; 8.0; для SQL; Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет, Расчет зарплаты и кадровый учет, Другие виды учета и универсальные решения; Управление производственным предприятием (8.0) 1.1	База данных: 8GB. 2 сервера: MS SQL Server и Сервер 1С:Предприятие. Общее число автоматизированных рабочих мест: 140. Среднее число одновременных подключений к базе: 70
Разное		
«Киров-Рыба», Киров, 2006 Предприятие является холдингом, состоящим из нескольких юридических лиц, осуществляющих производство и реализацию продуктов питания. Подразделения холдинга территориально разнесены. Был внедрен производственный, бухгалтерский, торгово-складской учет. Была учтена специфика работы предприятия – производство из давальческого сырья, автоматический учет движения сырья и готовой продукции между юридическими лицами холдинга, учет управленческой себестоимости по холдингу в целом и бухгалтерской себестоимости по юридическим лицам. Нормирование списания сырья по нормам выхода готовой продукции. Организован автоматический обмен данными между территориально разнесенными подразделениями	На базе 1С:Управление производственным предприятием 8.0; производственный, бухгалтерский, торгово-складской учет	

ства с предметной областью и способствует появлению конфигураций, хорошо отражающих специфику конкретных отраслей. Фирма 1С регулярно публикует сборник «Внедренные решения на основе системы программ 1С:Предприятие, в котором содержится информация об использовании системы 1С:Предприятие в конкретных организациях в самых различных отраслях. В этом сборнике представляются материалы об оригинальных конфигурациях, разработанных фирмами франчайзинговой сети 1С, а также примеры внедрения типовых конфигураций 1С. Наиболее отработанные решения партнеров оформляются в виде тиражных типовых конфигураций для системы 1С:Предприятие и передаются в фирму 1С для сертификации. После тщательно-

Таблица 3

Отрасль: Торговля оптовая и розничная без подключения торгового оборудования

Предприятие, дата внедрения	Компоненты, виды учёта, базовая конфигурация	Параметры
Автоматизация предприятия торговли и общепита		
ОАО ВМП «Авитек» ТД «Авитек», Киров, Февраль 2004. Торговый Дом «Авитек» – предприятие, осуществляющее торговлю бытовой техникой и товарами широкого потребления оптом и в розницу, а также оказывающее услуги общепита. За базовую конфигурацию была взята 1С:Предприятие 7.7. Комплексная поставка. Дополнительно к возможностям комплексной конфигурации был реализован механизм суммового учета в розничных магазинах	Б Т; 7.7; сетевая Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет Комплексная 4.54	Используется сервер приложений. Общее количество автоматизированных рабочих мест – 8. Количество вводимых документов в день – 50. Среднее количество строк в одном документе – 10. Объем информационной базы – 100 Мб. Средние характеристики компьютеров конечных пользователей: Celeron 1000 / 128 / 20. Сеть 100 Мбит
Комплексная автоматизация производства и продажи ветеринарных товаров (медикаменты)		
ООО «Лена», Киров, Январь 2004. «Лена» – торгово-производственное предприятие, осуществляющее производство ветеринарных препаратов и их продажу, а также розничную и оптовую продажу других ветеринарных товаров. За базовую конфигурацию была взята 1С:Предприятие 7.7 Комплексная поставка для SQL. Реализован раздельный оперативный и бухгалтерский учет. Реализован производственный учет с использованием спецификаций, автоматическим списанием сырья по спецификациям, автоматическим подбором аналогов сырья, автоматическим подбором складов списания сырья. Реализованы стандартные возможности простого взаимозачета – закрытие долга покупателя на долг поставщика, а также сложные зачеты – передача долга, переуступка долга одним документом; реализация ТМЦ с розничного склада по произвольным ценам; торговля по агентскому договору	Б Т; 7.7; сетевая Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет, Расчет зарплаты и кадровый учет Комплексная 4.53	Клиент-серверный вариант работы. Общее количество автоматизированных рабочих мест – 11. Количество вводимых документов в день – 100–200. Среднее количество строк в одном документе – 3. Объем информационной базы – 500 Мб. Средние характеристики компьютеров конечных пользователей: Pentium 4 1500 / 256 / 20. Сеть 100 Мбит
Автоматизация предприятия торговли		
ООО «Грузовая оснастка»	Оперативный торговый и складской учет	

го тестирования на соответствие определенному набору требований такие продукты получают сертификат «Совместимо! Система программ 1С:Предприятие» и продаются фирмой 1С клиентам в режиме дистрибьюции через партнерскую сеть. В настоящее время уже есть решения для автотранспортных предприятий, бюджетных и военных организаций, гостиниц, интернет-технологий, для расчета квартплаты, для медицинских учреждений, международных и национальных стандартов учета, некоммерческих организаций, образования, общественного питания, планирования, управленческого учета и финансового анализа, для производственных предприятий, страховых организаций, строительства, для торговли различными видами товаров (автомобили, меди-

Таблица 4

Отрасль: Торговля оптовая и розничная с подключением торгового оборудования

Предприятие, дата внедрения	Компоненты, виды учёта, базовая конфигурация	Параметры
Автоматизация оптовой и розничной торговли автошинами (Автомобили, автозапчасти)		
Киров, Май 2005. Предприятие заказчика занимается оптовой и розничной торговлей автошинами, внешнеторговой деятельностью, имеет сеть розничных магазинов. Был внедрен торгово-складской учет на базе конфигурации 1С:Управление торговлей 8.0 и бухгалтерский учет на базе конфигурации 1С:Бухгалтерия 8.0, организована выгрузка данных из 1С:Управления торговлей в 1С:Бухгалтерию 8.0 и обмен данными с магазинами	Б Т ; 8.0; сетевая Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет Сочетание конфигураций	Вариант работы – сетевой; общее количество автоматизированных рабочих мест – 8. Общее число автоматизированных рабочих мест: 8 Среднее число одновременных подключений к базе: 5
Автоматизация оптовой и розничной торговли		
Торговая фирма «Вятка» (Зониха)	Оперативный торговый и складской учет	
Автоматизация оптовой и розничной торговли		
Магазин «Весна», Нововятский р-н г. Кирова	Оперативный торговый и складской учет	
Комплексная автоматизация торгового предприятия с удаленными торговыми точками (Автомобили, автозапчасти)		
ООО «Регион-шина» Киров, Февраль 2004. «Регион-шина» – торговое предприятие, осуществляющее розничную торговлю шинами и автозапчастями. За базовую конфигурацию была взята 1С:Предприятие 7.7 для SQL. Комплексная поставка – в центральном офисе. В удаленных магазинах – 1С:Торговля и склад 7.7. Реализованы различные схемы торгового учета, автоматический обмен данными между розничными магазинами и центральным офисом	Б Т Р; 7.7; для SQL; Бухгалтерский учет, Налоговый учет, Оперативный торговый и складской учет, Расчет зарплаты и кадровый учет Комплексная 4.51	Используются SQL-сервер и сервер приложений. Общее количество автоматизированных рабочих мест – 20. Количество вводимых документов в день – 100. Среднее количество строк в одном документе – 10. Объем информационной базы – 400 Мб. Средние характеристики компьютеров конечных пользователей: Pentium 4 1600 / 256 / 40. Сеть 100 Мбит
Автоматизация оптовой и розничной торговли		
Магазин «Чайник»	Оперативный торговый и складской учет	

Таблица 5

Отрасль: Рестораны и общественное питание

Предприятие, дата внедрения	Компоненты, виды учёта, базовая конфигурация	Параметры
1	2	3
Сфера использования: Разное		
Ресторан «Глобус», ул. Воровского, д. 94 Киров, Апрель 2006. Задачи автоматизации были полностью реализованы с помощью типовой системы АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ. Система позволяет решать следующие задачи: Управление работой зала при различных формах обслуживания гостей – официанты, самообслуживание, частичное самообслуживание. Контроль над действиями персонала. Реализация системы скидок и/или дисконтных карт для гостей. Получение достоверной информации о продажах. Оперативный учет товаров на складах. Оперативный учет взаиморасчетов с поставщиками. Оперативный учет производства блюд по калькуляционным картам. Планирование производства полуфабрикатов и кондитерских изделий. Планирование банкетов. Учет материальной ответственности. Получение руководителем ресторана достоверной информации о текущем состоянии дел. Бухгалтерский учет. Запуск объекта был произведен за 5 дней	Т; 7.7; сетевая 3-пользовательская; Оперативный торговый и складской учет	Программные продукты (ОС, 1С и АСТОР): 1С:Предприятие. Оперативный учет. Конфигурация торговля и склад 7.7 сетевая версия для 3 пользователей. АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ Установленное оборудование: AR-POS Touch-01/1 Моноблок (Gray). – 2 шт. Фискальный регистратор Штрих-ФР-К – 1 шт. Принтер чековый Star 643 – 2 шт. Общее число автоматизированных рабочих мест: 5. Среднее число одновременных подключений к базе: 3
Кофейня «Глобус», ул. Воровского, д. 94. Торговая площадь – 300м^2. Киров, Сентябрь 2005. Задачи автоматизации были полностью реализованы с помощью программного продукта АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ.	Т; 7.7; сетевая 3-пользовательская; Оперативный торговый и складской учет	Программные продукты: 1С:Предприятие. Оперативный учет. Конфигурация торговля и склад 7.7 сетевая версия для 3 пользователей АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ. Общее число автоматизированных рабочих мест: 5. Среднее число одновременных подключений к базе: 3
Кафе «Глобус». Киров, Июль 2004. Кафе «Глобус» рассчитано на 250 мест (два зала внутри здания и летнее кафе на 40 мест). Задачи автоматизации были полностью реализованы с помощью типовой системы АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ. Проведен полный типовой курс обучения персонала. Запуск объекта произведен за 6 дней	Т; 7.7; сетевая 3-пользовательская; Оперативный торговый и складской учет	1С:Предприятие 7.7. Оперативный учет. Конфигурация Торговля+Склад сетевая версия для 3 пользователей, АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ. Оборудование: AR-POS Touch-02 (Black) – 4 шт.; фискальный регистратор Штрих-ФР-Ф с денежным ящиком – 2 шт.; принтер чековый Star 643 – 3 шт.; сканер Metrologic MS9520-41 Voyager – 1 шт.

Окончание табл. 5

1	2	3
Ресторан «Глобус», ул. Сурикова, 19. На первом этаже – кофейня, на втором – ресторан, живая музыка (рояль), камин. Киров, Февраль 2005. Пожелания клиента были полностью реализованы с помощью типовой системы АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ	Т; 7.7; сетевая 3-пользовательская; Оперативный торговый и складской учет	1. Программные продукты: 1С:Предприятие. Оперативный учет. Конфигурация Торговля и склад 7.7 сетевая версия для 3 пользователей. АСТОР:Ресторан 3.0 ПРОФ. АРМ обслуживания посетителей – 4 шт. 2. Установленное оборудование: AR-POS Touch-02 (Black) – 4 шт. Фискальный регистратор Штрих-ФР-К с денежным ящиком (Black) – 2 шт. Принтер чековый Star 643 (Black) – 4 шт. Сканер Metrologic MS9520 Voyager – 2 шт. AR-Модуль. Считыватель магнитных карт
Пиццерия, ул. Лепсе, 37. Киров, Май 2005. Задачи автоматизации были полностью реализованы с помощью типовой системы АСТОР Ресторан проф. 3.0.	Т; 7.7; сетевая 3-пользовательская; Оперативный торговый и складской учет	1С:Предприятие торговля 3-пользовательская АСТОР Ресторан проф. 3.0. Общее число автоматизированных рабочих мест: 3. Среднее число одновременных подключений к базе: 2

Таблица 6

№ п/п	Наименование дисциплины	Кол-во аудиторных часов на дисциплину	Программа системы 1С:Предприятие	Курс, семестр
1	Интегративные экономические системы	208 (практические и семинарские занятия)	1С:Торговля и склад 7.7 (в 6-м семестре), 1С:Бухгалтерия 7.7 – основы конфигурирования (в 7-м семестре) Администрирование и конфигурирование в 1С: Предприятие 7.7 (все компоненты) (8–9-й семестры)	III, IV, V курсы, 6, 7, 8, 9-й семестры
2	Информационные системы в бухучёте и аудите	36 (лекции) + 18 (лаб. занятия)	1С:Зарплата и кадры 7.7	IV курс, 7-й семестр
3	Предметно-ориентированные экономические информационные системы	30 (лекции) + 28 (лаб. занятия) Экзамен (9-й семестр)	1С:Бухгалтерия 7.7	IV, V курсы, 8, 9-й семестры
4	Информационные системы в информационном менеджменте	28 (лекции) + 14 (лаб. занятия)	1С:Предприятие 8.0. Управление производственным предприятием	IV курс, 8-й семестр

каменты, алкоголь и т. д.) и стыковки с торговым оборудованием, специальный расчет зарплаты и кадровый учет, а также различные утилиты для 1С:Предприятия и решения, предоставляющие дополнительные сервисные возможности.

Всё это позволяет говорить о том, что программные продукты фирмы 1С и дальше будут распространятся и использоваться на предприятиях и в организациях как Кировской области, так и России в целом. Значит, и в будущем необходимы новые кадры, имеющие навыки работы в программах системы 1С:Предприятие по учёту, администрированию, внедрению и программированию продуктов 1С.

Выводы: в связи с развитием торговли и повышением требований покупателей к качеству и быстроте обслуживания возникла необходимость в автоматизации торгового процесса. А так как одним из лучших вариантов автоматизации деятельности предприятия является платформа 1С:Предприятие, то необходимо готовить высококвалифицированных пользователей и программистов 1С. Рассмотрим возможность такой подготовки в ВятГГУ на специальности «Прикладная информатика в экономике».

Место, содержание и цель изучения программы 1С:Торговля и склад на специальности «Прикладная информатика в экономике»

В соответствии со стандартами и учебным планом предлагаем следующий план по изучению 1С:Предприятие в ВятГГУ на специальности «Прикладная информатика в экономике» (см. табл. 6).

Содержание (табл. 7).

Целью изучения программы 1С:Торговля и склад является первоначальное знакомство с системой 1С:Предприятие и работа с основными объектами программы: справочниками, документами, журналами документов, отчётами.

Методические рекомендации по изучению программ 1С:Торговля и склад

Для лучшего освоения программ, в качестве раздаточного материала, рекомендуется использовать на уроках учебные пособия, например те, которые указаны в библиографическом списке к статье.

Кроме учебных пособий или вместо них педагогу необходимо подготовить подборку следующих материалов: небольшой теоретический или поясняющий блок; задания с подробным описанием их выполнения; разноуровневые упражнения для самостоятельного выполнения с целью закрепления полученных знаний, умений и навыков по небольшому блоку информации; обобщающие, систематизирующие и закрепляющие самостоятельные работы; задания для итогового контроля по изученной программе.

Перед началом занятий для каждого учащегося рекомендуется подготовить по 2–4 чистые информационные базы (демоверсию базы можно показать, но обучение лучше проводить на пустой базе). В начале занятий все вместе переименовываем одну из чистых баз на название, включающее учебную группу и ФИО обучающегося. Эта база будет использоваться для обучения. Вторую и третью из чистых баз учащийся переименовывает самостоятельно и выполняет в них задания для повторения и закрепления знаний и умений, полученных при выполнении практических работ на первой информационной базе. Итоговый контроль проводится также в чистой информационной базе.

Перед проведением практических работ рекомендуется осветить общие сведения о системе

Таблица 7

№ п/п	Наименование разделов и тем по программе 1С:Торговля и склад
1	**Система 1С:Предприятие:** основные компоненты и их назначение, конфигурации и конфигурирование, версии конфигураций, установка и обновление программ
2	**1С:Торговля и склад**
2.1	Назначение и возможности программы 1С:Торговля и склад. Запуск программы. Система помощи. Основные объекты. Обзор работы с программой
2.2	Начальные настройки
2.3	Справочники. Операции в справочниках. Заполнение справочников. Прайс-лист, ценники
2.4	Ввод остатков. Отчёты
2.5	Работа с поставщиком в оптовой торговле
2.6	Работа с покупателем в оптовой торговле. Быстрая продажа
2.7	Самостоятельная работа № 1
2.8	Перемещение товара с одного склада на другой. Продажа товара в розничной торговле. Работа с ККМ. Возврат товара. Работа с комплектами товаров
2.9	Работа с удалённой торговой точкой
2.10	Самостоятельная работа № 2

1С:Предприятие, такие, как основные компоненты и их назначение, конфигурации и конфигурирование, версии конфигураций, установка и обновление программ, первый запуск, система помощи, основные объекты программы.

Желательно сказать о необходимом минимуме изучения программы. Для работающих в быстром темпе – предложить дополнительные практические работы с закрепляющим и новым материалом.

При выполнении практических работ новый материал необходимо давать в начале урока, а затем отводить время для самостоятельной работы, так как темпы выполнения практических работ у обучающихся разные.

Задания для итогового контроля желательно подготовить в нескольких вариантах и разного уровня сложности. Для слабых студентов допускается предварительное заполнение педагогом информационной базы с настройкой значений по умолчанию.

При проведении занятий необходимо обратить внимание студентов на актуальность использования программы 1С:Торговля и склад, на особенности применения её в настоящее время в разных отраслях (см. примеры по Кировской области в статье выше). После изучения этой программы студент должен уметь делать настройки под любой запрос пользователя, любой отрасли: создать или изменить справочник, документ, отчёт; задать права, меню и интерфейс для пользователей системы; подключить и настроить ККМ; обучить работе в программе, помочь решить возникшую при работе в программе проблему.

Примечания

1. *Богачёва, Т. Г.* 1С:Торговля и склад в вопросах и ответах [Текст] : практическое пособие / Т. Г. Богачёва. М.: ООО «1С-Паблишинг», 2003.

2. *Володина, Е. В.* Практика применения программы 1С:Торговля и склад 7.7 редакция 9.2. Пример решения сквозной задачи – от ввода реквизитов до формирования отчётов [Текст] / Е. В. Володина, А. Д. Севостьянов, Ю. М. Севостьянова. М.: АУЦ фирмы «1С» ООО «Константа», 2006.

3. *Линёва, Е.* 1С:Торговля и склад 7.7: практический курс для начинающего пользователя [Текст] / Е. Линева, Э. Бойко, А. Ерёмин, Е. Мальчук. М.: Общество «Знание» России. Правление, 2004.

4. [Электронный ресурс] http://www.1c.ru

М. Л. Ямшанов

АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ SVM-КЛАССИФИКАТОРА С ГАУССОВЫМ ЯДРОМ ДЛЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РУБРИКАЦИИ ТЕКСТОВЫХ ДОКУМЕНТОВ

В статье рассматривается модификация алгоритма декомпозиции SMO для обучения SVM-классификатора в случае использования гауссова ядра для нелинейного преобразования пространства признаков в задаче автоматической рубрикации текстовых документов.

В последнее время, в связи с бурным развитием информационных технологий и телекоммуникаций, значительно возросли объемы передаваемой информации. Необходимость обработки разнородной, слабо структурированной и избыточной информации, обладающей высокой динамикой обновления, определяет актуальность задач автоматической обработки информации, в том числе автоматической классификации текстовых документов.

Задача классификации заключается в разбиении массива текстовых документов на определенные смысловые группы, в пределах которых документы имеют некоторую степень подобия по какому-либо критерию. При этом наибольший интерес представляет критерий тематической близости документов.

Для автоматической классификации используются различные методы статистического анализа и системы искусственного интеллекта [1]. Одним из достаточно распространенных методов, применяемых для классификации текстов, является метод опорных векторов (SVM – Support Vector Mashines) [3, 7, 11, 12].

SVM – это семейство алгоритмов классификации и регрессии, основанных на теории минимизации структурного риска В. Вапника [2].

В основе SVM лежит построение гиперплоскости в евклидовом пространстве R^N, разделяющей обучающее множество X векторов признаков на два класса, при этом ставится задача найти оптимальную гиперплоскость, т. е. гиперплоскость, имеющую наибольшую разделяющую полосу (ширину границы), что позволит лучше классифицировать новые данные. Построение такой гиперплоскости в SVM решается задачей минимизации функционала при огромном количестве линейных ограничений.

У метода опорных векторов выделяется две стадии: обучения и классификации. На стадии обучения строится разделяющая гиперплоскость

ЯМШАНОВ Михаил Львович – заместитель директора ФГУП НИИ СВТ по научной работе
© Ямшанов М. Л., 2007

на основе обучающих данных, а на стадии классификации алгоритм по любому входному объекту решает, какому классу этот объект принадлежит.

Для каждого обучающего n-мерного вектора-признаков x_i определяется число y_i, равное 1, если x_i принадлежит одному классу, и −1, если другому. То есть обучающий набор представится в виде $T = ((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n))$, где n – количество обучающих векторов-признаков.

Разделить два класса гиперплоскостью равносильно тому, чтобы найти линейную функцию f на R^N, положительную на одном классе и отрицательную на другом, то есть такую, что $y_i f(x_i) > 0$ для любого i. Тогда для классификации любого вектора признаков x_i достаточно будет вычислить знак функции f.

Существуют различные варианты построения разделяющей гиперплоскости: с жесткой границей, с мягкой границей, линейные и нелинейные. Учитывая, что в задаче классификации текстовых документов, как правило, трудно линейно разделить вектора признаков, необходимо использовать нелинейную разделяющую гиперплоскость. Для этого применяется отображение Φ(x) признаков классификации из Евклидова пространства R^N в Гилбертово пространство большей размерности $\hbar$ с помощью функции ядра:

$$K(x_i, x_j) = \langle \Phi(x_i), \Phi(x_j) \rangle \hbar .$$

Пространство-образ $\hbar$ считается пространством вторичных признаков X′ (оно зависит от обучающего набора). В этом пространстве обучается уже линейный классификатор, при этом каждый вектор признаков x_i переходит в вектор вторичных признаков.

В теории SVM существует достаточно большое количество типов ядер, используемых для перевода пространства признаков в пространство большей размерности, среди которых можно выделить четыре основных типа: линейное, полиномиальное, гауссово, сигмоидальное.

В случае применения SVM к задаче классификации текстовых документов элементами векторов-признаков являются веса терминов документа, наилучшим образом отражающих тематику документа (рубрику классификатора).

Поскольку в каноническом виде SVM решает задачу разделения двух классов, сформулируем задачу рубрикации для двух тематических рубрик C_1 и C_2 .

Имеется обучающий набор X классификатора, состоящий из обучающих документов x_i, $i = 1, ..., N$ для рубрик C_1 и C_2 на общем наборе терминов размером L, а также вектора признаков y, элементы которого показывают, к какой из двух тематических рубрик относится i-й вектор:

$$X = \{ (x_i, y_i) \mid x_i \in R^N, y_i \in \{+1, -1\} \},$$

где

$$y_i = \begin{Bmatrix} 1 : x_i \in C_1 \\ -1 : x_i \in C_2 \end{Bmatrix} .$$

SVM-классификатор определен как [2]:

$$d(x) = sign(f(x)) = \begin{Bmatrix} 1 : f(x) \ge 0 \\ -1 : f(x) < 0 \end{Bmatrix} ,$$

где $f(x)$ является функционалом границы между двумя рубриками:

$$f(x) = \langle w, \Phi(x) \rangle \hbar + b = \sum_{i=1}^{N} w_i K(x_i, x) + b . \quad (1)$$

Нахождение оптимальных параметров w и b, соответствующих оптимальной разделяющей гиперплоскости, связано с решением следующей оптимизационной задачи:

$$\min g(w, \xi) = \frac{1}{2} w^T w + C \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i \right) \quad (2)$$

при условии:

$$y_i((w, \Phi(x_i)) \hbar + b) \ge 1 - \xi_i, \xi_i \ge 0 . \quad (3)$$

ξ – ослабляющая переменная, определяющая допустимое нарушение ширины границы гиперплоскости. Константа $C > 0$ – управляющий параметр алгоритма, который, по сути, является штрафным параметром и позволяет находить компромисс между максимизацией разделяющей полосы и минимизацией суммарной ошибки.

В работах В. Вапника [3, 4] было показано, что обучение SVM-классификатора требует решения следующей двойственной квадратичной задачи оптимизации:

$$\max \ W(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} y_i y_j \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \quad (4)$$

при условии:

$$\sum_{i,j=1}^{N} y_i \alpha_i = 0, \qquad 0 \le \alpha_i \le C, \quad i = 1, \ldots, N. \quad (5)$$

Здесь N – количество обучающих примеров, α – вектор N переменных, представляющих собой множители Лагранжа, где каждый компонент α_i соответствует обучающему примеру (x_i, y_i). В сумму (4) с ненулевыми коэффициентами α_i входят только те вектора, для которых:

$$(y_i((w, x_i) + b) - 1) = 0,$$

т. е. опорные.

Решением задачи (4) является вектор α^*, для которого (4) максимизируется при выполнении ограничений (5).

Определив матрицу Q как $(Q)_{ij} = y_i y_j K(x_i, x_j)$ получим:

$$\max W(\alpha) = \alpha^T e - \frac{1}{2}\alpha^T Q\alpha \qquad (6)$$

при условии: $\begin{matrix} 0 \le \alpha_i \le C, \\ \alpha^T y = 0 \end{matrix}$. (7)

Здесь e – единичный вектор, Q – симметричная гессианская матрица размером NxN.

При относительно небольшом количестве множителей Лагранжа оптимизационная задача (6) может быть решена традиционными методами решения задач квадратичного программирования, например, методом градиентного спуска. Однако в задачах текстовой классификации размерность входного пространства может оказаться очень большой. В этом случае использование стандартных решений (6) становится проблематичным, поскольку невозможно хранить гессианскую матрицу Q в памяти.

В настоящее время предложено несколько различных подходов к решению данной проблемы, среди которых наиболее успешными являются методы, основанные на декомпозиции, при которой одна большая задача разбивается на серию подзадач меньшего размера [5, 6, 7].

Общая идея методов декомпозиции для обучения SVM заключается в разбиении (6) на неактивную и активную части (так называемый «рабочий набор»). Главным преимуществом данного подхода является то, что он предлагает алгоритмы с требованиями памяти, которые линейны относительно количества обучающих примеров и количества опорных векторов.

Первый метод по разбиению больших задач обучения SVM на серии меньших задач оптимизации был предложен в работе [3]. Он известен как алгоритм «образования фрагментов» («chunking»). Алгоритм начинает со случайного подмножества данных, решает эту задачу и многократно добавляет примеры, которые нарушают условия оптимальности. В [5] формально доказано, что такая стратегия сходится с оптимальным решением. Недостатком этого алгоритма является то, что необходимо решать задачи оптимизации, масштабируя их с количеством опорных векторов.

Особым случаем методов декомпозиции SVM является алгоритм «последовательной минимальной оптимизации» (Sequential Minimal Optimization (SMO)), предложенный в [6]. Отличие SMO от других алгоритмов декомпозиции заключается в том, что на каждом шаге он решает минимально возможную подзадачу. Так как в задаче присутствует линейное ограничение, то минимальное количество множителей Лагранжа для совместной оптимизации равно двум. А для двух множителей задачу можно решить аналитически, не прибегая к численным методам квадратичного программирования. Несмотря на то что приходится решать много подзадач, каждая из них решается достаточно легко. К тому же при таком подходе нет необходимости хранить даже часть гессианской матрицы в памяти. В качестве стратегии выбора множителей в рабочий набор в SMO предлагается набор эвристик.

Однако алгоритмы обучения, основанные на методе декомпозиции, обладают одним общим недостатком – длительным временем обучения.

Время обучения можно существенно сократить, если в SVM-классификаторе используется гауссово ядро:

$$K(x_i, x_j) = \exp(-\| x_i - x_j \|^2 / 2\sigma^2).$$

Как показано в [8], положительно определенные ядра, в том числе гауссовы, не требуют смещения b в (1). Тогда задача обучения SVM должна максимизировать (4) без учета ограничения:

$$\sum_{i=1}^{N} y_i \alpha_i = 0 .$$

Поскольку в этом случае не существует суммарного ограничения двойственной задачи оптимизации, алгоритм декомпозиции может быть модифицирован и в результате получен более простой и быстрый алгоритм.

Запишем двойственную задачу (4) в виде:

$$\min\ W(\alpha) = \sum_{i,j=1}^{N} y_i y_j \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \qquad (8)$$

при условии: $0 \le \alpha_i \le C$. (9)

В оригинальном алгоритме SMO требуется пошагово оптимизировать 2 множителя в рабочем наборе [α_i, α_j], чтобы гарантировать выполнение суммарных ограничений (5). Алгоритм, адаптированный к задаче, (8) с (9), последовательно оптимизирует только один множитель α_i на каждой итерации, что делает его проще и быстрее, поскольку аналитическое решение легче вычислить для 1-размерной задачи. Кроме того, не требуется производить оптимальный выбор второго множителя в рабочий набор [α_i, α_j], что занимает достаточно много времени в алгоритмах декомпозиции. Параметр для оптимизации выбирается при помощи «первой эвристики выбора», разработанной в [6].

На каждой итерации алгоритма SMO $W(\alpha)$ минимизируется с учетом выбранного параметра, что может быть сделано аналитически. Без потери общности предположим, что будет оптимизировано α_1, в то время как α_2, ..., α_N останутся зафиксированными.

Выделим в (8) все составляющие, содержащие α_1:

$$W(\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i \Big(\alpha_1 y_1 k(x_i, x_1) + \sum_{j=2}^{N}\alpha_j y_j k(x_i, x_j)\Big) - \alpha_1 - \sum_{i=2}^{N}\alpha_i \ .$$

Так как α_2, ..., α_N зафиксированы, обозначим:

$$C_1 = -\sum_{i=2}^{N}\alpha_i \ , \text{ тогда:}$$

$$\begin{aligned} W(\alpha) = {} & \frac{1}{2}\alpha_1 y_1 \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i k(x_i, x_1) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_j y_j \sum_{j=2}^{N}\alpha_j y_j k(x_i, x_j) - \alpha_1 + C_1 \\ = {} & \frac{1}{2}\alpha_1 y_1 \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i k(x_i, x_1) + \frac{1}{2}\alpha_1 y_1 \sum_{j=2}^{N}\alpha_j y_j k(x_1, x_j) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=2}^{N}\alpha_i \alpha_j y_i y_j k(x_i, x_j) - \alpha_1 + C_1 \ . \end{aligned}$$

Снова введем обозначение:

$$C_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=2}^{N}\alpha_i \alpha_j y_i y_j k(x_i, x_j) \ ,$$

тогда:

$$\begin{aligned} W(\alpha) = {} & \frac{1}{2}\alpha_1^2 y_1^2 k(x_1, x_1) + \frac{1}{2}\alpha_1 y_1 \sum_{i=2}^{N}\alpha_i y_i k(x_i, x_1) \\ & + \frac{1}{2}\alpha_1 y_1 \sum_{j=2}^{N}\alpha_j y_j k(x_1, x_j) - \alpha_1 + C_1 + C_2 \ . \end{aligned}$$

Учитывая, что $y_i^2 = 1$ (так как $y_i \in \{\pm 1\}$) и $k(x_i, x_j) = k(x_j, x_i)$, запишем:

$$\begin{aligned} W(\alpha) = {} & \frac{1}{2}k(x_1, x_1)\alpha_1^2 \\ & + \Big(y_1 \sum_{j=2}^{N}\alpha_j y_j k(x_1, x_j) - 1\Big)\alpha_1 + \text{const.} \end{aligned}$$

определим:

$$\alpha_i = \alpha_i^{\text{old}} \quad \text{для } i = 2, \ldots N$$

и значение решающей функции SVM, сохраняемое в кэш:

$$f_i = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{\text{old}} y_j k(x_i, x_j) \ .$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{N}\alpha_j y_j k(x_1, x_j) &= \sum_{j=2}^{N}\alpha_j^{\text{old}} y_j k(x_1, x_j) \\ &= f_1 - \alpha_1^{\text{old}} y_1 k(x_1, x_1) \ , \end{aligned}$$

тогда:

$$W(\alpha) = \frac{1}{2}k(x_1, x_1)\alpha_1^2 + \Big(y_1 f_1 - k(x_1, x_1)\alpha_1^{\text{old}} - 1\Big)\alpha_1 + \text{const.}$$

$W(\alpha)$ находится в минимуме, если $\partial W / \partial \alpha_1 = 0$:

$$\frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha_1} = k(x_1, x_1)\alpha_1 + \Big(y_1 f_1 - k(x_1, x_1)\alpha_1^{\text{old}} - 1\Big) = 0 \ ,$$

тогда:

$$k(x_1, x_1)\Big(\alpha_1 - \alpha_1^{\text{old}}\Big) = 1 - y_1 f_1 \ ,$$

следовательно:

$$\Delta\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_1^{\text{old}} = \frac{1 - y_1 f_1}{k(x_1, x_1)} \ .$$

Перейдем к записи вычисления приращения общего вида:

$$\Delta\alpha_i = \frac{1 - y_i f_i}{k(x_i, x_i)} \ .$$

Соответствие ограничениям (9) достигается путем «ограничения» α_i до интервала [0, C]:

$$\alpha_i = \min\big\{\max\{\alpha_i + \Delta\alpha_i, 0\}, C\big\} \ .$$

Критерием останова алгоритма является соблюдение условий Каруша-Куна-Таккера (KKT) для первичной задачи. Они обеспечивают естественный критерий, поскольку являются необходимыми и достаточными условиями сходимости [9]. Для оптимизации ширины границы в нашем случае должен быть проверен следующий критерий (для трех возможных значений α_i):

$$\begin{aligned} \alpha_i = 0 &\Rightarrow y_i f_i \geq 1 \\ 0 < \alpha_i < C &\Rightarrow y_i f_i = 1 \\ \alpha_i = C &\Rightarrow y_i f_i \leq 1 \ . \end{aligned}$$

Алгоритм декомпозиции допускает выполнение условий KKT с некоторой точностью τ. Обычное значение для задач классификации $\tau = 10^{-3}$. При использовании более высокой точности время обучения может значительно увеличиться, а полученные результаты оказываются ненамного точнее [7].

Время работы алгоритма может быть сокращено с помощью процедуры кэширования за счет ускорения проверки условий KKT [10]. Если параметр α_i был оптимизирован, кэш функции обновляется следующим образом:

$$f_i = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j y_j k(x_i, x_j) = \alpha_1 y_1 k(x_i, x_1) + \sum_{j=2}^{N}\alpha_j^{\text{old}} y_j k(x_i, x_j)$$

Обозначив для фиксированных значений:

$$f_i^{\text{old}} = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{\text{old}} y_j k(x_i, x_j) \ ,$$

запишем:

$$f_i = \alpha_1 y_1 k(x_i, x_1) + \Big(f_i^{\text{old}} - \alpha_1^{\text{old}} y_1 k(x_i, x_1)\Big) .$$

В итоге правило обновления для f_i можно записать:

$$f_i = f_i^{\text{old}} + \Delta\alpha_1 y_1 k(x_i, x_1) .$$

Для проверки работы представленного выше алгоритма в сравнении с классическим SMO было проведено тестирование работы классификатора на известной коллекции документов Reuters для 96 рубрик, в каждой из которых для обучения было использовано от 300 до 1000 документов. Поскольку SVM осуществляет классификацию объектов только двух классов, должна быть применена некоторая стратегия, позволяющая перейти к многоклассовой рубрикации. В нашем случае для тестирования была выбрана стратегия «турнир на выбывание». Данная стратегия, для n рубрик, предусматривает обучение $[(n(n-1))/2]$ SVM-рубрикаторов. «Турнир» между двумя рубриками состоит в классификации входного вектора x_i классификатором, различающим начальную пару рубрик (точку входа классификатора), после чего «проигравшая» рубрика выбывает, а «победившая» участвует в дальнейшей классификации. После $n-1$ итераций, т. е. работы $n-1$ «маленьких» SVM, все рубрики, кроме «победителя», выбывают.

Таким образом, для того чтобы создать многоклассовый рубрикатор, различающий 96 рубрик, необходимо обучить 4560 SVM, различающих каждую пару рубрик. Суммарное время обучения такого рубрикатора на персональном компьютере (P-IV 2,4 Гц, 512 Мб ОЗУ) для SVM с классическим алгоритмом SMO составило порядка 400 с. Время обучения аналогичного рубрикатора на основе SVM с представленным выше алгоритмом обучения составило порядка 230 с, т. е. в 1,7 раза меньше. При этом точность классификации оказалась на одинаковом уровне.

Таким образом, в случае использования в задаче текстовой рубрикации SVM-классификатора с гауссовым ядром, не требующим смещения b в выражении для функционала границы между рубриками (1), время обучения рубрикатора может быть сокращено за счет применения представленной выше модификации алгоритма обучения SMO.

Примечания

1. *Толчеев, И. О.* Модели и методы классификации текстовой информации [Текст] / И. О. Толчеев // Информационные технологии. 2004. № 5. С. 6–13.

2. *Vapnik, V.* Statistical Learning Theory / V. Vapnik. John Wiley & Sons, 1998.

3. *Boser, B. E.* A Training Algorithm for Optimal Margin Classifiers, Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory [Text] / B. E. Boser, I. M. Guyon, V. Vapnik. ACM, 1992.

4. *Cortes, C.* Support-vector network [Text] / C. Cortes, V. Vapnik // Machine Learning. 1995. № 20. P. 273–297.

5. *Osuna, E.* Improved Training Algorithm for Support Vector Machines [Text] / E. Osuna, R. Freund, F. Girosi. Proc. IEEE NNSP '97, (1997).

6. *Platt, J.* Fast training of SVMs using Sequential Minimal Optimization. Advances in Kernel Methods Support Vector Machine [Text] / J. Platt. Cambridge: MIT Press, 1999. P. 185–208.

7. *Joachims, T.* Making Large-scale SVM learning practical. Advances in KernelMethods- Support Vector Learning. B. Schlkopf, Smola, A. J., and Burges, C. J. C. Cambridge, M. A., MIT Press, 1999. P. 169–184.

8. *Kecman, V.* On the Equality of Kernel AdaTron and SequentialMinimal Optimization in Classification and Regression Tasks and Alike Algorithms for Kernel Machines, Proc. of the 11th European Symposium on Artificial Neural Networks [Text] / V. Kecman. ESANN, Bruges, Belgium, 2003. P. 215–222.

9. *Cristianiny, N.* An Introduction to Support Vector Machines and other kernel-based learning methods [Text] / N. Cristianiny, J. Shawe-Taylor. Cambridge University Press, 2000.

10. *Vogt, M.* SMO Algorithms for Support Vector Machines without Bias, Institute Report, Institute of Automatic Control, TU Darmstadt, Darmstadt, Germany [Text] / M. Vogt.

11. *Dumais, S.* Inductive Learning Algorithms and Representation for Text Categorization [Text] / S. Dumais, J. Platt, D. Heckerman, M. Sahami // Proceedings of the 7th Annual International ACM CIKM Conference on Information and Knowledge Management. 1998. P. 148–155.

12. *Kwok, J. T.-Y.* Automated Text Categorization Using Support Vector Machine [Text] / J. T.-Y. Kwok // Proceedings of ICONIP'98, 5th International Conference on Neural Information Processing, 1998.

МАТЕМАТИКА

И. В. Акимова

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБУЧЕНИИ

Одной из современных тенденций высшего образования является подготовка педагогических кадров к использованию новых информационных технологий. В статье выделены два аспекта такой подготовки. Во-первых, это общая компьютерная подготовка, рассматривающая компьютерные и информационные технологии в качестве объекта изучения. Такая подготовка должна содержать элементы будущей профессиональной деятельности. Второй аспект – это педагогическая компьютерная подготовка, рассматривающая информационные технологии, в первую очередь, как средство обучения математике. Практически она может быть реализована в рамках спецкурсов и спецсеминаров по методике обучения математике.

Одной из современных тенденций высшего образования является подготовка педагогических кадров к использованию новых информационных технологий. Все нарастающая информатизация образования требует от учителя квалифицированно применять именно те информационные технологии, которые в полной мере соответствуют содержанию и целям изучения конкретной дисциплины, в частности математики.

В современной литературе выделяют, как правило, два аспекта подготовки педагогов к работе в условиях информатизации математического образования.

Во-первых, это общая компьютерная подготовка, рассматривающая компьютерные и информационные технологии в качестве объекта изучения. Такая подготовка предполагает овладение знаниями, умениями, навыками компьютерной грамотности, знаниями принципов работы устройств компьютерной техники, умения по взаимодействию с операционной системой и ее настройками, представления о компьютерных коммуникациях, сети Internet, базовые знания в области алгоритмизации и программировании, представление о математическом моделировании. На наш взгляд, уже такая начальная подготовка должна содержать элементы будущей профессиональной деятельности. Например, могут быть предложены такие варианты:

– компьютерные задания могут сопровождаться математическими примерами: *Решить задачу «Проверить, является ли данный треугольник прямоугольным»;*

– пользовательские навыки ориентироваться на работу с математическими текстами;

– использование прикладных программ ориентировано на представление дидактического материала по математике*: Составить презентацию Power Point, демонстрирующую три признака равенства треугольника*;

– применение математических пакетов для решения прикладных математических задач: *В системе MathCad постройте графики функций* $y = x$ *и* $y = x^2$ и т. д.

Второй аспект – это педагогическая компьютерная подготовка, рассматривающая информационные технологии как средство математического обучения. Практически такая подготовка может быть реализована в рамках спецкурсов и спецсеминаров. Для реализации данного компонента нами разработан и проводится третий год спецсеминар «Современные информационно-коммуникационные технологии в математическом образовании» для специальности математика-информатика физико-математического факультета ПГПУ им. В. Г. Белинского. В основу семинара положена программа Intel «Обучение для будущего». Выдвигаются следующие цели и задачи семинара.

1. Повышение компьютерной грамотности студентов, обеспечение их операциональной готовности к использованию информационных технологий обучения и контроля на уроках математики.

2. Изучение и практическое применение современных информационных технологий обучения математике.

3. Сохранение и использование накопленного методического опыта в области использования компьютера в процессе обучения математике.

4. Обеспечение процесса информатизации научной, учебной и методической деятельности преподавательского состава кафедры теории и методики обучения математике по курируемым дисциплинам.

АКИМОВА Ирина Викторовна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры информатики и методики преподавания информатики Пензенского педагогического университета
© Акимова И. В., 2007

Представляем примерную структуру и содержание спецкурса:

– планирование учебного проекта по математике. Постановка проблемы, заполнение визитки (2 ч.);

– электронные ресурсы для учебного проекта. Создание презентации учащегося средствами Power Point по одному из вопросов школьного или вузовского курсов математики (4 ч.);

– создание публикации учащегося в ИС Publisher по одному из вопросов школьного или вузовского курсов математики (4 ч.);

– электронные таблицы в проектной работе. Разработка дидактических материалов в ЭТ Excel (2 ч.);

– создание динамических рисунков для реализации функции наглядности в процессе обучения математике и различных дидактических материалов. Разработка дидактических материалов к проекту TP Word (2 ч.);

– создание методических материалов для использования на уроках по математике (2 ч.);

– создание веб-сайта проекта (4 ч.);

– разработка плана проведения проекта на занятиях по математике в школе и вузе (2 ч.);

– защита учебных проектов (2 ч.).

Занятия спецсеминара проходят в компьютерном классе, оборудованном сканером, мультимедийным проектором, мультимедийными энциклопедиями. При выборе тем проектов студенты опираются на курс школьной математики, но могут и выходить за его рамки, захватывая материалы факультативных занятий, углубленного изучения. Результатом работы студентов на спецсеминаре является создание учебно-методического пакета, содержащего разработанные дидактические, методические работы по математике, а также предполагаемые работы учащихся.

Приведем пример некоторых проектов, созданных студентами физико-математического факультета ПГПУ им. В. Г. Белинского за 2004–2006 гг.: «Трио треугольников» (изучение треугольников на плоскости, пирамид в пространстве и сферических треугольников на сфере), «Честь числа» (формирование представлений о множестве действительных чисел), «Окружающий нас мир – это мир геометрии» (изучение многогранников в курсе старших классов) и пр.

Для методической поддержки спецкурса и спецсеминара преподавателями кафедры выпущен ряд учебно-методических пособий, накоплен большой объем методических и дидактических материалов к проектам.

Занятия спецсеминара предполагают в большей степени практическую подготовку к использованию информационных технологий в обучении математики. Общие же дидактические вопросы, такие, как представление о современных направлениях использования новых информационных технологий в обучении, классификация педагогических программных средств, владение технологией выбора определенного набора программных средств для решения той или иной дидактической задачи, предполагается рассматривать в рамках спецкурса.

Э. А. Акчурина

УСИЛЕНИЕ РАЗВИВАЮЩЕГО ХАРАКТЕРА ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С КРИПТОГРАФИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Одним из основополагающих принципов обновления содержания образования является его личностная ориентация, предполагающая опору на субъектный опыт учащихся, актуальные потребности каждого ученика. В связи с этим остро встает вопрос о средствах организации деятельности учащихся, способствующей накоплению творческого опыта школьников. Важную роль здесь могут играть математические задачи с криптографическим содержанием, которые рассматриваются в предлагаемой статье в качестве содержательной основы межпредметного факультативного курса для старшеклассников.

Возрастающая потребность общества в людях, способных творчески подходить к любым изменениям, нетрадиционно и качественно решать существующие проблемы, обусловлена ускорением темпов развития общества и, как следствие, необходимостью подготовки людей к жизни в быстро меняющихся условиях.

Стратегия современного образования заключается в предоставлении возможности всем учащимся проявить свои таланты и творческий потенциал, подразумевающий возможность реализации личных планов. Эти позиции соответствуют современным гуманистическим тенденциям развития отечественной школы, для которой характерна ориентация педагогов на личностные возможности учащихся, их непрерывное «наращивание».

Выдвижение на первый план цели развития личности, рассмотрение предметных знаний и умений как средства их достижения находят отражение в государственных документах. В «Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года», «Концепции структуры и содержания общего среднего образования (в 12-летней школе)» делается акцент на развитие креативных способностей учащихся, индивидуализацию их образования с учетом интересов и склонностей к творческой деятельности. Одним из основополагающих принципов обновле-

АКЧУРИНА Эльвира Александровна – ассистент кафедры информатики и методики преподавания информатики ПГПУ им В. Г. Белинского
© Акчурина Э. А., 2007

ния содержания образования является его личностная ориентация, предполагающая опору на субъектный опыт учащихся, актуальные потребности каждого ученика. В связи с этим остро встает вопрос о средствах организации активной познавательной и созидательной деятельности учащихся, способствующей накоплению творческого опыта школьников, как основы, без которой самореализация личности на последующих этапах непрерывного образования становится малоэффективной.

С другой стороны, к существенной составляющей процесса подготовки специалистов в той или иной области научных знаний относится популяризация основ соответствующей науки среди школьников. Эта деятельность помогает старшеклассникам сделать осознанный выбор будущей профессии, формирует фундамент творческого восприятия теоретических дисциплин. Кроме того, осуществляемая в настоящее время модернизация среднего образования, связанная с переходом к системе профильной школы, ставит проблему выбора направления подготовки перед школьниками уже с 9-го класса. Важную роль в такой подготовке могут играть математические задачи с криптографическим содержанием, которые рассматриваются нами в качестве содержательной основы межпредметного факультативного курса для старшеклассников.

Понимание математического характера решаемых криптографией задач пришло только в середине XX в. Профессионалы в любой области информационных технологий должны знать основы криптографии, чтобы грамотно встраивать криптографические решения в свои продукты. Определенное представление о компьютерной криптографии необходимо и юристам, поскольку действуют нормативные документы, связанные с криптографией, например закон РФ «Об электронной цифровой подписи».

Весьма перспективным является использование задач с криптографическим содержанием в работе кружков и факультативов как по математике, так и по информатике, поскольку эти задачи могут послужить хорошей основой для интегрированного восприятия содержания некоторых разделов этих дисциплин и удачно дополнить традиционно используемый набор задач вычислительной математики.

Укажем основные преимущества предлагаемого материала как основы соответствующего факультативного курса для старшеклассников.

• Занимательность самой формы задач приводит к повышению интереса школьников к изучению соответствующих разделов математики и информатики.

• Соревновательность – часто в таких задачах имеются очень четкие критерии, по которым можно оценить представленные решения (кто раньше смог найти способ вскрытия шифра, чей способ быстрее, чья программа эффективнее реализует способ вскрытия и т. п.).

• Вариативность подходов (способы представления данных и алгоритмы, используемые при решении криптографических задач, бывают как совсем «прозрачные», так и весьма «продвинутые»).

• Гибкость по отношению к возможностям используемых программных средств (время выполнения программы часто гораздо сильнее зависит от продуманности алгоритма, чем от производительности компьютера).

• Интуитивный выход на понимание теоретических проблем информатики (методы оптимизации, оценки сложности, обоснования корректности алгоритмов и др.).

• Построение математических моделей и алгоритмов на основании словесного описания проблемы.

С учетом основных положений системного и личностно-деятельностного подхода нами разработана система творческих заданий, сориентированная на полноценную реализацию развивающего компонента математического образования. Приведем несколько примеров заданий, апробированных нами в ходе собственной педагогической деятельности в качестве учителя математики и информатики в одной из пензенских школ.

Задания

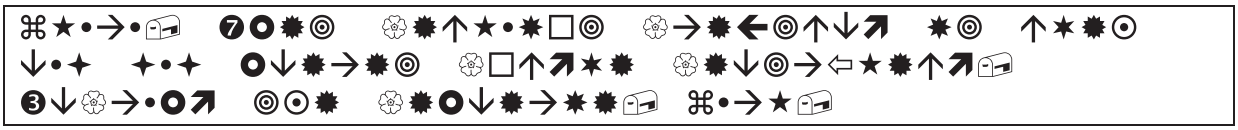
1. Клара получила от Карла письмо по электронной почте. Из-за неправильной настройки компьютера то ли у Клары, то ли у Карла текст письма выглядел так (см. рисунок).

Помогите Кларе прочитать письмо.

Решение. Для решения задачи надо было обратить внимание на следующее.

Во-первых, письмо было получено в приведенном виде из-за неправильной настройки почтовых программ, поэтому естественно предположить, что при возникшей замене букв на значки разные значки соответствуют разным буквам.

Во-вторых, легко догадаться, что в начале письма стоит обращение к адресату (Клара), и убедиться в правильности этой догадки, заменив в последнем слове письма значки на ставшие из-



вестными соответствующие им буквы, – получим подпись отправителя (Карл). Далее, исходя из соображений «осмысленности» текста, подбираем буквы, соответствующие остальным значкам.

В результате получим ответ:

Клара! Твое послание прочесть не смог, так как второе письмо потерялось. Отправь его повторно. Карл.

2. Дана криптограмма:

CO	*	N	=	CPC
+		*		–
II	+	I	=	OY
=		=		=
EDP	+	TR	=	ETO

Восстановите цифровые значения букв, при которых справедливы все указанные равенства. Расставьте буквы в порядке возрастания их цифровых значений и получите искомое слово.

Решение

Из соотношения в 3-й строке следует, что D=0. из первого столбца находим, что T=1 (сумма двузначных чисел не может превышать 198), из последнего – C=2. Учитывая полученные значения, получаем:

2O	*	N	=	2P2
+		*		-
II	+	I	=	OY
=		=		=
10P	+	TR	=	1TO

Из второй строки видно, что O>I. Из первого столбца получаем I=7. Из 2-й строки следует, что O=8, Y=4.

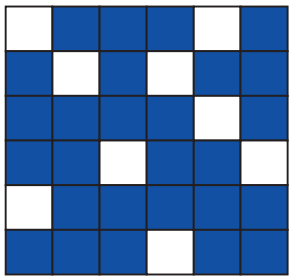
28	*	N	=	2P2
+		*		-
77	+	7	=	84
=		=		=
10P	+	TR	=	1T8

Аналогично устанавливаем, что P=5, N=9, T=6, R=3. Расставив буквы в нужном порядке, получим слово **DECRYPTION**.

3. Клара направила Карлу три письма. В первом письме был листочек с квадратной таблицей:

Э	А	П	Я	Т	З
Р	О	Е	Т	Ы	О
В	Ш	В	О	Ш	Е
А	Р	И	Т	Е	Ф
Р	К	О	Т	Т	С
А	Н	Я	Н		А

в третьем – с таблицей:



Второе письмо, содержавшее пояснения по использованию этих таблиц, потерялось. Помогите Карлу прочитать послание Клары.

Решение. В этой задаче надо было догадаться, что картинка соответствует трафарету, накладывая который всеми возможными способами на квадрат с текстом (таких способов 4), выписываем буквы из «окошек» и получаем исходный текст.

ЭТОТ ШИФР НАЗЫВАЕТСЯ ПОВОРОТНАЯ РЕШЕТКА.

В заключение отметим, что кроме логического решения задач на занятиях факультатива целесообразно предложить старшеклассникам и написание программ для шифрования и дешифрования текстов.

Т. А. Ананьина

УТОЧНЕНИЕ АНАЛОГА НЕРАВЕНСТВА ИЕНСЕНА ДЛЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

В работе приводится одно уточнение неравенства Иенсена для логарифмически выпуклых функций, которое применяется для уточнения некоторых классических неравенств.

Цель настоящей работы – привести уточнение аналога неравенства Иенсена для логарифмически выпуклых функций и получающийся результат применить к некоторым классическим неравенствам с целью их уточнения. Кроме того, мы предполагаем данное уточнение использовать в вопросе решения некоторых специальных уравнений.

Будем придерживаться следующей схемы: сначала напомним классическое неравенство Иенсена для выпуклых функций, рассмотрим его уточнение из работы [1], после чего на основе этого уточнения обоснуем упоминаемый в заголовке результат. Наконец, в конце статьи рассмотрим некоторые приложения.

1. Неравенство Иенсена для выпуклых функций и его уточнение.

Напомним понятия выпуклой и вогнутой функций (см. [2]).

Пусть A – произвольный промежуток числовой прямой Ox и $f : A \to \mathbf{R}$ – непрерывная функция.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $f(x)$ называется *выпуклой* на A, если для любых точек x_1 и x_2 из A выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \qquad (1)$$

каковы бы ни были числа λ_1, λ_2, удовлетворяющие условию $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $f(x)$ называется *вогнутой* на A, если для любых точек x_1 и x_2 из A выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \qquad (2)$$

каковы бы ни были числа λ_1, λ_2, удовлетворяющие условию $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Для выпуклой на промежутке A функции f справедливо обобщающее (1) неравенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \qquad (3)$$

каковы бы ни были положительные числа $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Неравенство (3) и называется *неравенством Иенсена*.

Рассмотрим следующее уточнение неравенства Иенсена для выпуклых функций, опубликованное в работе [1].

Теорема 1. *Пусть $f : A \to \mathbf{R}$ – выпуклая на A функция и $x_k \in A$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $p_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тогда справедливо следующее неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} p_{i_1} \ldots p_{i_k} f\left(\frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}}{k}\right) \le \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \qquad (4)$$

Если функция будет вогнутой, то неравенства будут обратными. Неравенство (4) и представляет собой уточнение неравенства Иенсена для выпуклых функций.

З а м е ч а н и е. Доказательство этой теоремы приведено в упоминаемой работе.

Перенесем результат на случай логарифмически выпуклых функций.

2. Уточнение аналога неравенства Иенсена для логарифмически выпуклых функций.

Пусть снова $f : A \to \mathbf{R}$ – непрерывная на промежутке A числовой прямой Ox функция.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $f(x)$ называется *логарифмически выпуклой*, если в точках A она принимает только положительные значения, и ее логарифм $\ln f(x)$ является выпуклой на рассматриваемом промежутке функцией.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $f(x)$ называется *логарифмически вогнутой*, если в точках A она принимает только положительные значения, и ее логарифм $\ln f(x)$ является вогнутой на рассматриваемом промежутке функцией.

Покажем, что уточнения аналога неравенства Иенсена для логарифмически выпуклых или логарифмически вогнутых функций на промежутке A являются соответственно неравенства (5) и (9).

Теорема 2. *Пусть $f : A \to \mathbf{R}$ – логарифмически выпуклая на A функция и $x_k \in A$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $p_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} f^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}\left(\frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_k}}{k}\right) \le \prod_{i=1}^{n} f^{p_i}(x_i), \qquad (5)$$

в котором равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $\ln f(x)$ – линейная, то

АНАНЬИНА Татьяна Анатольевна – студентка III курса факультета информатики, специальность «прикладная математика» ВятГГУ

© Ананьина Е. В., 2007

есть $f(x)$ *имеет вид:* $f(x) = e^{ax+b}$ ($a, b \in \mathbf{R}$), *или когда* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\ln f(x)$. Она выпукла на A. Запишем неравенство (4) для этой функции:

$$\ln f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} p_{i_1} \ldots p_{i_k} \ln f\left(\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}}{k}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} p_i \ln f(x_i). \qquad (6)$$

По свойствам логарифма получаем

$$\ln f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \sum_{i_1=1}^{n} \ldots \sum_{i_k=1}^{n} \ln f^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}\left(\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}}{k}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \ln f^{p_i}(x_i). \qquad (7)$$

Заменяя в правой части (7) сумму логарифмом произведения, будем иметь неравенство

$$\ln f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \ln \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} f^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}\left(\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}}{k}\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} p_i \ln f(x_i). \qquad (8)$$

Освобождаясь от логарифмов, из неравенства (8) получаем

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \le \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} f^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}\left(\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}}{k}\right) \le$$

$$\le \prod_{i=1}^{n} f^{p_i}(x_i).$$

Теорема 2 доказана.

Ясно, что для логарифмически вогнутой функции имеет место неравенство

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \ge \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} f^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}}\left(\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}}{k}\right) \ge$$

$$\ge \prod_{i=1}^{n} f^{p_i}(x_i), \qquad (9)$$

получающееся из (5) заменой знака неравенства «≤» на знак «≥».

Перейдем к рассмотрению некоторых приложений доказанной теоремы.

3. Применение уточнения аналога неравенства Иенсена для логарифмически выпуклых функций.

В этом пункте рассмотрим применение неравенств (5), (9) в вопросах доказательства уточнений классических неравенств.

1. Обобщенное неравенство Коши

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \le \sum_{i=1}^{n} p_i a_i, \qquad (10)$$

где $a_1 \ldots a_n$ – положительные числа, $p_1 \ldots p_n$ – набор положительных весов, обладающих свойством $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Уточнение обобщенного неравенства Коши имеет вид

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \le \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} \left(\frac{a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}}{k}\right)^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} \le \sum_{i=1}^{n} p_i a_i, \qquad (11)$$

где $a_1 \ldots a_n$ и $p_1 \ldots p_n$ – те же, что и в (10).

Обоснуем (11). Применим уточнение аналога неравенства Иенсена к логарифмически вогнутой функции $y = x$ на интервале $(0, +\infty)$:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \le \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} \left(\frac{x_{i_1}+\ldots+x_{i_k}}{k}\right)^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} \le \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Полагая в этом неравенстве $x_i = a_i$ ($i = 1, \ldots, n$), будем иметь:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \le \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} \left(\frac{a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}}{k}\right)^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} \le \sum_{i=1}^{n} p_i a_i,$$

где равенство достигается при $a_1 = \ldots = a_n$.

2. «Весовое» неравенство Ки Фана

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}}{\prod_{i=1}^{n} (1-a_i)^{p_i}} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i (1-a_i)}, \qquad (12)$$

где $a_k \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, $p_1 \ldots p_n$ – набор положительных весов, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Теперь для этого неравенства запишем уточнение:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}}{\prod_{i=1}^{n} (1-a_i)^{p_i}} \le \prod_{i_1=1}^{n} \ldots \prod_{i_k=1}^{n} \left(\frac{a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}}{k-\left(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}\right)}\right)^{p_{i_1} \ldots p_{i_k}} \le$$

$$\le \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i (1-a_i)}. \qquad (13)$$

Установим (13). Применим уточнение аналога неравенства Иенсена к логарифмически выпуклой функции $y=\frac{1-x}{x}$ на интервале $\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i}\le\prod_{i_1=1}^{n}\dots\prod_{i_k=1}^{n}\left(\frac{1-\frac{x_{i_1}+\dots+x_{i_k}}{k}}{\frac{x_{i_1}+\dots+x_{i_k}}{k}}\right)^{p_{i_1}\dots p_{i_k}}\le$$

$$\le\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-x_i}{x_i}\right)^{p_i}.$$

Так как $1-\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i-\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(1-x_i)$, будем иметь

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(1-x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i}\le\prod_{i_1=1}^{n}\dots\prod_{i_k=1}^{n}\left(\frac{k-x_{i_1}+\dots+x_{i_k}}{x_{i_1}+\dots+x_{i_k}}\right)^{p_{i_1}\dots p_{i_k}}\le$$

$$\le\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(1-x_i)^{p_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{p_i}}.$$

Заменяя в этом неравенстве $x_i=a_i$ ($i=1, ..., n$), получаем (13), где равенство достигается при $a_1=\dots=a_n$.

3. Обобщенное неравенство Гюйгенса

$$1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\le\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)^{p_i},\qquad(14)$$

где $a_1...a_n$ – положительные числа, $p_1...p_n$ – набор положительных весов, обладающих свойством $p_1+\dots+p_n=1$.

Приведем уточнение для обобщенного неравенства Гюйгенса

$$1+\prod_{i=1}^{n}a_i^{p_i}\le\prod_{i_1=1}^{n}\dots\prod_{i_k=1}^{n}\left(\left(1+a_{i_1}\dots a_{i_k}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{p_{i_1}\dots p_{i_k}}\le$$

$$\le\prod_{i=1}^{n}(1+a_i)^{p_i},\qquad(15)$$

где $a_1...a_n$ – положительные числа, $p_1...p_n$ – набор положительных весов, удовлетворяющий свойству $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$.

Для доказательства (15) применим неравенство (5) к функции $y=1+e^x$, логарифмически выпуклой на **R**.

$$1+e^{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ix_i}\le\prod_{i_1=1}^{n}\dots\prod_{i_k=1}^{n}\left(1+e^{\frac{x_{i_1}+\dots+x_{i_k}}{k}}\right)^{p_{i_1}\dots p_{i_k}}\le$$

$$\le\prod_{i=1}^{n}(1+e^{x_i})^{p_i}.$$

Заменим в этом неравенстве $x_i=\ln a_i$. Получим неравенство (15), где равенство достигается при условии $a_1=\dots=a_n$.

4. Неравенства (5), (9) и уравнения. Рассмотрим применение уточнений аналога неравенства Иенсена при решении некоторых уравнений.

Для начала приведем простейшее уравнение, решаемое с помощью разложения на множители.

1. Решите уравнение $4x-x\sqrt{x}-4\sqrt{x}=0$.

Р е ш е н и е. Покажем, что это уравнение можно решить с помощью неравенства (9).

Уравнение задано на промежутке [0, +∞). Перепишем его в следующем виде: $2\sqrt{x}\left(\frac{x+4}{2}\right)=4x$.

Последнее уравнение представляет собой реализуемое со знаком равенства правое уточнение неравенства Иенсена для логарифмически вогнутой функции $f(x)=x^2$, $x\in(0,+\infty)$, в котором $x_1=x,\ x_2=4,\ p_1=p_2=\frac{1}{2}$. Следовательно, заданное уравнение равносильно уравнению $x=4$. Проверяем $x=0$, так как он не принадлежит области определения данной функции, но входит в интервал, на котором задано уравнение.

Ответ: $x=4$, $x=0$.

Теперь рассмотрим более сложные уравнения.

2. Решите уравнение

$$\frac{3}{\sqrt{x}+2\sqrt{3-x}}=\sqrt[9]{\frac{16}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3-x}\right)^4(3-x)^2}}.$$

Р е ш е н и е. Оценим левую часть равенства сверху, применяя левое уточнение (5) для логарифмически выпуклой функции $y=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, причем $x_1=\sqrt{x}, x_2=\sqrt{3-x}, p_1=\frac{1}{3}, p_2=\frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{2}{3}\sqrt{3-x}}\le\frac{1}{x^{\frac{1}{18}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}{2}\right)^{\frac{4}{9}}(3-x)^{\frac{2}{9}}}=$$

$$= \sqrt[9]{\frac{16}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{3-x}\right)^4(3-x)^2}}\ .$$

Но последнее выражение есть правая часть рассматриваемого уравнения.

Равенство в (5) достигается при $x_1 = x_2$. Заметим, на области определения (0,3) неизвестного x величины x_1, x_2 положительны, значит, корни заданного уравнения находятся из простого равносильного уравнения $\sqrt{x} = \sqrt{3-x}$. Последнее имеет единственный корень $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $x = \frac{3}{2}$

3. Решите уравнение

$$2^{1-x} + 3x = \sqrt[16]{2^{11-x}\left(2^{1-x}+x\right)^6 x^9}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение можно решить с помощью неравенства (9) для логарифмически вогнутой функции $f(x) = x$, $x \in (0, +\infty)$. Для этого преобразуем его. Так как $2^{27-x} = \frac{2^{32}2^{1-x}}{2^6} = \frac{4^{16}2^{1-x}}{2^6}$, то получаем

$$\frac{1}{4}2^{1-x} + \frac{3}{4}x = 2^{\frac{1-x}{16}}\left(\frac{2^{1-x}+x}{2}\right)^{\frac{6}{16}} x^{\frac{9}{16}}.$$

Последнее соотношение реализует со знаком равенства левое неравенство уточнения (9) для логарифмически вогнутой функции $f(x) = x$, $x \in (0, +\infty)$, с весами $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{3}{4}$ и величинами $x_1 = 2^{1-x}$, $x_2 = x$. Рассматриваемое уравнение равносильно уравнению $2^{1-x} = x$. А это уравнение имеет единственный корень $x = 1$, потому что $y = 2^{1-x}$ – это монотонно убывающая функция, а функция $y = x$ монотонно возрастает.

Ответ: $x = 1$.

4. Решите уравнение

$$x\cos^2 x + (4-x)\sin^2 x = x^{\cos^4 x}(4-x)^{\sin^4 x}4^{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

Р е ш е н и е. Уравнение задано на интервале (0,4). Это уравнение и есть реализуемое со знаком «=» левое неравенство уточнения (9) для логарифмически вогнутой функции $f(x) = x$, $x \in (0, +\infty)$ при $x_1 = x$, $x_2 = 4 - x$ и $p_1 = \cos^2 x$, $p_2 = \sin^2 x$. Следовательно, его корни могут быть найдены из простого равносильного уравнения $x = 4 - x$. Последнее уравнение имеет единственный корень $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Примечания

1. *Bencze, M.* A refinement of Jensen's inequality [Text] / M. Bencze // Octogon. 2002. Vol. 10. № 1. P. 21–24.

2. *Калинин, С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана [Текст] : учебное пособие по спецкурсу / С. И. Калинин. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2002. С. 9–32.

3. *Аносов, Д. В.* О сумме логарифмически выпуклых функций [Текст] / Д. В. Аносов // Математическое просвещение. 2001. Сер. 3. Вып. 5. С. 158–163.

В. Л. Андрианов

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРПОЛИРОВАНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ

В работе исследуется задача об интерполировании конечными разностями в одном классе целозначных целых функций.

В работе изучаются решения следующей однородной симметричной задачи

$$\begin{cases} \Delta^n F(hn) = 0 \\ \Delta^n F\left(-(h+1)n\right) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}, \tag{1}$$

где h – рациональное, $h > 0$, в одном классе целых функций, целозначных в точках последовательности $\lambda_h \overset{def}{=} \left\{(2h+1)\frac{k}{2}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$. Заметим, что целозначные целые функции, т. е. целые функции, принимающие целые значения в точках некоторой последовательности $\{\lambda_n\}_0^\infty$ комплексной плоскости **C**, давно привлекают к себе внимание. Известен, например, результат Д. Пойа: целая функция $F(z)$ роста не выше первого порядка и типа σ, $\sigma < 2$, целозначная в точках $n = 0, 1, 2, \ldots$, есть многочлен. Пример функции 2^z говорит о точности типа.

Интерполяционная задача (1) рассматривалась в [1], и там установлен естественный класс единственности (КЕ) этой задачи. Точнее, доказано

Утверждение. *Множество всех ц.ф.э.т.* $F(z)$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$F(iy) = O\left\{\exp\left(\frac{\pi}{2h+1} - \varepsilon\right)|y|\right\},\ y \to \infty\ (z = x + iy),$$

$$\varepsilon > 0,$$

является КЕ задачи (1).

АНДРИАНОВ Валерий Леонидович – кандидат физико-математических наук, доцент по кафедре теории функций Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

© Андрианов В. Л., 2007

С другой стороны, из одного предложения общего характера работы [1], в частности, следует, что для функции $\sin\frac{\pi z}{h+1}$ условия (1) выполняются. Пример функции $\sin\frac{\pi z}{h+1}$ свидетельствует о точности утверждения.

В нашей работе исследуется структура решений задачи (1) в классе ц.ф.э.т. $K(h)$, который определяется следующим образом: $F(z) \in K(h)$, если

$$\begin{aligned} &1.\ F\left((2h+1)\frac{k}{2}\right) \in \mathrm{Z} \ \text{ для } \forall k \in Z,\ Z = (\{..,-2,-1,0,1,2,...\}), \\ &2.\ F(iy) = O\left\{\exp\left(\frac{\pi}{2h+1}+\varepsilon\right)|y|\right\},\ y\to\infty,\ \forall\varepsilon>0\,(z=x+iy). \end{aligned} \tag{2}$$

Основным результатом этой работы является установление справедливости следующего предложения.

Теорема. *Общее решение задачи* (1) *в классе* $K(h)$ *при* $h \in \mathrm{Q}^+$, *имеет вид*

$$F(z) = N\sin\frac{\pi}{2h+1}z \text{ , где } N \in \mathrm{Z}. \tag{3}$$

Обратим внимание, что вид общего решения (1) при $h \in \mathrm{Q}^+$, обладающего лишь вторым условием из (2), вообще говоря, отличен от $C\sin\frac{\pi}{h+1}z$. При $h = 1$, например, функция

$$\widetilde{F}(z) = C_1\left[\frac{z^3}{3!}\cos\frac{\pi}{3}z + \frac{\sqrt{3}}{3\cdot 2!}z^2\sin\frac{\pi}{3}z\right] + C_2\sin\frac{\pi}{3},$$

где C_1, C_2 – произвольны постоянные, удовлетворяет условиям (1), как следует из доказательства теоремы. Однако функция $\widetilde{F}(z)$ может быть целозначной в точках $\frac{3}{2}n$, $n \in \mathrm{Z}$, лишь при $C_1 = 0$.

Пусть $S^{\mu} \overset{def}{\equiv} \{z : |\operatorname{Im} z| < \mu\}$, $\mu < 0$. Отметим, что тогда класс $K(h)$ может быть определен еще следующим образом: ц.ф.э.т. $F(z)$ принадлежит $K(h)$, если

$$\begin{aligned} &1.\ F\left((2h+1)\frac{k}{2}\right) \in \mathrm{Z} \ \text{ для } \forall k \in Z \ . \\ &2.\ F(z) \in \left[1; S\frac{\pi}{2h+1}+\varepsilon\right),\ \forall\varepsilon>0. \end{aligned}$$

Что касается h иррациональных, то из полученных ниже результатов вытекает, что для всех $h \in (0; +\infty)$, за исключением, быть может, некоторого счетного множества H, общее решение задачи (1) в классе $K(h)$ также имеет вид (3) ($N \in \mathbf{R}$). С нашей точки зрения, задача (1) интересна тем, что при аналитической зависимости условий задачи от параметра h вид общего решения меняется качественно при изменении параметра.

Введем некоторые обозначения. Определим для $h \in \mathbf{R}^+$ область U_h комплексной плоскости **C**.

1. $0 \in U_h$.

2. Граница ∂U_h задается уравнением (∂U_h): $e^x \sin(h+1)y - \sin hy = 0$, $z = x + iy$.

Отметим, что кривая ∂U_h симметрична относительно вещественной оси, пересекает ее в точке $x = \ln\frac{h}{h+1}$. Мнимую ось кривая ∂U_h пересекает в двух точках $\pm\frac{\pi}{2h+1}i$ и имеет горизонтальные асимптоты $y = \pm\frac{\pi}{h+1}$. Кроме того, область U_h выпукла.

Положим $J_h \overset{def}{\equiv} U_h \cup -U_h \cup \left\{\pm\frac{\pi}{2h+1}i\right\}$.

В дальнейшем для удобства доказательства будем считать, что $F(z) \in [1, J_h)$, $h \in \mathbf{R}^+$. С учетом этого запишем соотношения (1) с помощью преобразования Бореля

$$\Delta^n F(hn) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\gamma(t)\left[e^{(h+1/2)t}\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right]^n dt = 0,$$

$$\Delta^n F(-(h+1)n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\gamma(t)\left[e^{-(h+1/2)t}\operatorname{sh}\frac{t}{2}\right]^n dt = 0,\ n = 0,1,2,...$$

$S_{\gamma} \subset \operatorname{int}\Gamma$, где S_j – множество особенностей функции $\gamma(t)$. Считая контур интегрирования симметричным относительно начала координат и заменяя во втором соотношении t на $-t$, приходим к равенствам

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\widetilde{w}_n(t)]^t\gamma_{\substack{\text{чет}\\ \text{нечет}}}(t)\,dt = 0,\ n = 0,1,2,... \ ,$$

где $\widetilde{w}_n(t) = e^{(h+1/2)t}\operatorname{sh}\frac{t}{2}$, [1]; в последних равенствах, выполняя замену $w = w_n(t) = \sqrt{\widetilde{w}_n(t)+\beta}$, $\beta = \frac{1}{2}\frac{1}{h+1}\left(\frac{h}{h+1}\right)^h$, приходим к условиям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} w^{2n}\gamma\left(T(w)\right)T'(w)\,dw = 0,\ n = 0,1,2,... \ ,$$

где функция $T(w)$ – обратная к $w_b(t)$. Из последних равенств несложно доказать, что множество S особых точек подынтегральной функции, лежащих внутри Γ_w, симметрично относительно начала [1; 2].

Далее, справедливы следующие утверждения, касающиеся свойств множества особых точек S_j и S.

Лемма 1. $S_\gamma \cap \mathbf{R} = \varnothing$, $S \cap \mathbf{R} = \varnothing$.

Лемма 2. $S_\gamma = \left\{ \pm i \dfrac{\pi}{2h+1} \right\}$.

Леммы доказываются по аналогии соответствующих утверждений [1].

Лемма 3. *Если* $F(z) \in K(h)$ *удовлетворяет условиям* (1), *то* $\gamma_F(t)$ – *рациональная функция*.

Доказательство леммы 3 опирается на известную теорему Пойа [3, стр. 333]:

Если все коэффициенты a_k разложения функции $\gamma(t) = \sum\limits_0^\infty \dfrac{a_k}{t^{k+1}}$ суть целые числа и если $\gamma(t)$ регулярна в дополнении к компакту K, трансфинитный диаметр которого $d(k) < 1$, то $\gamma(t)$ – рациональная дробь.

На основании лемм 2 и 3 решения задачи (1) будем искать в следующем виде:

$$F_{\substack{\text{чет}(z)\\ \text{нечет}(z)}} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{zt} \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{a_k}{(t - i\alpha)^{k+1}} \pm \frac{(-1)^k a_k}{(t + i\alpha)^{k+1}} \right] dt,$$

где $\pm i\alpha = \pm \dfrac{\pi}{2h+1} i \in \operatorname{int}\Gamma$.

Анализируя условия (1) для функций $F_{\substack{\text{чет}\\ \text{нечет}}}(z)$ с помощью достаточно простых, но громоздких выкладок, приходим к выводу, что задача (1) при заданных условиях на функцию $F(z)$ может иметь решения, отличные от $C \sin \dfrac{\pi}{2h+1} z$, только при тех h, когда функция

$$A(h) \overset{def}{\equiv} \operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2h+1} \operatorname{ctg} \frac{1}{2(2h+1)} \right]$$

есть π-соизмеримое число. Множество таких h, $h \in \mathbf{R}^+$, обозначим через H. Далее несложно доказывается, что среди рациональных чисел таких чисел нет.

Следствие. *При* $\forall\ h \in \mathbf{R}^+$ *и* $h \overline{\in} H$ *общее решение задачи* (1) *в классе* $K(h)$ *имеет вид* (3).

Примечания

1. *Казьмин, Ю. А.* О нетривиальных решениях однородной задачи Абеля [Текст] / Ю. А. Казьмин // Матем. сб. 109(151). 1979. № 2(6). С. 254–274.

2. *Андрианов, В. Л.* К вопросу о восстановлении целой функции по значениям функции в точках $\lambda_n u \pm \lambda n$ [Текст] / В. Л. Андрианов // СМЖ. 1978. № 3.

3. *Голузин, Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного [Текст] / Г. М. Голузин. М.: Наука, 1952.

Л. В. Аниськина

КОНСТРУКТИВНЫЙ УЧЕБНЫЙ ДИАЛОГ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ

Статья посвящена использованию методики конструктивного диалога при доказательстве теорем в школьном курсе геометрии. Автор показывает, что диалог способствует не только активизации учебного процесса, но и более глубокому усвоению материала, что, в свою очередь, обеспечивает усиление развивающего потенциала школьного математического образования.

В современной науке резко возрос интерес к всестороннему осмыслению диалога. Диалог все более предстает как значительный культурный феномен, как особый способ познания, как духовная ценность, открывающая путь к полноценному общению, к утверждению нравственного достоинства личности. Стремление к диалогу и сотрудничеству составляет важную тенденцию развития современного общественного сознания и науки, в частности педагогики. Именно с этим связана необходимость проникновения диалога в обучение, так как он является важным элементом действительно творческого процесса образования и воспитания.

Настоящий учебный диалог возможен только на грани известного и неизвестного как для учителя, так и для учеников. В критических точках диалога, в точках наибольшего напряжения проблема его конструктивной реализации становится достаточно сложной задачей, которую должны совместно решить все участники учебного процесса.

Обучение в диалоге – это обучение умению видеть проблемы в самых простых, элементарных, привычных вещах, это развитие способности критического восприятия мира.

При обучении математике большие возможности для организации диалога имеют уроки геометрии, систематическое изучение которой, как известно, начинается уже с 7-го класса. В курсе геометрии предлагается серьезный теоретический материал, который требует от учащихся сформированности определенных мыслительных умений – анализировать, сравнивать, обобщать, наиболее

АНИСЬКИНА Лилия Владимировна – аспирант кафедры теории и методики обучения математике Пензенского государственного педагогического университета им. В. Г. Белинского

© Аниськина Л. В., 2007

эффективно актуализирующихся при наличии готовности школьников вступать в диалог, другими словами, через последовательное формулирование вопросов и поиск ответов.

При построении диалогов на уроке геометрии должна учитываться объективная сложность учебного материала (логическая структура, объем, форма предъявления информации, ясность терминологии) и его субъективная трудность для учащихся (наличие опорных знаний степень, развитие интеллектуальных умений, сформированность учебных мотивов и интересов), должно обращаться внимание на изменение отношения учащихся к изучаемому материалу под влиянием деятельности учителя и транслируемой им системы отношений.

Отметим, что в курсе геометрии учащиеся решают задачи различных типов, но обязательно этапом решения каждой из них является доказательство того или иного положения. Осуществляя это доказательство с той или иной долей самостоятельности, учащиеся осознанно вовлекаются в деятельность по осмыслению изучаемого материала, учатся «стройно» выражать свои мысли. Другими словами, можно считать, что овладение диалогом через формулирование вопросов и конструирование из них соответствующей познавательной траектории обеспечивает продуктивное взаимодействие субъектов образовательного процесса, способствуя усилению развивающего потенциала геометрического содержания.

Использование вопросно-ответного комплекса, характерного для организации поиска пути доказательства теорем, связано с самой сущностью диалога. Обсуждение темы в режиме вопрос-ответ между учителем и учащимися, непосредственно между учащимися особенно значимо на этапе подросткового возраста, который отличается на фоне общей активности неуверенностью в себе, и потому лучше откликается на предложение задавать вопросы, готов участвовать в разрешении любой не только предметной, но и жизненной проблемной ситуации.

Чтобы обсуждение включало в себя продуктивные вопросы учащихся, надо, чтобы эти вопросы зародились в их внутренней речи, во внутреннем диалоге с самим собой, для чего ученику необходимо владеть некоторыми начальными знаниями. Без этих знаний точные, логичные вопросы возникнуть сами по себе не могут. Соответственно, необходима специальная работа по систематическому опережению учащимися изучаемого геометрического содержания в форме исследовательских заданий и «перспективных» проблемных вопросов. Отметим, что идея о положительном влиянии предварительных знаний на способность учащихся оперировать с учебным материалом уже давно экспериментально подтверждена психологами (М. Снайдер, С. В. Юранович).

Как показывает наш опыт, уже на начальном этапе изучения геометрии с помощью продуманной системы вопросов можно найти решения заранее обозначенной проблемы. Причем процесс поиска наиболее эффективен, когда учитель играет роль не «задавателя вопросов», а собеседника, добровольного помощника ученика в формулировке и раскрытии вопросов, которые приближают их к истине.

Вместе с учащимися полезно обсуждать вопросы, которые при доказательстве теоремы могут обеспечивать:

• раскрытие содержания теоремы; выделение разъяснительной части, условия и заключения с указанием, что дано и что требуется доказать;

• учебные и мыслительные действия, используемые при доказательстве: анализ условия, изображение рисунка, выявление известных математических объектов, присутствующих на рисунке; ретроспективное обращение к известным ранее теоремам о данных объектах; сравнение данных элементов с необходимыми для использования утверждениями;

• обоснование промежуточных математических утверждений, предусматривающее относительно самостоятельное проведение рассуждений, поиск аргументов для высказываемых положений, проверку обоснованности выводов.

Отметим, что в формулировках вопросов могут содержаться мнения, которые не являются бесспорными; могут приводиться положения, противоречащие известным геометрическим фактам; формулировки, отличные от общепринятой трактовки и т. п. Побуждая учащихся создавать такие вопросы, учитель дает возможность для становления различных точек зрения, которые в перспективе могут сами по себе стать поводом для дополнительного размышления и обсуждения.

Таким образом, эффективная организация диалога на уроках геометрии изначально предполагает определенный перспективный «знаниевый» фонд, позволяющий расширить «угол зрения» на данный фрагмент содержания, необходимый для формулировки проблемных вопросов и их совместного обсуждения. В ходе такого обсуждения существенно изменяется сама позиция его участников. Это изменение проявляется в том, что человек, доказывающий то или иное утверждение (даже в том случае, когда его доказательство изначально известно), не просто убеждается в его справедливости и убеждает в нем других, а пытается предварительно преломить через себя позиции своих оппонентов (реальных или виртуальных) с тем, чтобы «под давлением споров и противоречий воспитать в себе привычку постоянно различать путем интроспекции мотивы, которые им руководят, и направления, которым он следует» (см.: Пиаже Ж. Суждение и рассуждение ребенка. СПБ.: Союз, 1997. С. 151).

Ю. В. Батяйкина

РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ СТУДЕНТОВ ПЕРВЫХ КУРСОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Математика в обучении физике студентов первого курса технических вузов играет решающую роль, поскольку, по сути, является языком физической науки. Между тем будущими инженерами на первых стадиях своего обучения математика воспринимается как набор абстрактных истин, при этом формульные соотношения иногда заслоняют собой физическую суть явлений. Поэтому вопросы обеспечения адекватного восприятия студентами технических специальностей материала курсов физики и математики в их естественной взаимосвязи, рассматриваемые в предлагаемой статье, являются достаточно значимыми для методической науки.

При обучении общей физике для студентов технических специальностей математика обычно трактуется как язык физической науки. Известно, что будущими инженерами на первых стадиях своего обучения математика воспринимается как набор абстрактных истин. Аналогично, при обучении физике формульные соотношения иногда заслоняют собой физическую суть явления. Идет это от школы. Именно поэтому вопросы адекватного восприятия студентами взаимодействия «физика + математика» ещё очень долго будут актуальными как на завершающих этапах среднего образования, так и на начальных стадиях высшего технического образования.

Из арсенала математики школьного курса в физике востребованы:

– Операции с обыкновенными дробями. В курсах математики эти операции изучаются на числовых примерах, в физике же дроби, как правило, – это алгебраические выражения (делить надо не «числа», а «буквы»!).

– Решение квадратных уравнений. В сознании ученика привычный вид уравнения с числовыми коэффициентами не всегда ассоциируется с квадратными уравнениями «в общем виде». Последние чаще всего встречаются в задачах «на равнопеременное движение», «на энергию». При этом уравнение чаще всего пытаются решить «через дискриминант», не подозревая, что в физике лучше использовать уравнение в приведенном виде, потому что так легче контролировать размерность.

– Решение линейных уравнений с приведением подобных членов.

– Решение систем линейных уравнений. Для надежности часто используется метод подстановки, другим почти не учат.

– Подобие треугольников, простейшие тригонометрические соотношения и уравнения.

– Элементарные стереометрические построения, необходимые при переходе на физические модели в трехмерном пространстве.

– Манипуляции с векторами. Сложение и вычитание векторов с использованием для расчетов теоремы косинусов.

– Вычисления. Имея калькуляторы и мобильные телефоны, абитуриенты и студенты испытывают затруднения лишь при операциях со степенями числа 10 и с дробными показателями степени. Встречаются иногда и недочеты с переизбыточной точностью числовых ответов. Эти огрехи сравнительно просто компенсируются в учебном процессе, необходимо лишь обращать внимание на то, что ни калькулятор, ни компьютер не отменят необходимости думать.

Знания производных функций и простых приемов интегрирования в типовых школьных задачах и заданиях большинства вступительных экзаменов, в том числе и в рамках ЕГЭ, практически не применяются, хотя уже на первых неделях обучения в вузе они просто необходимы.

Курс школьной математики в целом много шире и мощнее потребностей школьной физики, но существуют детали, требующие усиления. С позиций вузовских преподавателей физики важнейшие из них:

– Взаимосвязь алгебры и тригонометрии. Немногие абитуриенты воспринимают «основное тригонометрическое равенство» как иную запись теоремы Пифагора, которая сама есть частный случай теоремы косинусов.

– Понятие радианной меры угла. У абитуриентов нет ясного осознания того, что длина дуги есть радиус, умноженный на угол в радианах. Из-за этого некоторые физические понятия, например понятия угловой скорости и особенно угловой частоты представляются математической абстракцией, что затрудняет решение многих типов задач.

– Векторная алгебра. Плохо обстоит дело с вычитанием векторов и их разложением на компоненты по направлениям, но особенно слабы познания по скалярному произведению векторов. Векторное произведение в школе вообще не изучается, поэтому трактовка и восприятие студентами трехмерных векторных структур (моменты сил, угловая скорость, сила Лоренца) затруднены. При решении задач всегда возникает путаница – где положен косинус, а где синус.

Например: Невесомый блок закреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30 °. Два одинаковых тела с массами по 1 кг соединены нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Одно из тел помещено на наклонную плоскость и имеет с ней коэффи-

БАТЯЙКИНА Юлия Васильевна – старший преподаватель кафедры физики Пензенской государственной технологической академии

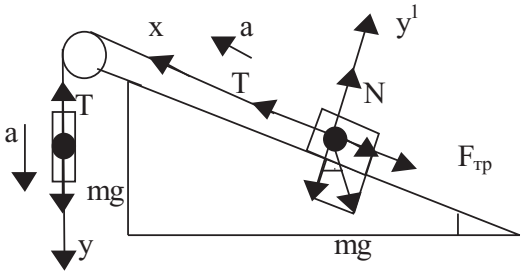
© Батяйкина Ю. В., 2007

циент трения скольжения 0,1, а второе свободно висит вдоль вертикальной стороны наклонной плоскости, не касаясь ее. Определить ускорение движения тел и силу натяжения нити после того, как система придет в движение.

Дано:
$\alpha = 30°$
$m_1 = m_2 = m = 1$ кг
$\mu = 0{,}1$
$g = 10$ (м/с^2)

---

a, T – ?



Решение: Пусть тела движутся в направлении ускорений обозначенных на рисунке. Так как нить нерастяжимая, а блок невесомый и трение в нем отсутствует, то тела будут иметь одинаковые ускорения $a_1 = a_2 = a$ и на них будут действовать одинаковые силы натяжения нитей $T_1 = T_2 = T$. Кроме указанной, на оба тела будет действовать сила тяжести mg. На 2-е тело еще будет действовать сила нормальной реакции опоры N, перпендикулярная наклонной плоскости, и сила трения скольжения $F_{тр}$, направленная противоположно движению этого тела.

Введем оси координат для тел (у студентов возникают проблемы с рациональностью выбора осей координат). Первое тело движется вертикально вниз вдоль одной оси y. Второе тело поднимается по наклонной плоскости в системе координат x и y′. Направление осей целесообразно выбрать совпадающим с направлением ускорений тел.

Воспользуемся вторым законом Ньютона в проекциях на оси координат. Модуль проекции соответствующей силы берем со знаком «плюс», если ее направление совпадает с положительным направлением оси координат, и со знаком «минус», если не совпадает.

Для 1-го тела в проекциях на ось y имеем:

$$mg - T = ma. \qquad (1)$$

Далее у первокурсников возникает трудность выбора правильного угла в нужном треугольнике и, соответственно, выбора той или иной тригонометрической функции. Для второго тела в проекциях на оси имеем:

на ось x $\quad T - F_{тр} - m \cdot g \cdot \sin\alpha = ma; \qquad (2)$

на ось y′ $\quad N - m \cdot g \cdot \cos\alpha = 0. \qquad (3)$

В правой части выражения (3) стоит ноль, так как проекция ускорения a на ось y′ для второго тела равна нулю.

Так как сила трения скольжения $F_{тр}$ пропорциональна силе нормальной реакции опоры N, то, с учетом выражения (3), имеем

$$F_{тр} = \mu N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \qquad (4)$$

Таким образом, уравнения (1) и (2) с учетом выражения силы трения (4) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными (ускорение *a* и сила натяжения нити *T*):

$$\begin{cases} mg - T = ma; \\ T - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - m \cdot g \cdot \sin\alpha = ma. \end{cases}$$

Решение этой системы дает искомые величины:

$$a = \frac{1 - \mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha}{2} \cdot g =$$

$$= \frac{1 - 0{,}1 \cdot \cos 30° - \sin 30°}{2} \cdot 10 = 2{,}07 \text{ (м/с}^2\text{)};$$

$$T = m(g - a) = 1(10 - 2{,}07) = 7{,}93 \text{ (Н)}.$$

– Понятие производной. Представление о производной у большинства студентов-новичков имеется. Но физический её смысл требует усиления. Это связано с методическими неточностями. В школьной математике аргумент один – ИКС. В физике же независимыми переменными могут выступать различные величины – время, координата, сопротивление резистора и т. п. В школе производная обозначается штрихом, в физике же предпочтительнее обозначение через «отношение» элементарных приращений функции и аргумента. В таком представлении оператор производной более нагляден.

Например: В курсе алгебры 11-го класса ставится задача вычисления производной функции $y = 2x^2 + \frac{1}{x}$ и нахождения ее значения в точке $x = 1$. Ученик пишет: $y' = \left(2x^2\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 4x - \frac{1}{x^2}$. В физике ставится задача: найти скорость тела через 1 с от начала его движения, если оно движется согласно уравнению $y = mt^2 + \frac{k(l)}{t}$. Не сразу студент ассоциирует буквы *k* и *m* с постоянными или функциями других переменных. Он должен написать: $\frac{dy}{dt} = m2t - k(l)\frac{1}{t^2}$.

Для компенсации указанных выше недочетов реально и весьма полезно для учеников, например, создать модуль из двух-трех уроков, посвященных векторной алгебре с явным введением векторного произведения. Перейти от штрихов к явному виду оператора производной. Эти незначительные корректировки не изменят существенно курсов математики и не потребуют переподготовки преподавателей. Быстро это сделать нельзя, ибо старая схема включена в учебники. Но при переизданиях подобные изменения вполне осуществимы, поскольку нужны для повышения фундаментальности математического образования и для обучения физике.

Математика есть язык физики, и, как и всякий язык, она может служить средством познания. Эта грань «физико-математического симбиоза» в познаниях абитуриентов представлена очень слабо. Поэтому на занятиях по решению задач очень полезно проведение анализа полученных в общем виде решений по выяснению асимптотики решения. Что будет с решением, если ту или иную величину (коэффициент трения, сопротивление резистора и т. п.) сделать очень маленькой или очень большой. Этому почти не учат в школе, но остро необходимо при освоении вузовского курса физики.

В условиях вуза необходимо согласование программ по высшей математике и по физике. Следует четко понять, что осознание студентами «прикладных» возможностей математики способствует более эффективному усвоению и физики, и математики. Анализ нынешнего состояния показывает, что усилению «физико-математического симбиоза» могут способствовать и корректировки учебного процесса на первом курсе. Здесь превентивные меры диктуются насущными потребностями.

Лекционный курс. На первой лекции по физике в вузе целесообразно выявить уровень математической подготовки студентов, для этого достаточно спросить, что такое радиан и что есть производная. Остальные полтора часа целесообразно посвятить активизации математических познаний и их некоторому совершенствованию. Согласно И. В. Савельеву, обязателен ввод в явном виде разложения вектора по орт-векторам, а также скалярного и векторного произведений векторов. Это сберегает массу времени при изложении многих разделов механики и электромагнетизма. Совершенно аналогично в начале второго семестра часть одной из лекций целесообразно посвятить вектор-оператору «набла» и вводу в явном виде понятий градиента, дивергенции и ротора.

Практика. Особое внимание целесообразно уделить созданию математических моделей задач на основе текста и её графической модели. В школьной практике алгоритмике создания моделей уделяется мало внимания, поскольку там основная проблема – закрепление пройденного материала. Для студентов же математическое моделирование – это важнейший компонент инженерной квалификации, и учить этому надо с азов – с решения задач по физике.

Лабораторный практикум. При явной тенденции к широкому использованию электронных версий лабораторных работ генеральный путь активизации математических познаний – это создание синтетической триады: «физика + математика + информатика». Но это мы считаем предметом нашего дальнейшего исследования.

М. С. Бердников

О ВЫПУКЛЫХ И КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ

В данной работе рассматривается критерий выпуклости функции в терминах квазивыпуклости.

Классическое определение выпуклости, описываемое неравенством Иесена, часто используется не только в математике, но и в экономике, в теории управления и оптимизации. На данный момент доказано множество теорем, в которых так или иначе используется выпуклость. Представляет интерес изучение условий выпуклости функций в различных терминах. В работе [1] рассмотрен критерий выпуклости функции в терминах квазивыпуклости. Напомним его, введя предварительно необходимые понятия.

Функция f, определённая на выпуклом множестве $C \subseteq \mathfrak{R}^n$, является:

1) выпуклой, если

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le f(x) + (1 - \lambda)f(y) \qquad (1)$$

для любых $x, y \in C$ и любого $\lambda \in [0, 1]$;

2) квазивыпуклой, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\} \qquad (2)$$

для любых $x, y \in C$ и любого $\lambda \in [0, 1]$;

3) α-выпуклой, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le f(x) + (1-\alpha)f(y); \qquad (3)$$

для любых $x, y \in C$ и $\alpha \in (0, 1)$.

З а м е ч а н и е. Если в вышеприведённых неравенствах знак «$\le$», заменить на «$<$» и брать λ из интервала (0, 1), то они будут описывать строгую выпуклость, строгую квазивыпуклость и строгую α-выпуклость соответственно.

Упоминаемый критерий состоит в следующем.

Теорема 1 (Xin Min Yang, Kok Lay Teo, Xiao Qi Yang). *Вещественная функция f, определён-*

БЕРДНИКОВ Михаил Сергеевич – студент IV курса факультета информатики ВятГГУ
© Бердников М. С., 2007

ная на выпуклом множестве C ($C \subseteq \Re^n$), выпукла тогда и только тогда, когда f квазивыпукла и α-выпукла на C.

При детальном рассмотрении доказательства данной теоремы из [1] были обнаружены неточности и технические издержки. Цель данной работы – устранить отмеченные недостатки.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что из выпуклости функции f следует её квазивыпуклость.

Предположим, что $f(x) \le f(y)$. Тогда имеем:

$$f(x) - f(y) \le 0,$$
$$\lambda(f(x) - f(y)) \le 0,$$
$$\lambda(f(x) - f(y)) + f(y) \le f(y),$$
$$\lambda(f(x) + (1-\lambda)f(y)) \le f(y).$$

Следовательно,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \le f(y) =$$
$$= \max\{f(x), f(y)\}.$$

Аналогично проводится доказательство, если $f(x) \ge f(y)$.

Теперь докажем, что квазивыпуклая функция f, удовлетворяющая (3), является выпуклой. Проведём доказательство методом от противного.

Предположим, что $\exists\, \beta, \beta \in (0,1)$, такое, что:

$$f(z_\beta) = f(\beta x + (1-\beta)y) > \beta f(x) + (1-\beta)f(y). \quad (4)$$

Мы должны показать выполнение (1).

1. Рассмотрим случай: $f(x) = f(y)$. В [1] при рассмотрении данного случая использовалась менее рациональная схема. В отмеченных условиях (4) примет вид:

$$f(z_\beta) > f(y) = f(x). \quad (5)$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$ (на рис. 1 приведена иллюстрация данного случая при $n = 1$).

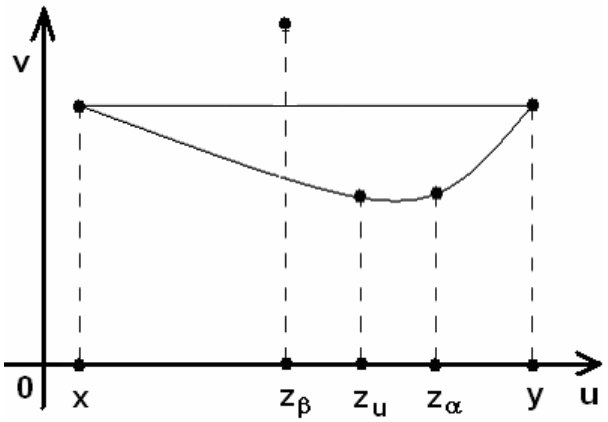


Рис. 1

Положим $u = \dfrac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}$, выразим z_β через x и z_u:

$$z_\beta = \beta x + (1-\beta)y = \beta(x-y) + y = (u(1-\alpha)+\alpha)(x-y) + y =$$
$$= u x - \alpha u x + \alpha x - u y +$$
$$+ \alpha u y - y a + y = \alpha x + (1-\alpha)(u x - uy + y) =$$
$$= \alpha x + (1-\alpha)(ux + (1-u)y) = \alpha x + (1-\alpha)z_u,$$

то есть

$$z_\beta = \alpha x + (1-\alpha)z_u.$$

Из (3) следует:

$$f(z_\beta) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z_u). \quad (6)$$

Из квазивыпуклости f имеем:

$$f(z_u) = f(u x + (1-u)y) \le f(x). \quad (7)$$

При объединении (6) и (7) получается следующее двойное неравенство:

$$f(z_\beta) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(z_u) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x) = f(x).$$

Это противоречит (5).

Пусть $0 < \beta < \alpha < 1$ (на рис. 2 приведена иллюстрация данного случая при $n = 1$).

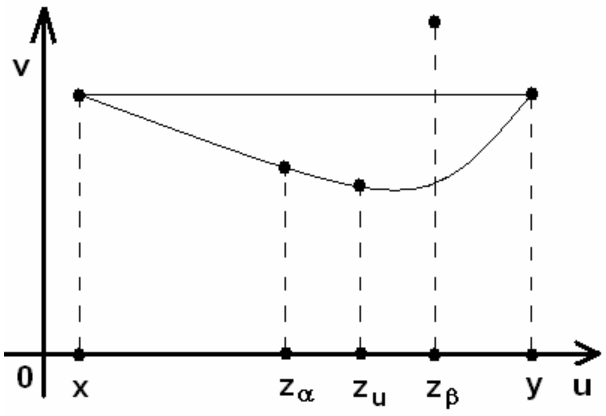


Рис. 2

Пусть $u = \dfrac{\beta}{\alpha}$, выразим z_β через y и z_u:

$$z_\beta = \beta x + (1-\beta)y = \beta(x-y) + y = (u\alpha)(x-y) + y =$$
$$= u\alpha x - u\alpha y + y = u\alpha x - u\alpha y +$$
$$+ (\alpha y - \alpha y) + y = \alpha(u(x-y) + y) + (1-\alpha)y =$$
$$= \alpha(ux + (1-u)y) + (1-\alpha)y = \alpha z_u + (1-\alpha)y.$$

Получили:

$$z_\beta = \alpha z_u + (1-\alpha)y.$$

Из (3) следует:

$$f(z_\beta) \le \alpha f(z_u) + (1-\alpha)f(y). \quad (8)$$

Из квазивыпуклости f имеем:

$$f(z_u) = f(ux + (1-u)y) \le f(y). \quad (9)$$

При объединении (8) и (9) получается следующее двойное неравенство:

$$f(z_\beta) \le \alpha\, f(z_u) + (1-\alpha) f(y) \le \alpha\, f(y) + (1-\alpha) f(y) = f(y).$$

Это противоречит (5).

2. Теперь рассмотрим ситуацию $f(x) \neq f(y)$.

В [1] в при доказательстве случая 2 была допущена ошибка, в приводимом ниже тексте доказательства мы её исправляем.

Нам потребуется следующая теорема, также доказанная в [1].

Теорема 2. *Если f – вещественная функция, определённая на выпуклом множестве C ($C \subseteq \Re^n$), и для неё выполняется (3), тогда множество*

$$K = \{\lambda \in [0,1] \mid f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda\, f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in C\}$$

плотно на отрезке [0, 1].

Пусть $f(x) < f(y)$ (на рис. 3 приведена иллюстрация данного случая при $n = 1$).

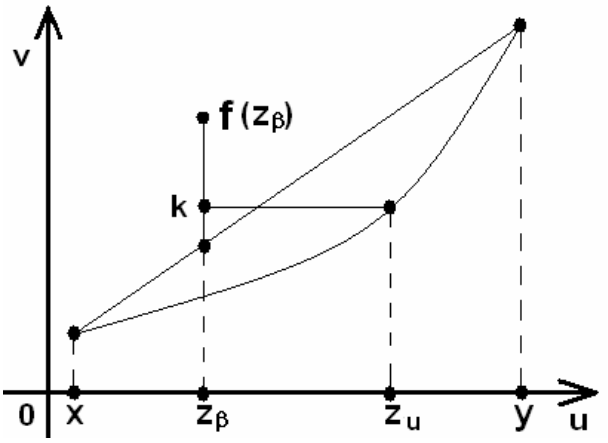


Рис. 3

Из (4) следует существование такого k, что выполняется следующее двойное неравенство:

$$f(\beta x + (1-\beta) y) > k > \beta\, f(x) + (1-\beta) f(y)\ .$$

Функция f непрерывна, поэтому $\exists\, z_u$ такое, что:

$$f(z_u) = k < f(\beta x + (1-\beta) y) = f(z_\beta)\ . \qquad (10)$$

Покажем, что z_u лежит между z_β и y, то есть $z_u = m z_\beta + (1-m) y, \quad m \in (0,1)$.

Предположим, что z_u располагается между x и z_β: $z_u = l x + (1-l) z_\beta, \quad l \in (0,1)$.

Тогда $f(z_u) > l f(x) + (1-l) f(z_\beta)$, а значит, $l \notin K$, что противоречит теореме 2.

Пусть $t = \dfrac{\beta - u}{1-u} \in (0,1)$. Выразим z_β через x и z_u: $z_\beta = tx + (1-t) z_u$.

Из неравенства $f(x) \le f(z_u)$ и квазивыпуклости f имеем:

$$f(z_\beta) = f(tx + (1-t) z_u) \le f(z_u).$$

Это противоречит (10).

Пусть $f(x) > f(y)$ (на рис. 4 приведена иллюстрация данного случая при $n = 1$).

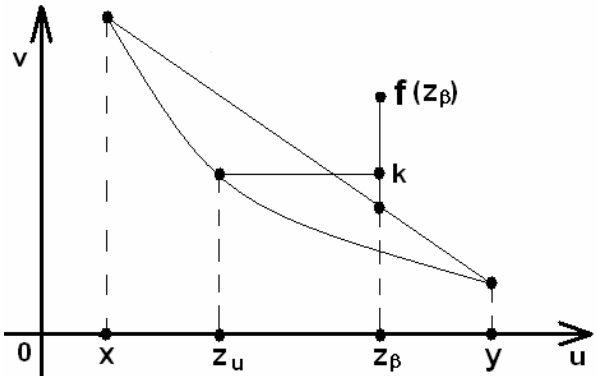


Рис. 4

Из (4) следует существование такого k:

$$f(\beta x + (1-\beta) y) > k > \beta f(x) + (1-\beta) f(y)\ .$$

Функция f непрерывна, поэтому $\exists z_u$ такое, что

$$f(z_u) = k < f(\beta x + (1-\beta) y) = f(z_\beta)\ . \qquad (11)$$

Покажем, что z_u лежит между x и z_β, то есть $z_u = mx + (1-m) z_\beta$, $m \in (0, 1)$.

Предположим, что z_u располагается между z_β и y: $z_u = l z_\beta + (1-l) y$, $l \in (0, 1)$.

Тогда $f(z_u) > l f(z_\beta) + (1-l) f(x)$, а значит, $l \notin K$, что противоречит теореме 2.

Положим $t = \dfrac{u - \beta}{u} \in (0,1)$, выразим z_β через z_u и y: $z_\beta = t z_u + (1-t) y$.

Из неравенства $f(y) \le f(z_u)$ и квазивыпуклости f имеем:

$$f(z_\beta) = f(t z_u + (1-t) y) \le f(z_u).$$

Это противоречит (11).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 остаётся верной, если мы будем рассматривать строгую выпуклость. *Вещественная функция f, определённая на множестве C, строго выпукла тогда и только тогда, когда f строго квазивыпукла на множестве C и $\exists \alpha \in (0, 1)$ такое, что:*

$$f(\alpha x + (1-\alpha) y) < \alpha\, f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \forall x, y \in C\ .$$

Примечания

1. Xin Min Yang, Kok Lay Teo, Xiao Qi Yang A Characterization of Convex Function // Applied Mathematics Letters. 2000. № 13. P. 27–30

Е. М. Вечтомов

ОТ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ К ПОНЯТИЮ КАТЕГОРИИ

Статья носит математико-методический характер. Показано, как от множеств – через класс всех множеств – можно естественным образом перейти к категорным понятиям, а затем к математическому понятию категории.

Введение

До XIX века математика в целом не имела строгих (в теперешнем смысле слова) оснований. Так, нуждались в обосновании важнейшие понятия математического анализа. Огюстен Коши (1789–1857) положил в основу математического анализа понятие предела функции, но само это понятие было четко определено позднее Карлом Вейерштрассом (1815–1897) через ε-δ-окрестности. В последней трети XIX века немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) заложил фундамент общеупотребительного сейчас универсального теоретико-множественного языка математики.

Понятие множества стало основополагающим понятием современной математики. Отметим, что в настоящее время под *классической математикой* понимается математика, базирующаяся на канторовской теории множеств [1] и двузначной логике.

Абстрактное понятие категории ввели американские математики С. Маклейн и С. Эйленберг в 1944 г. Теория категорий [2-4] служит альтернативным теории множеств языком в математике. На языке категорий наиболее адекватно формулируются многие понятия и результаты абстрактных разделов математики, в частности алгебры и топологии, например свойство универсальности математических объектов.

Множества

Создатель теории множеств Г. Кантор описывал это понятие так: «Множество есть многое, мыслимое как единое» [5]. Выдающийся российский математик академик Н. Н. Лузин (1883–1950) наглядно представлял множество как прозрачный мешок, внутри которого находятся определенные предметы – элементы множества [6].

Можно дать следующее описательное определение множества: *множеством* называется любая совокупность произвольных объектов, собранных вместе и составляющих единое целое. Объекты, составляющие данное множество, называются его *элементами*. Как правило, множества обозначаются большими латинскими буквами, а их элементы – малыми. Имеется *отношение принадлежности* $\in$ объекта a множеству A: $a \in A$; в противном случае пишут $a \notin A$. В случае $a \in A$ говорят, что a есть элемент A, a принадлежит (лежит в, содержится в) A. Множества A и B называются *равными* ($A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов. Множество A называется *подмножеством* (частью) множества B ($A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B; при этом говорят, что A включено в B, а B есть надмножество A. *Отношение включения* множеств обладает следующими свойствами:

$A \subseteq A$ (*рефлексивность*);

$(A \subseteq B)\&(B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ (*транзитивность*);

$(A \subseteq B)\&(B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$ (*антисимметричность*)

(множества A, B, C предполагаются произвольными).

Отношение *строгого включения* $\subset$ множеств определяется стандартно: $A \subset B$ означает, что $A \subseteq B$, но $A \neq B$ (существует элемент $b \in B$, не лежащий в A). В случае $A \subset B$ говорят, что A есть *собственное подмножество* множества B. Отношение $\subset$ транзитивно и *антирефлексивно*, т. е. $A \not\subset A$ для любого множества A.

Замечание 1. Отношение равенства множеств обладает свойствами рефлексивности, транзитивности, *симметричности* ($A=B \Rightarrow B=A$) и *подстановки* (во всяком теоретико-множественном выражении-терме любые входящие в него множества можно заменять на равные им множества).

Обычно множества задаются с помощью характеристических свойств P их элементов и записываются в виде классификатора:

$\{x: P(x)\} = \{x$: объект x обладает свойством $P\}$ – это множество всех тех и только тех объектов x, для которых выполняется свойство P, т. е. верно $P(x)$. Если множество содержит несколько элементов, то оно записывается перечислением своих элементов, заключенных в фигурные скобки. Скажем, множество, состоящее из первых пяти натуральных чисел, имеет вид $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{5, 1, 3, 2, 4\}$ – элементы не повторяются и порядок их расположения роли не играет. Если множество A имеет ровно n элементов a_i, то $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Получаем конечное n-элементное множество. Если ясен закон получения новых элементов, то так можно обозначать и бесконечные множества, например

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$.

Среди множеств выделяется *пустое множество* $\varnothing$, по определению вообще не имеющее элементов. Оно может быть задано любым противоречивым свойством, например $\varnothing = \{x: x \neq x\}$. Пустое множество единственно.

ВЕЧТОМОВ Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики ВятГГУ, академик РАЕН

© Вечтомов Е. М., 2007

Замечание 2. Казалось бы, можно образовать множество всех множеств $\{x: x=x\}$ или множество $R=\{x: x\notin x\}$ всех тех множеств, которые не являются элементами самих себя. Но допущение таких множеств ведет к противоречию. Знаменитый английский логик, математик, философ Бертран Рассел (1872–1970) открыл в 1902 г. простейший парадокс, связанный с рассмотрением R:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Расселовское множество R явно противоречиво. Как можно избавиться от самого возникновения такого противоречия? Из-за чего оно стало возможным?

При первоначальном, «наивном» подходе понятие множества оказывается слишком широким, чересчур общим. Нужно его как-то ограничить. Простое оригинальное «решение парадокса Рассела» предложил выдающийся американский математик Джон фон Нейман (1903–1957). То, что у Кантора является множеством, он назвал *классом*; при этом множеством называется класс, служащий элементом некоторого класса. Тогда расселовский класс R, состоящий из всевозможных множеств, не являющихся своими собственными элементами, не будет множеством. И мы не сможем образовать класс всех классов, но имеет смысл понятие класса всех множеств.

Другой подход заключается в аксиоматизации наивной теории множеств. Первая подобная аксиоматизация дана немецким математиком Эрнстом Цермело (1871–1953) в 1908 г. (начальная версия – 1904 г.). В дальнейшем эта аксиоматика была усовершенствована математиком и логиком Абрахамом Френкелем (1891–1965) в 1922 г. Аксиоматика Цермело-Френкеля (система *ZF*) стала одной из важнейших аксиоматизаций теории множеств, лежащих в основе современной классической математики. В аксиоматиках теории множеств понятия множества и отношения принадлежности служат первичными, неопределяемыми понятиями, проявляющими себя в правилах-аксиомах образования множеств.

Можно достаточно свободно пользоваться понятием множества в канторовском смысле. «Множества» типа R исключаются благодаря установке (*аксиоме основания*), что ни для какого множества A принадлежность $A \in A$ невозможна.

Категория множеств

Пусть **S** – класс всех возможных множеств. Для любых множеств A и B обозначим через $\mathbf{M}(A, B)$ множество всех отображений $A \to B$. Для любых множеств A, B и C существует отображение

$$\mathbf{M}(A, B) \times \mathbf{M}(B, C) \to \mathbf{M}(A, C),$$

сопоставляющее каждой упорядоченной паре (f, g) отображений $f: A \to B$ и $g: B \to C$ их композицию $fg: A \to C$. При этом для любых трех отображений $f: A \to B$, $g: B \to C$ и $h: C \to D$ справедлив закон ассоциативности композиции: $(fg)h = f(gh)$. Для каждого множества A имеется тождественное отображение $1_A: A \to A$, обладающее свойством «единицы»: $1_A f = f$ и $g1_A = g$ при любых $f: A \to B$ и $g: B \to A$. Это позволяет сказать, что множества и отображения образуют категорию (общее понятие категории будет дано ниже) – *категорию множеств* **Set**.

Определим некоторые начальные понятия для категории **Set**. Множества называются *объектами* категории **Set**, а отображения множеств – *морфизмами*. Множество A называется *начальным объектом* (*финальным объектом*) категории **Set**, если для всякого множества B существует ровно одно отображение $A \to B$ ($B \to A$). Легко видеть, что в категории **Set** единственным начальным объектом является пустое множество $\varnothing$, а финальными объектами служат в точности одноэлементные множества.

Отображение $f: A \to B$ называется:

мономорфизмом, если для любых отображений $g, h: C \to A$

$gf = hf \Rightarrow g = h$ (можно сокращать на f справа);

эпиморфизмом, если для любых отображений $g, h: B \to C$

$fg = fh \Rightarrow g = h$ (можно сокращать на f слева);

биморфизмом, если f – мономорфизм и эпиморфизм;

изоморфизмом, если для некоторого отображения $g: B \to A$

$$fg = 1_A \text{ и } gf = 1_B;$$

эндоморфизмом, если $A = B$;

автоморфизмом, если f – изоморфизм и эндоморфизм.

Замечание 3. Сформулированные понятия являются сугубо *категорными*, поскольку выражаются только на языке объектов, морфизмов и композиции морфизмов категории **Set**.

Теорема 1. *Для произвольного отображения $f: A \to B$, $A \neq \varnothing$, эквивалентны следующие свойства:*

1) f – инъекция;

2) f – мономорфизм;

3) существует такой морфизм $k: B \to A$, что $fk = 1_A$;

4) для любых $u: A \to C$ и $v: C \to B$ имеем: если $f=uv$, то u – мономорфизм.

Доказательство проведем по циклу 1)⇒3)⇒4)⇒2)⇒1).

1)⇒3). Если отображение f инъективно и a – фиксированный элемент из A, то отображение $k: B \to A$ зададим формулой

$$k(b) = \begin{cases} x, \text{ если } f(x) = b \\ a, \text{ если } b \in B \setminus \operatorname{Im} f. \end{cases}$$

3)⇒4). Пусть выполнено условие 3) и $f=uv$ для некоторых $u: A \to C$ и $v: C \to A$. Рассмотрим про-

извольные морфизмы g, h: $D \to A$, для которых $gu=hu$. Тогда

$g = g1_A = gfk = guvk = huvk = hfk = h1_A = h$.

4)⇒2). Достаточно заметить, что $f = f1_B$.

2)⇒1). Предположим от противного, что мономорфизм f не является инъекцией. В A существуют такие элементы $a_1 \neq a_2$, что $f(a_1) = f(a_2)$. Возьмем любое непустое множество C и рассмотрим отображения g, h: $C \to A$, для которых $g(C) = \{a_1\}$ и $h(C) = \{a_2\}$. Тогда $g \neq h$, но $gf = hf$. Получили противоречие.

Следствие 1. *Если fg – инъекция, то f – инъекция.*

Следствие 2. *Композиция нескольких (подходящих) инъекций есть инъекция.*

Теорема 2. *Для произвольного отображения f: $A \to B$ эквивалентны следующие свойства:*

1) f – сюръекция;

2) f – эпиморфизм;

3) существует такой морфизм k: $B \to A$, что $kf = 1_B$;

4) для любых u: $A \to C$ и v: $C \to B$ имеем: если $f = uv$, то v – эпиморфизм.

Доказательство проведем по циклу 1)⇒3)⇒4)⇒2)⇒1). Заметим, что если B пусто, то A пусто и $f = \varnothing$. Для пустого f все свойства 1)–4) выполнены. Поэтому можно считать, что B не пусто.

1)⇒3). Отношение равнообразности сюръекции f определяет разбиение $\{f^{-1}(b)\colon b \in B\}$ множества A. По аксиоме выбора возьмем в каждом классе $f^{-1}(b)$ по элементу b'. Отображение k: $B \to A$, $k(b) = b'$ для всех $b \in B$, удовлетворяет равенству $kf = 1_B$.

3)⇒4). Пусть выполнено условие 3) и $f=uv$ для некоторых u: $A \to C$ и v: $C \to B$. Рассмотрим такие морфизмы g, h: $B \to D$, что $vg = vh$. Тогда

$g = 1_B g = kfg = kuvg = kuvh = kfh = 1_B h = h$.

Для доказательства импликации 4)⇒2) заметим, что $f = 1_A f$.

2)⇒1). Предположим, что f не сюръекция. Тогда $B \setminus \mathrm{Im}\, f \neq \varnothing$. Возьмем множество C, содержащее различные элементы c и d. Рассмотрим отображения g, h: $B \to C$, совпадающие на $\mathrm{Im}f$ и такие, что $g(B \setminus \mathrm{Im}\, f) = \{c\}$ и $h(B \setminus \mathrm{Im}\, f) = \{d\}$. Для них $fg = fh$, но $g \neq h$. Значит, f не эпиморфизм. И теорема доказана.

Следствие 3. *Если fg – сюръекция, то g – сюръекция.*

Следствие 4. *Композиция нескольких (подходящих) сюръекций есть сюръекция.*

Теорема 3. *Для произвольного отображения f: $A \to B$ равносильны следующие утверждения:*

1) f – биекция;

2) f – биморфизм;

3) f – изоморфизм;

4) если $f = uv$, то u – мономорфизм, v – эпиморфизм.

В силу теорем 1 и 2 достаточно проверить, что равенства $fg = 1_A$ и $hf = 1_B$ влекут $g = h$ для произвольных g, h: $B \to A$. Если $fg = 1_A$ и $hf = 1_B$, то

$g = 1_B g = (hf)g = h(fg) = h1_A = h$.

Замечание 4. Понятия мономорфизма и эпиморфизма *двойственны* между собой, поскольку формулировка одного из них получаются из формулировки другого перестановкой морфизмов в композиции и сменой направления соответствующих морфизмов (стрелок). Двойственными являются понятия начального и финального объектов, а также свойства 3), 4) из теорем 1 и 2 соответственно. Если некоторое категорное утверждение является теоремой, то теоремой будет и двойственное ему утверждение. В этом заключается категорный *принцип двойственности*. См. доказательства импликаций 3)⇒4) в теоремах 1 и 2.

Теорема 4. *Для любого множества A и любого натурального числа n эквивалентны условия:*

1) $|A| = n$;

2) для каждого (для некоторого) финального объекта X существует ровно n морфизмов $X \to A$;

3) объект A имеет ровно n^n эндоморфизмов;

4) объект A имеет ровно $n!$ автоморфизмов.

Этот материал мы рассматривали на студенческих кружках по теории множеств. См. [7].

Понятие категории

Произвольная *категория* $\mathbf{C}$ состоит из класса $\mathbf{Ob}=\mathbf{Ob(C)}$ *объектов* A, B, C, ... и класса $\mathbf{M}=\mathbf{Mor(C)}$ *морфизмов* α, β, γ, ..., удовлетворяющих следующим условиям (обозначения $\mathbf{C}$, $\mathbf{Ob}$, $\mathbf{M}$ образованы от английских слов *category* – категория, *object* – объект, *morphism* – морфизм):

1. Каждой паре объектов A, $B \in \mathbf{Ob}$ соответствует множество морфизмов $\mathbf{M}(A, B)$, при этом любой морфизм из $\mathbf{M}$ принадлежит в точности одному из множеств $\mathbf{M}(A, B)$. Это означает, что $\mathbf{M}(A, B) \cap \mathbf{M}(C, D) = \varnothing$, если $A \neq C$ или $B \neq D$.

2. Для любых объектов A, B, $C \in \mathbf{Ob}$ и любых морфизмов $\alpha \in \mathbf{M}(A, B)$ и $\beta \in \mathbf{M}(B, C)$ существует единственный морфизм $\alpha\beta \in \mathbf{M}(A, C)$, называемый *композицией морфизмов* α и β.

3. Операция композиции морфизмов ассоциативна там, где определена: если $\alpha \in \mathbf{M}(A, B)$, $\beta \in \mathbf{M}(B, C)$ и $\gamma \in \mathbf{M}(C, D)$, то $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

4. Каждому объекту $A \in \mathbf{Ob}$ отвечает вполне определенный *единичный морфизм* $1_A \in \mathbf{M}(A, A)$.

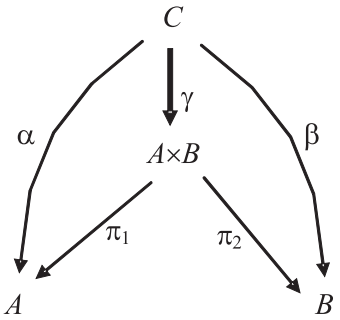
5. Для любых объектов A, B, $C \in \mathbf{Ob}$ и любых морфизмов $\alpha \in \mathbf{M}(A, B)$ и $\beta \in \mathbf{M}(C, A)$ справедливы равенства $1_A\alpha = \alpha$ и $\beta 1_A = \beta$.

Полезно сравнить это определение с понятием категории множеств. Морфизм $\alpha \in \mathbf{M}(A, B)$ обозначается α: $A \to B$ (как отображение) и часто называется стрелкой из объекта A в объект B. (Теорию категорий иногда называют теорией стрелок. Эйленберг в шутку назвал ее абстрактной чепухой.) Сформулированные для категории

множеств понятия начального и финального объектов и видов морфизмов годятся для любой категории. На категорном языке можно определить понятия подобъекта (соответствующего понятию подмножества), фактор-объекта, прямого произведения объектов и т. д. Важнейшее значение в теории имеет понятие функтора – «отображения» между категориями, сохраняющего категорную структуру. Приведем категорные определения подобъекта и прямого произведения объектов.

Фиксируем произвольную категорию. *Подобъектом объекта* $X \in \mathbf{Ob}$ называется любой мономорфизм $A \to X$ из **M**. Подобъекты $\alpha\colon A \to X$ и $\beta\colon B \to X$ объекта X называются изоморфными, если существует изоморфизм $\gamma\colon A \to B$, для которого $\gamma\beta = \alpha$. Ясно, что отношение изоморфности подобъектов является эквивалентностью на классе всех подобъектов объекта X данной категории. В теории категорий многие понятия определяются с точностью до изоморфизма. Строго говоря, под подобъектом некоторого объекта понимается класс всех изоморфных между собой подобъектов, но обычно из класса изоморфных подобъектов выбирают какой-то один, который и фигурирует в качестве подобъекта.

Прямым произведением объектов $A, B \in \mathbf{Ob}$ называется объект $A \times B \in \mathbf{Ob}$ вместе с парой морфизмов $\pi_1\colon A \times B \to A$, $\pi_2\colon A \times B \to B$ таких, что для любого объекта $C \in \mathbf{Ob}$ с морфизмами $\alpha\colon C \to A$, $\beta\colon C \to B$ существует один и только один морфизм $\gamma\colon C \to A \times B$, удовлетворяющий равенствам $\gamma\pi_1 = \alpha$ и $\gamma\pi_2 = \beta$. Эти равенства изображаются в виде коммутативной диаграммы:



Отметим, что в категории множеств отображения π_1 и π_2 являются координатными проекциями: $\pi_1((a, b)) = a$ и $\pi_2((a, b)) = b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$.

Замечание 5. Важно знать и понимать, что прямое произведение объектов A, B категории **C** есть *финальный* объект некоторой новой категории. Ее объектами служат тройки $\langle C, \alpha, \beta\rangle$, где $C \in \mathbf{Ob}$ и $\alpha\colon C \to A$, $\beta\colon C \to B$ – морфизмы исходной категории **C**. Морфизм тройки $\langle C, \alpha, \beta\rangle$ в тройку $\langle D, \mu, \nu\rangle$ – это такой морфизм $\gamma\colon C \to D$ категории **C**, что $\gamma\mu = \alpha$ и $\gamma\nu = \beta$. Финальные и начальные объекты соответствующих категорий, построенных по данной категории **C**, называются *универсальными объектами* категории **C**. Универсальные объекты допускают «пропускание стрелок» через себя. Такие полезные понятия, как пределы прямого и обратного спектров в специальных категориях (см. далее), являются универсальными объектами, которые порой очень сложно выразить в теоретико-множественных терминах.

Исходной для нас явилась категория множеств **Set**. Рассмотрим другие модельные примеры категорий (понятие модельного примера см. в [8]).

Примеры

1. Категория групп: объектами служат всевозможные группы, а морфизмами – гомоморфизмы групп.

2. Категория всех упорядоченных множеств с изотонными отображениями в качестве морфизмов.

3. Категория всех топологических пространств и непрерывных отображений между ними.

4. Любое (непустое) множество X с отношением квазипорядка ρ можно рассматривать как категорию, объектами которой служат элементы множества X и для любых a, $b \in X$

$$M(a,b) = \begin{cases} \{a \to b\}, & \text{если } a\rho b \\ \varnothing \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

5. Произвольная мультипликативная полугруппа A с единицей (моноид) является категорией с единственным объектом A и морфизмами $a \in A$. Композицией морфизмов a, $b \in A$ служит произведение $ab \in A$.

Отметим, что категория **Set** и категории из примеров 1–3 являются специальными категориями. Категория называется *специальной*, если ее объектами являются однотипные математические структуры, а морфизмами служат гомоморфизмы этих структур. Напомним, что математической структурой называется множество с заданным на нем набором отношений. Однотипные математические структуры имеют по определению один и тот же набор отношений. Гомоморфизмом однотипных математических структур называется любое отображение между ними, сохраняющее все отношения (данной сигнатуры). Примеры 4 и 5 показывают, что класс категорий далеко не исчерпывается специальными категориями, хотя последние наиболее естественны и чаще всего встречаются в математической практике. В связи с этим заметим, что группа Н. Бурбаки определила математику как дедуктивную науку о математических структурах [9].

Упражнения

1. Покажите, что пустое множество единственно.

2. Проверьте, что примеры 1–5 действительно дают категории.

3. Убедитесь, что любые два начальных (финальных) объекта произвольной категории изоморфны, т. е. существует изоморфизм между ними.

4. Покажите, что любой морфизм $A \to B$ с финальным объектом A является мономорфизмом. Верно ли двойственное утверждение?

5. Докажите, что в любой категории композиция мономорфизмов (эпиморфизмов, изоморфизмов) является мономорфизмом (эпиморфизмом, изоморфизмом соответственно).

6. Покажите, что изоморфизмы являются биморфизмами.

7. Пусть $\alpha: A \to B$ – изоморфизм в некоторой категории. Тогда морфизм $\beta: B \to A$, для которого $\alpha\beta=1_A$ и $\beta\alpha=1_B$, определен однозначно. Докажите это.

8. Докажите категорное утверждение: если $\alpha\beta$ – мономорфизм (эпиморфизм), то α – мономорфизм (β – эпиморфизм).

9. Покажите, что для всякого объекта A произвольной категории множество $\mathbf{M}(A, A)$ с операцией композиции морфизмов есть моноид.

10. Докажите, что теоретико-категорные понятия подобъекта и произведения (двух) объектов в категории множеств эквивалентны понятиям подмножества и прямого произведения множеств.

11. В категории **Set** определите понятие элемента данного множества.

12. Определите двойственное прямому произведению объектов категорное понятие копроизведения объектов, в категории **Set** означающее дизъюнктное объединение множеств.

Замечание 6. В 60–70-е гг. XX в. Ф. У. Ловером и другими математиками были описаны категории (элементарные топосы), эквивалентные категории **Set**. Тем самым было доказано, что теоретико-категорный подход равносилен теоретико-множественному основанию математики. Теория множеств дает внутреннее, «элементное» рассмотрение математических объектов. В то время как теория категорий описывает математические объекты внешним образом, через их связи (морфизмы) с себе подобными объектами. Теория категорий является удобным универсальным языком современной математики. Особенно таких ее областей, как гомологическая и универсальная алгебра, алгебраическая геометрия, алгебраическая и общая топология, и т. д. Ее аппарат позволяет унифицировать формулировки и доказательства из различных разделов математики. Вершиной развития теории категорий служат топосы, «душой которых является переход от постоянных множеств к переменным множествам» [10].

Примечания

1. *Архангельский, А. В.* Канторовская теория множеств [Текст] / А. В. Архангельский. М.: Изд-во МГУ, 1988.

2. *Букур, И.* Введение в теорию множеств и функторов [Текст] / И. Букур, А. Деляну. М.: Мир, 1972.

3. *Голдблатт, Р.* Топосы. Категорный анализ логики [Текст] / Р. Голдблатт. М.: Мир, 1983.

4. *Цаленко, М. Ш.* Основы теории категорий [Текст] / М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. М.: Наука, 1974.

5. *Кантор, Г.* Труды по теории множеств [Текст] / Г. Кантор. М.: Наука, 1985.

6. *Лузин, Н. Н.* Теория функций действительного переменного [Текст] / Н. Н. Лузин. М.: Учпедгиз, 1940.

7. Элементы логики и теории множеств [Текст] / сост. Е. М. Вечтомов, В. П. Матвеев, Л. В. Созонова. Киров: Изд-во КГПИ, 1988.

8. *Вечтомов, Е. М.* Метафизика математики [Текст] / Е. М. Вечтомов. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. С. 277.

9. *Бурбаки, Н.* Архитектура математики // Очерки по истории математики [Текст] / Н. Бурбаки. М.: ИЛ, 1963. С. 245–259.

10. *Джонстон, П. Т.* Теория топосов [Текст] / П. Т. Джонстон. М.: Наука, 1986. С. 16.

Т. Ю. Горюнова

ПРИНЦИПЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Существуют особые требования к содержанию математического образования на технических специальностях вузов. Для реализации этих требований автор статьи, обобщая многочисленные исследования и учитывая специфику обучения в техническом вузе, предлагает систему принципов отбора содержания курса высшей математики на основе целесообразного использования компьютерных технологий в условиях уровневой дифференциации.

Целью изучения высшей математики в технических вузах является, как известно, развитие у студентов логического и алгоритмического мышления; формирование у обучаемых математических знаний для успешного овладения общенаучными дисциплинами на необходимом научном уровне; выработка умения студентами самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных инженерных задач.

Требования к содержанию математического образования на технических специальностях вузов в самом общем виде можно сформулировать следующим образом: соответствовать основной цели обучения; включать достаточный объем зна-

ГОРЮНОВА Татьяна Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре прикладной математики и информатики Пензенского регионального центра высшей школы – филиала Российского государственного университета

© Горюнова Т. Ю., 2007

ний; выдерживать оптимальное соотношение между конкретным и абстрактным; отражать необходимые взаимосвязи между теорией и практикой; реализовывать прогностический характер обучения; формировать мировоззрение; выполнять воспитательную и развивающую функции. Практическая реализация этих требований неизбежно несет в себе опасность возникновения противоречий в процессе обучения: между объемом и содержанием учебного материала; между необходимостью профессионализации и требованием фундаментализации образования; между предметным характером обучения и целостным, межпредметным характером профессиональной деятельности и др.

Требования, в основу которых положены основные закономерности взаимосвязи учебной и научной деятельности, становятся принципами обучения. Обобщая многочисленные исследования и учитывая специфику обучения в вузе, мы предлагаем следующую систему принципов отбора содержания курса высшей математики в технических вузах на основе использования компьютерных технологий в условиях уровневой дифференциации, позволяющую реализовать требования к содержанию обучения данному курсу и разрешить в определенной степени названные выше противоречия процесса обучения.

Принцип нелимитируемости состоит в обеспечении возможности выхода студентов с высоким уровнем математической подготовки за рамки математических разделов, отраженных в нормативных документах.

Например, при изучении тем «Определители второго и третьего порядков, их свойства. Определители n-го порядка и методы их вычисления», «Матрицы и операции над ними. Обратная матрица. Ранг матрицы и методы его определения» студентам творческого уровня можно предложить следующую задачу: проверить, что целочисленные матрицы с определителем, равным единице, образуют группу по операции умножения. Решение данной задачи можно осуществить в КМС MathCAD, выполнение данного задания будет интересным для студентов творческого уровня, также будет полезным для студентов узнать, что такие матрицы имеют прикладной характер, находят свое применение в геометрии и теории чисел.

При изучении разделов «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» студентам высокого уровня возможностей для изучения тем данных разделов предлагаем следующие функции, которые не входят в основную программу курса:

Функции, возвращающие знак аргумента: $f(x)=\sqrt{\sin^2 x}\,\mathrm{sgn}(\sin x)$; $f(x)=\mathrm{sgn}\left(x^2-3\cdot|x|+2\right)$; $f(x)=|x|\cdot\mathrm{sgn}(\sin x)$.

Функции, возвращающие целую часть аргумента $f(x) = [x]$; $f(x) = [e^x]$ и др.

При изучении операционного исчисления темы «Свертка функций» студентам высокого уровня математической подготовки можно предложить выполнить те же действия, что будут выполнять студенты минимального и обязательного уровня для двух функций, но для трех функций, например следующих: $f(t) = \sin t$, $f(t) = e^t$, $f(t) = t$.

Принцип инвариантности предполагает наличие фиксированного набора заданий, выполнение которых является обязательным для всех студентов.

Задачи должны быть: реализующие этапы работы с теоремой; реализующие этапы формирования понятий; формирующие действия, адекватные математическим методам; задачи для самоконтроля, систематизации знаний; упражнения на составление задач; задачи, имеющие несколько способов решения и т. д.

Принцип целесообразности нацеливает на оценку целесообразности использования компьютерных технологий при выборе конкретной стратегии обучения на каждом практическом занятии.

Для эффективного использования компьютерных средств при дифференцированном обучении математике следует помнить, что использовать компьютер следует только как средство обучения, которое никогда не заменит преподавателя. Передача всех функций обучения компьютеру, отстранение преподавателя от непосредственного управления учебно-воспитательным процессом нецелесообразны и нерациональны по нескольким причинам. Одна из них, на наш взгляд самая главная, – это невозможность полной передачи компьютеру воспитательных функций обучения. Также следует отметить, что ведение дискуссий, поощрение рассуждений преподаватель осуществляет гораздо лучше, чем способен это сделать компьютер.

По нашему мнению, при изучении таких тем, как вычисление пределов, производной, действия над комплексными числами, решение дифференциальных уравнений, нахождение интегралов, то есть тех тем, где непосредственно важна техника вычислений, использование компьютера как средства обучения не целесообразно.

Принцип вариативности заключается в необходимости создания в процессе обучения условий для осознанного выбора студентами наиболее оптимальной стратегии и тактики учебной деятельности. Его важность в рассматриваемом ключе определяется тем, что некоторое решение может стать внутренним состоянием личности лишь тогда, когда оно является результатом собственного выбора. Реализация осоз-

нанного выбора предполагает стремление и способность человека взглянуть на ситуацию «со стороны», перейти в другую систему «мыслительных координат».

Важно понимание того, что обучение призвано развивать студента, а не только передавать определенную сумму знаний. Развивать для того, чтобы в будущем в неординарной (а иногда и вполне обычной) ситуации студент, не вспомнив готового решения и имея перед собой варианты выбора, смог оценить их, осмыслить возможные последствия принятия одного из них и выбрать тот, который быстро, с наименьшими затратами приведет к необходимому результату. Очевидно, легче тем, кто на протяжении учебы постоянно «попадает» в ситуацию выбора тех или иных решений, имеет опыт разрешения противоречий.

Рассмотренные принципы регулируют процедуру конструирования, отбор учебного материала, его последовательность. Такая регуляция осуществляется на двух уровнях: во-первых, в номенклатуре разделов на общем уровне конструирования программы, во-вторых, при включении вопросов, касающихся приложений изучаемого математического материала к решению задач различного уровня для технических специальностей, на этапах детализации программы и методической обработки учебного материала.

Л. К. Додунова, Е. Е. Тебекина

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО МНОГОЧЛЕНАМ ФАБЕРА И ИХ ОБОБЩЕНИЕ

Доказана теорема о существовании универсального ряда по многочленам Фабера и рассмотрено обобщение этой теоремы, т. е. исследован вопрос о равномерном приближении аналитических функций на замкнутых множествах частичными суммами рядов по многочленам Фабера.

Универсальные функциональные ряды, в том числе и ряды по многочленам Фабера, изучались многими авторами, начиная с 1906 г. (см., например, [1], [3], [5]).

В настоящей заметке представлено новое доказательство теоремы о существовании универсального ряда по многочленам Фабера [1] с помощью формулы Лохина о связи степенного ряда с рядом по многочленам Фабера [2]. Кроме того, в данной работе рассмотрено суммирование последнего ряда матричным способом также с помощью упомянутой выше формулы Лохина. Аналог этого суммирования был рассмотрен ранее в работе [3], но в отличие от настоящей работы там брали суммы по строке матрицы с пропусками её элементов. Формула Лохина позволяет взять элементы строки матрицы без пропусков и представить более короткое доказательство.

Пусть $\{\Phi_n(z)\}_{n=0,1,\dots}$ – последовательность многочленов Фабера [4], порожденных ограниченным континуумом K. Каждый из многочленов $\Phi_n(z)$ (n = 0, 1, 2...) является частью лорановского разложения функции $[\Phi(z)]^n$ в окрестности бесконечно удаленной точки, состоящей из членов с неотрицательными степенями z. Здесь $w = \Phi(z)$ – функция, осуществляющая конформное отображение смежной с континуумом K области g_∞, содержащей точку ∞, на внешность окружности $|w| = \rho$, $\rho > 0$, удовлетворяющая условиям

$$\Phi(\infty) = \infty, \ \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z} = 1 .$$

По аналогии со степенным рядом число

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

называется радиусом сходимости ряда Фабера

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z) .$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Phi_n(z),$$

где $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\beta_n|} = \frac{1}{r}$, $0 < \rho < r$, называется универсальным рядом Фабера радиуса сходимости r, если для любого замкнутого ограниченного множества $F \subset g_\infty$, такого, что дополнение к множеству Φ(F) является областью, содержащей круг $|w| \le r$ и бесконечно удаленную точку, и произвольной функции $f(z) \in C_A(F)$ существует подпоследовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Phi_n(z)$, равномерно сходящаяся на F к функции $f(z)$. Здесь $C_A(F)$ – совокупность функций, непрерывных на F и аналитических в окрестности каждой внутренней точки множества F.

Приведем теорему из работы [1], которая будет необходима в дальнейшем.

Теорема 1. Для любого ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ радиуса сходимости r ($0 < r < \infty$) и произвольной всюду плотной сети R в пространстве комплексных чисел существуют два ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ радиуса сходимости r, таких, что $b_n + c_n = a_n$ ($n = 0, 1, 2\dots$), и для каждого n ($n = 0, 1, 2\dots$) $b_n \in \mathbf{R}$ или $c_n \in \mathbf{R}$.

ДОДУНОВА Людмила Кузьминична – кандидат физико-математических наук, доцент по кафедре теории функций Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского
ТЕБЕКИНА Елена Евгеньевна – студентка V курса механико-математического факультета Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского
© Додунова Л. К., Тебекина Е. Е., 2007

Существование универсального ряда по многочленам Фабера следует из теоремы 2.

Теорема 2. Для любого ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ радиуса сходимости r и произвольной всюду плотной сети R в пространстве комплексных чисел существует два универсальных ряда $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(z)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ того же радиуса сходимости r и притом таких, что $b_n + c_n = a_n$ $(n = 0, 1, 2...)$ и для каждого n $(n = 0, 1, 2...)$ $b_n \in \mathbf{R}$ или $c_n \in \mathbf{R}$.

Доказательство: В силу теоремы 1 ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

можно представить в виде суммы двух универсальных степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$, $a_n = b_n + c_n$ $(n = 0, 1, 2...)$ радиуса сходимости r.

Покажем, что тогда ряды Фабера $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \Phi_n(z)$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Phi_n(z)$ будут также универсальными рядами радиуса сходимости r. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Phi_n(z)$ является одним из этих рядов, F-ограниченное замкнутое множество, содержащееся в области g_∞, такое, что дополнение к множеству Φ(F) является областью, содержащей круг $|w| = r$, $f \in C_A(F)$. Для любого замкнутого множества Φ(F) возьмем функцию

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n, \qquad (1)$$

принадлежащую классу $C_A[\Phi(F)]$. Согласно свойству универсального степенного ряда существует подпоследовательность частичных сумм $S_{n_k}(w) = \sum_{n=0}^{n_k} \beta_n w^n$ $(k = 1, 2, ...)$ ряда (1), равномерно сходящаяся на Φ(F) к функции φ(w).

Возьмем замкнутую спрямляемую жорданову кривую L, содержащуюся вместе со своей внутренностью G_L внутри области регулярности функции и содержащую внутри себя это множество. Тогда функция, представленная по формуле Лохина

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{\varphi[\Phi(v)]}{v - z} dv,$$

будет регулярной внутри области, ограниченной кривой L^1, в которую отобразится L с помощью $z = \Phi^{-1}(w)$, и L^1 содержит внутри себя множество F. Следовательно, $f(z) \in C_A(F)$. Полагая в ряде (1) w = Φ(v) и умножая этот ряд на функцию $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{v - z}$, где z принадлежит внутренности кривой $C_{r'}$, $C_{r'} = \Phi^{-1}(|w| = r')$, $\rho < r' < r$, и интегрируя по $C_{r'}$, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{[\Phi(v)]^n}{v - z} dv = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Phi_n(z).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Далее рассмотрим вопрос о равномерном приближении аналитических функций на замкнутых множествах частичными суммами рядов по многочленам Фабера, а именно имеет место

Теорема 3. Пусть $A = \{\alpha_{n\upsilon}\}$ – нижняя треугольная бесконечная матрица, элементы которой удовлетворяют условиям

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\upsilon=0}^{n} \alpha_{n\upsilon} = 1, \ \lim_{n \to \infty} \alpha_{n\upsilon} = 0, \ \upsilon = 0,1,2,... .$$

Тогда существует ряд по многочленам Фабера

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$$

радиуса сходимости r, $0 < \rho < r$, обладающий следующим свойством: для каждого множества F и любой функции $f(z) \in C_A(F)$ найдется последовательность целых положительных чисел $\{n_k\}$, зависящая от F и f, такая, что

$$\sigma_{n_k}(z) = \sum_{\upsilon=0}^{n_k} \alpha_{n_k\upsilon} S_\upsilon(z), \ k = 0, 1, ...,$$

где $S_\upsilon(z) = \sum_{n=0}^{\upsilon} a_n \Phi_n(z)$, равномерно сходится к f(z) на F.

Доказательство: Для любого замкнутого множества Φ(F) возьмем функцию

$$\varphi(w) = \lim_{k \to \infty} \sum_{\upsilon=0}^{n_k} \alpha_{n_k\upsilon} s_\upsilon(w), \qquad (2)$$

где $s_\upsilon(w) = \sum_{n=0}^{\upsilon} a_n w^n$, принадлежащую классу $C_A(\Phi(F))$. Это представление следует из свойства, указанного в работе [5].

Возьмем замкнутую спрямляемую жорданову кривую L, содержащуюся вместе со своей внутренностью G_L внутри области регулярности функции $\varphi(w)$ и содержащую внутри себя это замкнутое множество Φ(F). Тогда функция

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^1} \frac{\varphi[\Phi(v)]}{v - z} dv$$

будет регулярной внутри области, ограниченной кривой L^1, в которую отобразится L с помощью $z = \Phi^{-1}(w)$, и L^1 содержит внутри себя множество F. Следовательно, $f(z) \in C_A(F)$. Полагая в ряде (2) w = Φ(v) и умножая этот ряд на функцию $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{v - z}$, где z принадлежит внутренности кривой $C_{r'}$, $C_{r'} = \Phi^{-1}(|w| = r')$, $\rho < r' < r$, и интегрируя по $C_{r'}$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{\varphi[\Phi(v)]}{v - z} dv = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r'}} \frac{\lim_{k \to \infty} \sum_{\upsilon=0}^{n_k} \alpha_{n_k\upsilon} s_\upsilon[\Phi(v)]}{v - z} dv =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{\upsilon=0}^{n_k}\alpha_{n_k\upsilon}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{S_\upsilon[\Phi(v)]}{v-z}dv =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{\upsilon=0}^{n_k}\alpha_{n_k\upsilon}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{\sum_{n=0}^{\upsilon}a_n[\Phi(v)]}{v-z}dv = \quad (3)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{\upsilon=0}^{n_k}\alpha_{n_k\upsilon}\sum_{n=0}^{\upsilon}a_n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{[\Phi(v)]}{v-z}dv = \lim_{k\to\infty}\sum_{\upsilon=0}^{n_k}\alpha_{n_k\upsilon}\,S_{l_\upsilon}(z),$$

где $S_{l_\upsilon}(z)=\sum_{n=0}^{\upsilon}a_n\Phi_n(z)$.

Второе равенство в (3) имеет место на основании результата работы [5], а последнее – на основании формулы (11) работы [6]. Теорема доказана.

Теорема 3 представляет обобщение теоремы 2, которое заключается в следующем: если в матрице, указанной в теореме, на главной диагонали стоят все единицы, а остальные элементы равны нулю, то получим существование универсального ряда по многочленам Фабера.

Примечания

1. *Селезнев, А. И.* О некоторых классах универсальных рядов [Текст] / А. И. Селезнев, Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. 1977. № 12. С. 92–98.

2. *Лохин, И. Ф.* К вопросу о представлении аналитических функций многочленами Фабера [Текст] / И. Ф. Лохин // Мат. сб. 1955. Т. 36(78). № 3. С. 441–444.

3. *Додунова, Л. К.* Об одном обобщении свойства универсальности рядов по многочленам Фабера [Текст] / Л. К. Додунова // Изв. вузов. Математика. 1990. № 12. С. 31–34.

4. *Маркушевич, А. И.* Теория аналитических функций [Текст] / А. И. Маркушевич. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

5. *Luh, W.* Uber den Satz von Mergelyan [Text] / W. Luh // J. Approxim. Theory. 1976. V. 16. № 2. P. 194–198.

6. *Суетин, П. К.* Ряды по многочленам Фабера [Текст] / П. К. Суетин. М.: Наука, 1984. С. 54.

Ю. С. Жиленкова

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОРГАНИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ СТУДЕНТОВ-ЭКОЛОГОВ

В статье рассматривается преемственность организации математической подготовки студентов экологических специальностей, изложены основные принципы построения курса математики для этих специальностей. Выделенные положения иллюстрируются с помощью математических задач различной степени профессиональной значимости.

Вполне очевидно, что основным фактором, определяющим характер математического содержания обучения студентов, являются особенности их будущей профессиональной деятельности. Причем требования со стороны профессиональной деятельности задает контекстный принцип построения не только отдельных дисциплин, но и содержания всей подготовки специалиста в вузе, выступая как системообразующий фактор, под влиянием которого в процессе учебно-профессиональной деятельности происходит не только передача и усвоение информации, но и моделирование тех или иных компонентов будущей профессиональной деятельности

Учитывая сказанное, мы строим математическую подготовку студентов экологических специальностей на основе принципов: ***опоры*** на изученные ранее математические разделы, ***контекстности***, в соответствии с которым математическая деятельность должна моделировать соответствующий компонент реальной профессиональной деятельности специалиста-эколога, и ***творческой активности***, предполагающего не только непосредственную реализацию известных математических процедур, но и некоторые элементы математического исследования. В качестве основного средства, обеспечивающего преемственность подготовки будущих экологов применительно к математическому материалу, рассматриваются математические задачи различной степени профессиональной значимости.

Углубленный анализ рабочих программ и опрос преподавателей специальных и общепрофессиональных дисциплин позволили нам выявить по каждому разделу курса математики состав умений и навыков, используемых в специальной подготовке студентов-экологов, что нашло свое адекватное отражение в составленной нами учебной программе курса математики для экологов.

ЖИЛЕНКОВА Юлия Сергеевна – преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин Международного независимого эколого-политологического университета (Пензенский филиал)
© Жиленкова Ю. С., 2007

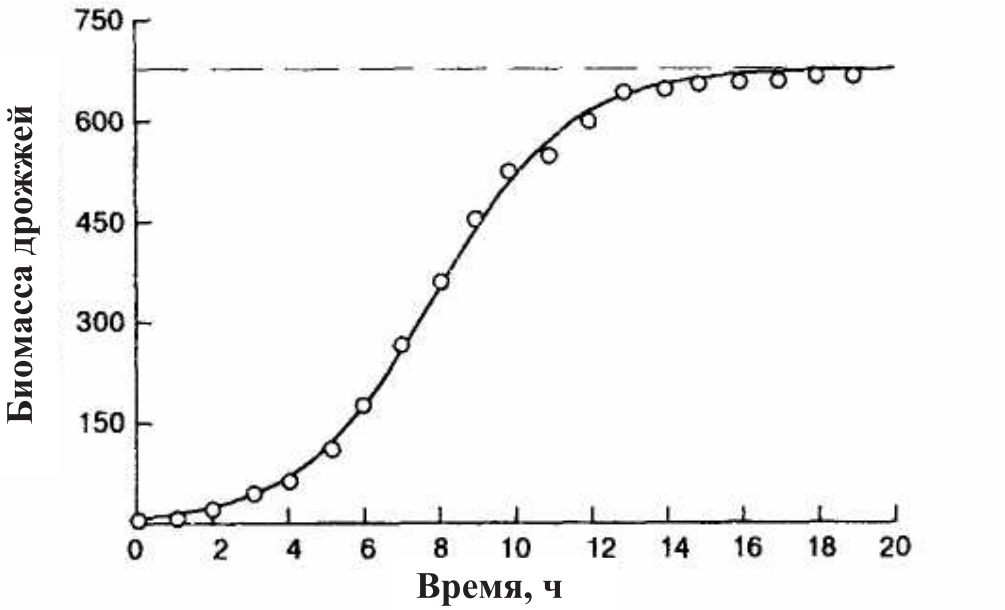
Так, например, в качестве профессионально значимых упражнений, относящихся к разделу «Функциональный анализ», следует указать задания на распознавание основных элементарных функций, на нахождение значений функции, на формирование умения строить графики функциональных зависимостей, заданных таблично. Приведем примеры таких заданий.

Пример 1. *В таблице представлена глубина проникновения сверхвысокочастотного электромагнитного излучения СВЧ ЭМИ (в см).*

Ткань	Частота, МГц					
	100	200	400	1000	3000	10000
Костный мозг	22,90	20,66	18,37	11,90	9,92	0,34
Головной мозг	3,55	4,13	2,07	1,93	0,47	0,16
Хрусталик глаза	9,42	4,39	4,23	2,91	0,50	0,17
Кровь	2,86	2,15	1,79	1,40	0,48	0,14
Мышцы	3,45	2,32	1,84	1,46	–	0,31
Кожа	3,76	2,78	2,18	1,64	0,64	0,18

В системе координат нарисуйте графики зависимостей глубины проникновения СВЧ ЭМИ от частоты для различных тканей.

Пример 2. *На рисунке представлена кривая роста биомассы дрожжевых клеток.*



Укажите область определения, область значений, определите четность – нечетность, промежутки монотонности заданной графически функции.

При выполнении данных заданий у студентов-экологов актуализируются умения работать с графиками функций, переходить от графической, табличной или словесной формы задания функции к аналитической и обратно, выявлять свойства функций, заданных в различной форме. Эти умения достаточно алгоритмизированы и вполне могут быть использованы для показа студентам функционального характера реальных процессов, имеющих место в экологической практике.

Математическое моделирование явлений и процессов, имеющих место в экологической практике, в совокупности с математико-статистическим аппаратом на завершающих этапах математической подготовки будущих экологов обеспечивает качественную подготовку индивидуальных и групповых экологических проектов студентов, которые впоследствии ложатся в основу их курсовых и дипломных работ по специальным дисциплинам.

Так, например, исследование возможностей утилизации промышленных отходов в составе строительных композиционных материалов позволяет решить две задачи: существенно снизить себестоимость строительных материалов, а также в определенной степени решить проблему захоронения отходов. При этом студентам приходится исследовать математическую модель долговечности материалов, которая представляется выражением: $\tau = \tau_m \cdot \ell^{\frac{U_0 - \gamma\cdot\sigma}{RT}\left(1-\frac{T}{T_m}\right)}$, где U_0 – максимальная энергия активации разрушения, γ – структурно-механический фактор, T_m – предельная температура существования материала – физические константы материала; R – универсальная газовая постоянная; T – температура, σ – напряжение.

В рассматриваемом случае знания, умения и навыки, полученные студентами при изучении функционального анализа, и, в частности, знание свойств и графика функции $y = e^x$, умение работать с графиками основных элементарных функций, позволяют им более глубоко исследовать длительную прочность эпоксидных композитов, на этой основе рассмотреть возможность использования строительных отходов, входящих в состав строительных композитов, и, как следствие, добиться значительной экономии за счет снижения себестоимости при сохранении высокого качества материалов.

Как показывает наш собственный опыт преподавания, придание учебной математической деятельности будущих экологов профессионально значимого и, одновременно, частично-поискового характера позволяет существенно усилить их интерес к предмету и повысить качество математической подготовки.

С. В. Зотиков

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ КОНТИНУАЛЬНЫХ АНАЛОГОВ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ РАДЕМАХЕРА, УОЛША И ХААРА

В статье рассматриваются континуальные аналоги известных утверждений о том, что ортонормированные системы функций Радемахера, Уолша и Хаара являются системами сходимости.

Пусть на [0;1] заданы две произвольные ортонормированные системы функций (о.н.с.) $\varphi = (\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ и $\psi = (\psi_k)_{k=0}^{\infty}$. Положим для $\forall k \in \mathbf{N}$ и для $\forall l \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\}$).

$$\varphi_k(l + t) = \varphi_k(t),\ \psi_k(l + t) = \psi_k(t),\ t \in [0;1]$$

Скрещенным произведением о.н.с. φ на о.н.с. ψ называется функция $K_{\varphi\psi}$, определенная на $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ соотношением $K_{\varphi\psi}(x, y) = \varphi_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y)$, где $[a]$ – целая часть числа $a \in \mathbf{R}_0$ (см. [1]). Легко видеть, что функция $K_{\varphi\psi}$ может рассматриваться как континуальный аналог каждой из о.н.с. φ и ψ. Взяв в качестве одной из компонент $K_{\varphi\psi}$ о.н.с. Радемахера $r = (r_k)$, или о.н.с. Уолша $w = (w_k)$, или о.н.с. Хаара $\chi = (\chi_k)$, получаем континуальные аналоги этих о.н.с. вида $K_{r\psi}$ и $K_{\varphi r}$, $K_{w\psi}$ и $K_{\varphi w}$, $K_{\chi\psi}$ и $K_{\varphi\chi}$, где в качестве φ и ψ могут выступать любые о.н.с. Далее рассматриваются лишь функции вида $K_{r\psi}$, $K_{w\psi}$ и $K_{\chi\psi}$.

В работе [2] показано, что произвольное скрещенное произведение $K_{\varphi\psi}$ для всякой функции $f \in L^2(0; \infty)$ порождает интегральные преобразования вида

$$\hat{f}(y) = \int_0^{L^2\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x, y)}dx \quad \text{и} \quad f^*(x) = \int_0^{L^2\infty} f(y)K_{\varphi\psi}(x, y)dy,$$

которые мы называем преобразованиями Фурье функции f по отношению к $K_{\varphi\psi}$. При $\varphi = r$, или $\varphi = w$, или $\varphi = \chi$ первое из указанных выше преобразований $\hat{f}$ мы называем соответственно преобразованием Фурье-Радемахера, Фурье-Уолша, Фурье-Хаара функции f в пространстве $L^2(0; \infty)$. Поскольку о.н.с. w и χ – полны, то имеют место формулы обращения преобразований Фурье-Уолша и Фурье-Хаара.

О.н.с. $\varphi = (\varphi_n)$ называется системой сходимости, если при условии $(a_n) \in l^2$ ортогональный ряд $\sum a_n\varphi_n(x)$ сходится почти всюду на [0;1]. Известно, что о.н.с. Радемахера, Уолша и Хаара являются системами сходимости. Это результаты

ЗОТИКОВ Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа Мурманского государственного педагогического университета

© Зотиков С. В., 2007

соответственно Г. Радемахера, П. Билларда и А. Хаара.

Сформулируем континуальные аналоги результатов Г. Радемахера и П. Билларда.

Теорема 1. Пусть f – произвольная функция из пространства $L^2(0; \infty)$, ψ – любая о.н.с., а $\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int_0^\infty f(x)\overline{K_{r\psi}(x,y)}dx$ – преобразование Фурье-Радемахера функции f по отношению к $K_{r\psi}$. Тогда интеграл Фурье-Радемахера функции f, т. е. интеграл $\int_0^\infty \hat{f}(y)K_{r\psi}(x,y)dy$ сходится почти всюду на $\mathbf{R}_0$.

Теорема 2. Пусть f – произвольная функция из пространства $L^2(0; \infty)$, ψ – любая о.н.с., а $\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int_0^\infty f(x)\overline{K_{w\psi}(x,y)}dx$ – преобразование Фурье-Уолша функции f по отношению к $K_{w\psi}$. Тогда интеграл Фурье-Уолша сходится почти всюду на $\mathbf{R}_0$ к самой функции f, т. е. справедливо представление $f(x) \overset{п.в.}{=} \int_0^\infty \hat{f}(y)K_{w\psi}(x,y)dy$.

Теперь укажем условия, при которых справедлив континуальный аналог утверждения о том, что система Хаара является системой сходимости.

Теорема 3. Если функция $f \in L^2(0; \infty)$ и о.н.с. ψ таковы, что для преобразования Фурье-Хаара $\hat{f}$ функции f по отношению к $K_{\chi\psi}$ выполняется почти всюду равенство $\hat{f}(y) \overset{п.в.}{=} \int_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dx$, то функция f почти всюду представима своим интегралом Фурье-Хаара, т. е.

$$f(x) \overset{п.в.}{=} \int_0^\infty \hat{f}(y)K_{\chi\psi}(x,y)dy .$$

Заметим, что утверждение Теоремы 3 будет заведомо выполнено, если в качестве ψ взять, например, систему Уолша, т. е. $\psi = w$.

Примечания

1. *Виленкин, Н. Я.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций [Текст] / Н. Я. Виленкин, С. В. Зотиков // Математические заметки. 1973. Т. 13. № 3. С. 469–480.

2. *Зотиков, С. В.* Определение преобразования и интеграла Фурье по отношению к скрещенному произведению ортонормированных систем функций в пространстве L^2 [Текст] / С. В. Зотиков // Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин: КГУ, 1988. С. 26–32.

С. И. Калинин

К АНАЛИЗУ ТРАКТОВОК ФЕНОМЕНА ФУНДАМЕНТАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Работа посвящается анализу существующих трактовок понятия фундаментализации математического образования. Высказывается позиция автора по обозреваемым трактовкам.

Хорошо известно, что сегодняшняя высшая школа характеризуется состоянием поиска путей модернизации образования. Наблюдается процесс осмысления возможностей по ее переходу к новой образовательной парадигме. Если прежняя, как мы знаем, была в основном парадигмой обучения с ведущими лозунгами «знания, умения, навыки и воспитание» [1], то новая, предполагается, должна ориентироваться на становление «компетентности, эрудиции, творческих начал и культуры личности» [1]. Новая парадигма как парадигма образования прежнюю не отменяет, она вбирает в себя ставшие привычными приоритеты и нацеливает на более высокое качество образования.

Многие исследователи проблем образования успех реформирования и модернизации вузовского образования связывают с его фундаментализацией. Подчеркнем, образовательная парадигма, ориентированная на фундаментализацию (фундаментальность) образования, в последнее время была объектом внимания весьма большого количества авторов. Большинство упоминаемых нами исследователей так или иначе касаются вопросов фундаментализации вузовского математического образования. Заметим при этом, что сам термин «фундаментализация» авторами трактуется по-разному. Убедимся в этом, обратившись к некоторым исследованиям.

Так, в работах И. В. Егорченко отмечается, что различные трактовки феномена фундаментализации «группируются вокруг» следующих «направлений» [2], или «тенденций» [3]:

1) интеграция, или сближение науки и образования, предполагающее установление связей между ними;

2) универсализация знаний, умений, навыков, которая обусловливает выделение структурных единиц научного знания, имеющих наиболее высокий уровень обобщения изучаемых явлений;

3) формирование общекультурных основ в процессе обучения, при этом эпитет «общекультурных» понимается широко – в соответствии с

КАЛИНИН Сергей Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент, ст. научный сотрудник кафедры прикладной математики ВятГГУ
© Калинин С. И., 2007

объемным спектром трактовок понятия «культура».

К отмеченному перечню направлений трактовок понятия фундаментализации образования автора привел анализ ряда литературных источников, из которых усматривается порядка шести интерпретаций обсуждаемого термина. Им также замечено [3], что сравнительная характеристика выделенных направлений фундаментализации образования приводит к выводу – некоторые компоненты направлений фундаментализации друг друга дублируют, т. е. этим направлениям присуще нечто общее. В частности, в [3] отмечено, что всем подходам к реализации фундаментализации образования присущи: формирование представлений о математическом моделировании, а также выделение состава деятельности, адекватной математическим знаниям, умениям, навыкам, и реализация деятельностного подхода в обучении математике.

Отметим также, что в своих работах в соответствии с направлением фундаментализации образования И. В. Егорченко приводит характеристику этапов осуществления фундаментализации в процессе обучения. Для каждого из вышеотмеченных направлений им устанавливаются такие этапы:

1) выделение соответствующих единиц «базисных» знаний, умений, навыков;

2) выявление состава деятельности, адекватной данным знаниям, умениям, навыкам, и реализация деятельностного подхода в процессе обучения математике.

И как итог, он фиксирует наиболее существенные признаки фундаментализации математического образования: необходимость выделения состава деятельности, адекватной математическим знаниям, умениям, навыкам; раскрытие деятельностной природы математического знания и реализация в обучении математике деятельностного подхода как научной методологии.

В работах В. А. Тестова [4, 5] вопрос фундаментальности современного образования (не только математического) обсуждается с позиций характеристики концепций содержания образования. Им подчеркивается, что в педагогике единого понимания термина «фундаментальность образования» нет, к тому же толкуется он весьма противоречиво. Автором отмечаются, в частности, такие направления трактовки понятия:

1) фундаментальное образование понимают как более углубленную подготовку по заданному направлению, изучение сложного круга вопросов по соответствующим областям науки;

2) фундаментальное образование предстает как сочетание разностороннего гуманитарного и естественнонаучного знания на основе изучения определенных вопросов по основополагающим областям знаний как соответствующего направления науки, так и общеобразовательных дисциплин;

3) фундаментальность высшего образования есть соединение научного знания и образовательного процесса.

Последняя трактовка понятия фундаментальности образования неоднократно озвучивалась ректором МГУ В. А. Садовничим (см., напр., [6]) – так называемым эталонным может являться лишь фундаментальное научное образование, главной целью которого служит распространение научного знания как части мировой культуры.

В. А. Тестов в [4] замечает, что для выработки современного понимания феномена фундаментального образования необходимо помимо культурологического использовать и другие подходы, например системный, деятельностный и пр. Так, с позиций системного подхода фундаментальность образования должна характеризоваться целостностью, взаимосвязанностью и взаимодействием составляющих его элементов (компонент) и наличием так называемых системообразующих стержней. В цитируемой работе автор раскрывает содержание такой трактовки обсуждаемого понятия и с рассматриваемых позиций делает вывод о том, что «фундаментальность образования означает направленность содержания образования на методологически важные, долгоживущие и инвариантные элементы человеческой культуры, способствующие инициации, развитию и реализации творческого потенциала обучаемого, обеспечивающие качественно новый уровень его интеллектуальной и эмоционально-нравственной культуры, создающие внутреннюю потребность в саморазвитии и самообразовании на протяжении всей жизни человека, способствующие адаптации личности в быстро изменяющихся социально-экономических и технологических условиях».

Характеристике феномена фундаментализации образования как явления образовательной системы современного общества посвящается большой параграф в монографии Н. В. Садовникова [7]. В нем автор, опираясь на свои суждения и исследования других авторов, приводит такую трактовку фундаментализации высшего образования. Фундаментализация – это «образовательная тенденция, носящая принципиальный характер, направленная на создание цельного, обобщающего знания, которое являлось бы ядром и основой всех полученных студентом знаний, которое объединяло бы получаемые в процессе обучения знания в единую мировоззренческую систему, основанную на базе современной методологии» [7, с. 12].

В цитируемой работе подчеркивается, что образование, ориентирующееся на принцип фун-

даментализации, должно играть роль основания, посредством которого будет создана база (фундамент) для накопления узкоспециальных знаний посредством единой методологии. Это создаст предпосылки для самообразования специалиста, что позволит выпускнику вуза ориентироваться в мире быстроизменяющихся технологий и универсализировать свой профессиональный опыт. Кроме того, по мнению автора, фундаментализация образования должна способствовать преодолению разрыва между гуманитарным и естественнонаучным знаниями, что будет содействовать созданию у обучаемых цельного образа восприятия мира и культуры.

В своей монографии Н. В. Садовников отмечает, что фундаментализация вузовского образования может осуществляться в двух направлениях. Первое из них характеризуется тем, что студенту «дается разностороннее гуманитарное и естественнонаучное образование, объединенное на основе наиболее общих фундаментальных дисциплин». Второе же связывается с возможностью объединения узкоспециальных частей и разделов изучаемой дисциплины «на фундаментальных принципах современной методологии» [7, с. 14].

Кроме того, автор обращает внимание читателя [7, с. 28] на то, что важной составляющей фундаментализация образования является «сближение уровня учебных дисциплин с уровнем состояния соответствующей научной отрасли». Заметим, о таком понимании фундаментальности образования мы уже говорили выше, ссылаясь на статью В. А. Садовничего [6].

Подведем предварительный итог. Мы рассмотрели более или менее подробно несколько подходов известных авторов к трактовке понятия фундаментализации образования (в том числе математического). Упоминаемые авторы, заметим, являются специалистами в области теории и методики обучения математике. Мы оставим в стороне рассмотрение ряда других работ, посвященных осмыслению феномена фундаментализации образования. Ясно то, что из анализа трактовок этого феномена вытекает очевидная неоднозначность, неадекватность употребления обсуждаемого понятия в разных ситуациях, а это, естественно, привносит в методическую науку определенную терминологическую путаницу и затруднения в исследованиях.

Обратимся к тексту концепции фундаментализации высшего образования [1]. При его чтении мы обнаружим множество признаков фундаментализация образования. Их описанию отведен не один абзац. Если формулировать определение понятия фундаментализации образования на основе этих признаков, то оно будет широким, «размытым» и не вполне строгим.

В этом месте заметим, что в своей работе В. А. Тестов (см. [4, с. 9]) оговаривает возможность и допущение нестрогого и нечеткого определения понятия фундаментальности образования, ссылаясь на изменение ситуации в постнеклассической науке, где «было осознано, что одним из средств сделать понятие более соответствующим сложной, динамичной, неопределенной реальности является переход от общих четких понятий к менее четким». Кстати, и свою характеристику фундаментальности образования он не считает «точным логическим исполнением», замечая при этом, что на точности определения понятий ряд ученых настаивает принципиально.

Позволим себе высказать следующую мысль. Все же термин «фундаментальность» («фундаментальный») в классической науке имеет особое значение, несет особую смысловую нагрузку. У студенческой молодежи, получающей добротное (университетское или педагогическое) физико-математическое образование, к нему формируется особое отношение, через него, в частности, реализуется соответствующий воспитательный момент. Словосочетание «фундаментальное знание» или эпитет «фундаментальный» всегда ассоциируются с качественным, глубоким, основательным образованием или знанием.

Возьмем, к примеру, вузовскую математику. Студенты математических специальностей при изучении теории пределов во введении в анализ, в метрических пространствах, а также при изучении числовых и функциональных рядов оперируют понятием фундаментальной последовательности (последовательности Коши), при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем – понятием фундаментальной системы решений; понятие фундаментального решения вводится и для линейного дифференциального уравнения с частными производными. В теории топологических пространств рассматриваются такие важные специальные объекты, как фундаментальная группа, фундаментальная область, фундаментальный группоид, фундаментальный класс, фундаментальные циклы и коциклы. У студента-математика, овладевшего приводимыми понятиями, навсегда формируется убеждение в том, что эти понятия являются первичными в соответствующих разделах математики, первостепенными для построения глубоких математических теорий.

Подчеркнем также, у математика-исследователя, математика-профессионала с понятием «фундаментальность» всегда связывается глубокое научное знание или научное исследование.

Возникает вопрос: целесообразно ли понятия фундаментализации подготовки, фундаментализации образования интерпретировать широко, многозначно?

Уместно отметить, академик Н. В. Карлов в своей работе [8, с. 36–37] подчеркивает: «...слово фундаментальное исторически оказалось приложимым к науке и к научным исследованиям в двух, по крайней мере, смыслах – фундаментальное как основа прикладного и фундаментальное как замкнутое на себя, как самоценное и самодостаточное». Говоря об этом, он ссылается на лауреата Нобелевской премии по физике академика А. М. Прохорова, который якобы первым обратил внимание на приведенную характеристику. Н. В. Карлов фундаментальными исследованиями называет «исследования, которые охватывают новые явления и закономерности». Это есть исследование того, что «лежит в природе вещей, явлений, событий». При проведении фундаментальных исследований можно ставить и чисто научную задачу, и конкретную практическую проблему.

Академик А. М. Прохоров применительно к физике считает удобным фундаментальные исследования разбить на две группы. К первой он относит те, что направлены на увеличение объема наших знаний и призваны «удовлетворять потребности человека в целом и прежде всего конкретного человека-исследователя – во все более и более глубоком познании объективного мира». Вторую же группу составляют исследования, которые своей целью имеют «получение фундаментальных знаний, необходимых для ответа на вопрос о том, как достичь того или иного конкретного практического результата». Аналогичное разбиение фундаментальных исследований на группы, очевидно, возможно и в любой другой фундаментальной науке, в том числе и в математике.

В отношении математики характеристику исследований первой группы удобно дать словами Л. С. Понтрягина из [9], которые приводит в своей известной книге [10] Л. Д. Кудрявцев, рассуждая о сущности математики. «Математика имеет свою внутреннюю логику развития, следуя которой математики создают понятия и даже целые разделы, являющиеся продуктом чисто умственной деятельности, которые никак не связаны с окружающей нас материальной действительностью и не имеют в настоящее время никаких приложений...

Невозможно, однако, утверждать, что обладающие внутренней стройностью, но лишенные приложений разделы математики не имеют права на существование. Они составляют внутреннюю ткань науки, иссечение которой могло привести к нарушению всего организма в целом. Кроме того, оказывается, что некоторые разделы математики, лишенные приложений в течение многих веков, позже находят эти приложения» – так выражался Л. С. Понтрягин.

В качестве иллюстрации мысли Л. С. Понтрягина можно привести пример теории групп, которая зародилась в конце XVIII в. в трудах выдающегося французского математика Жозефа Луи Лагранжа и стала находить свои плодотворные приложения в кристаллографии и теоретической физике в XIX–XX вв. Идеи вычислительных машин были высказаны еще Блезом Паскалем и Готфридом Лейбницем, а созданная Джорджем Булем алгебра высказываний предопределила создание математического аппарата для современных ЭВМ.

Более убедительным примером такого рода мог бы служить известный пример из [11]: древнегреческие математики создали теорию конических сечений, которая не находила своего применения порядка двух тысяч лет, пока Кеплер не использовал ее для создания теории движения небесных тел (после этого Ньютон, опираясь на теорию Кеплера, создал механику). Но в своем докладе [12] на Всероссийской конференции по математическому образованию в 2000 г. в г. Дубне академик В. И. Арнольд отмечает (см. с. 12), что еще египетским жрецам «были уже известны, во-первых, закон обратных квадратов, во-вторых, законы Кеплера и, в-третьих, что из закона обратных квадратов следуют законы Кеплера».

Характеризуя частично вторую группу исследований в математике, можно обратиться к ее истории, скажем, начала XIX в. [13] Если до XIX в. в основном лишь механика и оптика требовали значительного математического аппарата, то в обозреваемый период к ним присоединились такие разделы физики, как электродинамика, теория магнетизма, термодинамика. Новые области механики и математической физики обусловили активное развитие теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также теорию потенциала. В этот период закладываются основы вариационного исчисления, возникает векторный анализ, получает дальнейшее развитие теория вероятностей (в России применением теории вероятностей к приемочному контролю и статистике занимались М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский [13]), теория комплексных чисел, теория функций комплексного переменного.

На разных этапах развития конкретной науки содержание образующихся в ее рамках групп фундаментальных исследований не остается неизменным, и между этими группами «нельзя провести резкую границу» – группы могут взаимодействовать, взаимопревращаться, переплетаться, – методологически они близки [8].

Н. В. Карлов, апеллируя к физике, подмечает, что в определенные периоды времени конкретная наука может лишь объяснять различные

открытия, идя вслед за открытиями, а не предвосхищать их. Но наблюдается и обратное – в какие-то периоды своего развития эта наука предопределяет и предвосхищает открытия всевозможных процессов и явлений. Кратко воспроизведем пример из [8], подтверждающий сказанное.

Рассмотрим раздел физики оптику. Хорошо известно, что человечеством были изобретены зеркала и линзы, изготовлены двухлинзовая зрительная труба Галилея и однолинзовый микроскоп Левенгука задолго до появления Эйлеровой теории ахроматизма и дифракционной теории Аббе, т. е. без какой-либо научной подготовки. Аналогично фотография возникла задолго до того, как научились ставить опыты по фотоэффекту (с объяснением последних А. Эйнштейном) и понимать квантовую природу взаимодействия света и вещества. Однако параллельно с перечисляемыми фактами в недрах той же оптики формировалась такая во многом прикладная наука, как спектроскопия. Она появилась в результате чисто фундаментальных исследований – исследований, которые не преследовали практически значимых целей и которые сформировали волновую оптику (Ф. Гримальди, Х. Гюйгенс, Т. Юнг, О. Ж. Френель). Спектральный же анализ вышел из работ Ньютона, Фраунгофера, Бунзена и Кирхгофа.

Аналогичные иллюстрации можно привести и в отношении математики, только нужно помнить, что прикладная математика есть наука, в которой «математическими методами изучаются реальные объекты» [10, с. 63], и ценность математики «состоит не только в ее практических применениях, но и в ней самой, как самостоятельной науке» [10, с. 67]. Остановимся лишь на примерах, связанных с тем, что такие теоретические открытия, как открытие планеты Нептун, открытие электромагнитных волн, открытие позитрона, сначала были сделаны математически, и лишь потом они получили экспериментальное подтверждение [10, с. 68]. В частности, Герцем было экспериментально подтверждено фактическое существование электромагнитных колебаний, что обусловило в дальнейшем рассмотрение известного дифференциального уравнения Максвелла как математическую модель соответствующего реального физического явления.

Н. В. Карлов подчеркивает, что «фундаментальная наука, т. е. экспериментальные и теоретические исследования природы вещей, явлений, событий, будут существовать до тех пор, пока существует человечество». Чтобы быть в числе ведущих держав, Россия должна развивать фундаментальную науку. Но это «невозможно без фундаментальности в образовании вообще и в высшем образовании прежде всего». Необходимо констатировать, что фундаментальные исследования и фундаментальное образование – взаимно обусловливающие друг друга процессы: без фундаментальных исследований не может быть фундаментального образования, и наоборот. Современный выпускник вуза как специалист должен быть подготовлен так, чтобы не отставать от прогресса соответствующей области знаний и технологий, чтобы быть способным к творчеству и активному восприятию всего нового в его профессии. Перечисленные качества в специалисте не формируются в одночасье, это требует времени и большой систематической работы. Хорошее образование может быть получено лишь посредством эффективной образовательной системы, на базе прочного фундаментального образования. Н. В. Карлов замечает [8, с. 46]: «...для того чтобы в наше время стать, скажем, хорошим инженером, необходимо получить хорошее фундаментальное образование. Обучение фундаментальным наукам должно тесно соседствовать с собственными фундаментальными исследованиями».

В контексте рассмотренного уместно определиться в следующем понимании фундаментализации вузовского образования. Обсуждаемый феномен есть сближение и соединение образовательного процесса по данному направлению подготовки специалистов с научными знаниями в соответствующей области специализации и научными достижениями тех методических наук, которые обеспечивают эту подготовку.

Преломляя приводимую трактовку фундаментализации вузовского образования на математическую подготовку студентов, под фундаментализацией вузовского математического образования мы условимся понимать обеспечение сближения процесса изучения математики с научными знаниями и научными исследованиями в соответствующих областях математических наук, а также использование при обучении студентов математическим дисциплинам современных достижений методики обучения математике как научной области.

Приводимая трактовка фундаментализации математического образования необходимо предполагает знакомство студентов с современными исследованиями (на соответствующем уровне) и вовлечение их в реальную научно-исследовательскую работу. Это будет способствовать активному и глубокому овладению студентами математическими методами.

Кроме того, такая трактовка фундаментализации математической подготовки студентов предполагает в практике их обучения опираться на методологическую составляющую методики обучения математике. Обучение должно производиться в рамках соответствующей методической системы с учетом составляющих внешней среды последней и опираться на деятельностный подход.

Представленное толкование феномена фундаментализации вузовского математического образования полностью согласуется с позицией в отношении фундаментальности образования В. А. Садовничего в [6] и систематическими исследованиями по методологии методики обучения математике, проведенными Г. И. Саранцевым в [14–16]. В контексте рассматриваемой интерпретации фундаментализации математического образования мы намерены описать методическую систему обучения дифференциальному и интегральному исчислению функций будущих учителей математики.

Примечания

1. *Суханов, А. Д.* Концепция фундаментализации высшего образования и ее отражение в ГОСах [Текст] / А. Д. Суханов // Высшее образование в России. 1996. № 3. С. 17–24.

2. *Егорченко, И. В.* Фундаментализация математического образования: аспекты, особнности трактовок, направления реализации [Текст] / И. В. Егорченко // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: состояние, перспективы (математическая подготовка учителя математики в педвузе в условиях фундаментализации образования): м-лы Всерос. науч. конф. г. Саранск, 4–6 сент. 2005 г. / Мордовский гос. пед. ин-т. Саранск, 2005. С. 7–10.

3. *Егорченко, И. В.* Фундаментализация математического образования [Текст] / И. В. Егорченко // Математика в образовании: сб. статей. Вып. 2. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2006. С. 8–20.

4. *Тестов, В. А.* Фундаментальность образования: современные подходы [Текст] / В. А. Тестов // Педагогика. 2006. № 4. С. 3–9.

5. *Тестов, В. А.* Фундаментальность математического образования в условиях перехода к профильному обучению [Текст] / В. А. Тестов // Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: м-лы XXV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов. Киров; М.: ВятГГУ: МГПУ, 2006. С. 26–28.

6. *Садовничий, В. Ф.* Традиции и современность [Текст] / В. Ф. Садовничий // Высшее образование в России. 2003. № 1. С. 11–18.

7. *Садовников, Н. В.* Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования [Текст] : монография / Н. В. Садовников. Пенза: Пензен. госпедун-т, 2005. 283 с.

8. *Карлов, Н. В.* О фундаментальном и прикладном в науке и образовании, или «Не возводи свой дом на песке» [Текст] / Н. В. Карлов // Вопросы философии. 1995. № 11. С. 35–46.

9. *Понтрягин, Л. С.* Оптимизация и дифференциальные игры [Текст] / Л. С. Понтрягин // Успехи математических наук. 1978. 33, № 6. С. 27–28.

10. *Кудрявцев, Л. Д.* Современная математика и ее преподавание [Текст] : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Кудрявцев. М.: Наука, 1985. 170 с.

11. *Крылов, А. Н.* Воспоминания и очерки [Текст] / А. Н. Крылов. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 589 с.

12. *Арнольд, В. И.* Нужна ли в школе математика? [Текст] : стенограмма пленарного доклада (Дубна, 21 сентября 2000 г.) / В. И. Арнольд. М.: МЦНМО, 2004. 32 с.

13. *Колмогоров, А. Н.* Математика. Исторический очерк [Текст] / А. Н. Колмогоров. М.: Анабасис, 2006. 60 с.

14. *Саранцев, Г. И.* Методология методики обучения математике [Текст] / Г. И. Саранцев. Саранск, 2001. 141 с.

15. *Саранцев, Г. И.* Подготовка учителя математики в условиях фундаментализации образования [Текст] / Г. И. Саранцев // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России: тез. докл. III Всерос. науч. конф. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2004. С. 50–51.

16. *Саранцев, Г. И.* Методическая подготовка учителя математики в педвузе в современных условиях: состояние, проблемы [Текст] / Г. И. Саранцев // Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: состояние, перспективы (математическая подготовка учителя математики в педвузе в условиях фундаментализации образования): м-лы Всерос. науч. конф. г. Саранск, 4–6 сент. 2005 г. / Мордовский гос. пед. ин-т. Саранск, 2005. С. 3–6.

Е. В. Костромитина

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ УМЕНИЮ ОПРОВЕРГАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НА ПЕРВЫХ УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Обучение школьников умению проводить опровержение простейших геометрических доказательств является достаточно сложной методической проблемой, поскольку начальная стадия обучения такому опровержению должна учитывать жизненный опыт учащихся, носить в существенной мере наглядно-индуктивный характер с постепенным расширением элементов доказательности нарастающей трудности. В статье рассматривается формирование важного компонента умения опровергать – умение представлять доказательство в виде логически развернутого на примере специально подобранных упражнений на готовых рассуждениях.

Вопрос о проведении работы по обучению опровержению приобретает определенный смысл только тогда, когда удается очертить круг относительно требований, принимаемых за критерий строгости и истинности рассуждений на том или ином этапе обучения. Учителю следует точно знать и определить для учащихся рамки «строгости» обоснований на каждом этапе обучения. А. Я. Хинчин писал: «Аргументация, не обладающая характером полной, абсолютной исчерпанности, оставляющая хотя бы малейшую возможность обоснованного возражения, беспощадно признается ошибочной и отбрасывается «как лишенная какой бы то ни было силы». Ни один из школьных предметов не отвечает этому принципу в такой явной форме, как математика.

КОСТРОМИТИНА Екатерина Васильевна – доцент по кафедре теории и методики обучения математике Пензенского государственного педагогического университета им. В. Г. Белинского
© Костромитина Е. В., 2007

Известно, что в общеобразовательной школе неприемлемо преподавание на строго аксиоматической основе. Невозможно и аксиоматическое изложение, при котором изучаемым объектам придается конкретный смысл, когда они опредмечиваются идеальными образами определенной конструкции. Остается такое изложение систематических курсов школьной математики, в котором приведена избыточная или неполная аксиоматика, а изучаемым объектам придается конкретное содержание.

В начале систематического изучения курса геометрии учащиеся знакомятся с такими понятиями, как «теорема» и «доказательство». Отметим, при хорошо организованной работе на этапе формирования потребности в опровержении ложных утверждений (при обучении математике в 1–6-х классах), школьники должны знать, что доказательства, рассуждения, приведенные в защиту какого-либо положения, могут быть неверными, т. е. содержать ошибку; уметь находить и исправлять ошибки в простейших рассуждениях, неверных доказательствах, опираясь при этом на свой опыт и изученные ранее правила. Задача учителя – заострить внимание ребят на том, что ошибка в доказательстве утверждения может находиться как в самом утверждении, так и в его обосновании (рассуждениях, приводящих к доказываемому тезису). Необходимо разъяснить школьникам, что умение опровергать готовое доказательство (находить и исправлять в нем ошибки, показывать его несостоятельность) столь же необходимо, как и умение доказывать.

Отметим, что в начале обучения геометрии требование обоснования или опровержения утверждения учащимся кажется излишним, особенно в тех случаях, когда интуиция убеждает их в справедливости или несправедливости какого-либо утверждения, что часто подсказывается наглядностью или опытом. Основным условием эффективного обучения опровержению должен стать его развивающий характер, порождающий у школьников интерес и потребность в исследовательской работе. Начальная стадия обучения опровержению доказательств должна учитывать жизненный опыт учащихся, носить в какой-то мере наглядно-индуктивный характер с постепенным расширением элементов доказательности нарастающей трудности. В это время учитель должен на примерах показывать, как следует находить и исправлять ошибки в предложенных рассуждениях, знакомить учеников с готовыми опровергающими рассуждениями.

Известно, что на первых уроках геометрии и алгебры происходит формирование умения осуществлять дедуктивные выводы, умения применять эвристические приемы. При этом ведущую роль играют целесообразно подобранные упражнения: 1) упражнения с требованием осуществить дедуктивный вывод по данным посылкам; 2) упражнения на проверку правильности данного рассуждения; 3) упражнения на восстановление пропущенных элементов умозаключения; 4) упражнения на самостоятельное составление дедуктивного вывода; 5) упражнения на выведение следствий; 6) упражнения на установление связей, взаимозависимостей между отдельными теоремами, задачами, понятиями. Эти же типы упражнений, очевидно, способствуют и формированию умения опровергать предложенные рассуждения (в частности, находить и устранять ошибки и пробелы в несложных дедуктивных выводах).

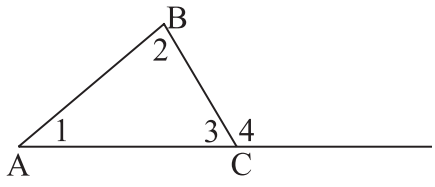
Говоря о мере строгости, следует обращать внимание учащихся не только на то, чем можно руководствоваться, но и обязательно на то, чего делать нельзя. Например, нельзя: 1) делать необоснованные построения при доказательстве теорем; 2) пропускать какой-либо случай из тех, которые допускаются условиями задачи; 3) ссылаться в рассуждениях на недоказанные утверждения, даже если они кажутся очевидными; 4) считать доказательной неполную индукцию или математически не выясненную аналогию; 5) принимать доказательство за достоверное, если удается привести контрпример; 6) бездоказательно ссылаться на предложение, обратное данному; 7) при решении задач ограничиваться использованием части данных условий (если же есть лишние данные в задаче, то их следует отбрасывать) и т. д.

Учитель должен придерживаться этих требований ограничений и постепенно (начиная с первых уроков геометрии и алгебры) приучать учеников к соблюдению их, подвести учащихся к начальным фазам критического разбора неполноценных доказательств. Критический анализ доказательств представляет собой многосложный процесс как в логико-психологическом, так и в методологическом отношении, поэтому к нему следует подходить очень осторожно, приводя яркие контрпримеры, постепенно обучая приемам такого анализа (приемам опровержения). Каждый ученик должен научиться критически анализировать доказательства на уровне, соответствующем его возможностям. «Проверка обычного доказательства представляет очень деликатное препятствие, и, чтобы напасть на “ошибку”, требуется столько же интуиции и счастья, сколько и для того, чтобы натолкнуться на доказательство» [1].

Обучение математике на данном этапе позволяет формировать у школьников еще один важный компонент умения опровергать – умение представлять доказательство в виде логически развернутого (что нередко дает возможность найти в нем ошибку).

Обычно в процессе доказательства многие логические переходы осуществляются сокращенно. В результате реальное (школьное) математическое доказательство представляет собой свернутое, краткое рассуждение, в котором пропущены шаги, какие-то посылки не сформулированы явно, а лишь подразумеваются, не уточняются правила, по которым делаются логические переходы. Доказательства, приводимые в школьном курсе математики, компактны, кратки, многие их детали не видны, ведь ученик может охватить мыслью некоторый достаточно сложный логический переход, не формулируя используемые логические правила в явной форме и даже не отдавая себе отчет во всех деталях. Учитель должен пояснить ученикам, что доказательства (на интуитивном уровне) можно рассматривать как некоторый текст, составленный из предложений (*членов* доказательства). Главной особенностью этого текста будет являться тот факт, что предложения, из которых он составлен, логически связаны между собой. Обычно эта связь выражается словами «предложение такое-то логически следует из (предшествующих) предложений таких-то». При этом подразумевают, что каждый шаг рассуждения сделан в соответствии с некоторым правилом вывода (логическим правилом), не уточняя, какое именно это правило. При кратком изложении доказательства часто используется слово «следовательно», а из каких посылок следует данное предложение, не указывается, часто посылки пропускаются (особенно хорошо известные, ранее доказанные утверждения). Но ученики должны понимать, что при желании все эти неявные посылки всегда можно восстановить. Логически развернутое доказательство – доказательство, представленное в виде конечной последовательности предложений с обоснованием участия каждого предложения.

Работу по формированию умения представлять доказательства в виде развернутого на данном этапе обучения целесообразно проводить с помощью специальных упражнений на готовых рассуждениях. Рассмотрим пример.



Задание. Прочитайте доказательство теоремы о внешнем угле треугольника по учебнику Л. С. Атанасяна [2]. Выявите пропущенные взаимосвязи между предложениями в этом доказательстве, восстановите пропущенные, но подразумеваемые утверждения (посылки).

Восстановление доказательства: Более подробный вариант таков: «По условию ABC (см. рисунок) – треугольник, следовательно, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ – углы треугольника ABC. Известно, что сумма углов треугольника равна $180°$, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ – углы треугольника ABC (пропущенная малая посылка – ПМП), следовательно, $.\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. Внешний угол треугольника – угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (пропущенная большая посылка – ПБП), $\angle 4$ – внешний угол $\triangle ABC$ (ПМП), следовательно, $\angle 4$ – смежный с $\angle 3$ (см. рисунок). Сумма смежных углов равна $180°$ (ПБП), $\angle 4$ и $\angle 3$ – смежные, следовательно, $.\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из курса алгебры известно, что если от обеих частей равенства отнять одно и то же число, то получим верное равенство (ПБП); следовательно, отнимая от обеих частей равенства $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ значение градусной меры $\angle 3$, получим равенство $.\angle 4 = 180° - \angle 3$. И отнимая от обеих частей равенства $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ значение градусной меры $\angle 3$, получим равенство $\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle 3$, и, следовательно, $180° - \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$. Известно, что если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (ПБП); имеем: $\angle 4 = 180° - \angle 3$, $180° - \angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ (ПМП); следовательно, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$. Теорема доказана».

Анализ доказательства рассматриваемой теоремы показывает, что оно имеет достаточно сложную структуру, разобраться в которой ученику, только приступившему к изучению систематического курса геометрии, непросто. Поэтому на первых порах ученики выполняют подобные упражнения при помощи учителя, поскольку еще затрудняются при выявлении отдельных шагов доказательства и связей между ними при обосновании утверждений.

Примечания

1. *Куайн, У.* Математическая логика [Текст] / У. Куайн; пер. с англ. М.: Праксис: Логос, 2000. С. 180.

2. Геометрия [Текст] : учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян и др. М.: Просвещение, 1998. С. 66.

В. В. Локоть

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ КОНСТАНТЫ ОДНОГО КЛАССА ПОДПРОСТРАНСТВ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 ПРОСТРАНСТВА l_∞^n

Работа посвящена поиску относительных проекционных констант одного класса подпространств пространства l_∞^n.

Пусть Y_n – линейное нормированное пространство, X_k – подпространство Y_n размерности k ($k < n$). Относительной проекционной константой X_k в Y_n называется число

$\lambda(X_k, Y_n) = inf\{\|\pi\|, \pi -$ проекция Y_n на $X_k\}$.

Абсолютная проекционная константа $\lambda(k, n)$ определяется следующим образом: $(k, n) = \sup\{\lambda(X_k, Y_n) \mid X_k \subset Y_n\}$. Точное значение чисел $\lambda(k, n)$ ($k \le n-2$) неизвестно.

В качестве Y_n возьмём пространство l_∞^n элементов $y = \{y_i\}_{i=1}^n$ с нормой $\|y\| = \max|y_i|$, а

$$X_{n-2} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0),$$

где $f = (\underbrace{1, ..., 1}_{m}, \underbrace{0, ..., 0}_{m}, \underbrace{r, ..., r}_{m})$,

$$g = (\underbrace{0, ..., 0}_{m}, \underbrace{1, ..., 1}_{m}, \underbrace{s, ..., s}_{m}) -$$

линейные функционалы, определенные на l_∞^n,

$$f^{-1}(0) = \{y \in l_\infty^n \mid f(y) = \sum_{i=1}^n f_i y_i = 0\}$$

и

$$g^{-1}(0) = \{y \in l_\infty^n \mid g(y) = \sum_{i=1}^n g_i y_i = 0\} -$$

гиперплоскости в пространстве l_∞^n.

Мы рассматриваем случай $n = 3m$, $m \in N$, $m \ge 2$,

$$r \ge 0,\ s \ge 0,\ r + s > 1,\ 1 + s > r,\ 1 + r > s. \quad (1)$$

Известно [1], что любая проекция Y_n на X_{n-2} имеет вид $\pi_{\alpha,\beta}(y) = y - \alpha f(y) - \beta g(y)$ при условии

$$f(\alpha) = g(\beta) = 1,\ f(\beta) = g(\alpha) = 0. \quad (2)$$

Норма оператора $\pi_{\alpha,\beta}$ вычисляется по формуле $\|\pi_{\alpha,\beta}\| = \max T_i$, где

$$T_i = \sum_{i=1}^n |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j|,\ (j = 1, ..., n).$$

Введём обозначения: $A_t = \sum_{i=(t-1)m+1}^{tm} \alpha_i$, $B_t = \sum_{i=(t-1)m+1}^{tm} \beta_i$, $(t = 1, 2, 3)$.

Условия (2) примут вид: $A_1 + rA_3 = 1$, $A_2 + sA_3 = 0$, $B_1 + rB_3 = 0$, $B_2 + sB_3 = 1$. Оценим $T_i = \sum_{j=1}^{3m} |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j|$.

1. $1 \le i \le m$. $m\|\pi_{\alpha,\beta}\| \ge \sum_{i=1}^m T_i =$

$$= \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^m |\delta_{ij} - \alpha_i| + \sum_{j=m+1}^{2m} |\beta_i| + \sum_{j=2m+1}^{3m} |\alpha_i r + \beta_i s| \Big) \ge \quad (3)$$

$$\ge m + (m-2)A_1 - mB_1 + m(rA_1 + sB_1) =$$

$$= m(2+r) - 2 - r(m(1+r) - 2)A_3 + rm(1-s)B_3.$$

II. $m+1 \le i \le 2m$. $m\|\pi_{\alpha,\beta}\| \ge \sum_{i=m+1}^{2m} T_i =$

$$= \sum_{i=m+1}^{2m} \Big(\sum_{j=1}^m |\alpha_i| + \sum_{j=m+1}^{2m} |\delta_{ij} - \beta_i| + \sum_{j=2m+1}^{3m} |\alpha_i r + \beta_i s| \Big) \ge$$

$$\ge -mA_2 + m + (m-2)B_2 + m(rA_2 + sB_2) = \quad (4)$$

$$= m(2+s) - 2 + sm(1-r)A_3 - s(m(1+s) - 2)B_3.$$

III. $2m+1 \le i \le 3m$. $m\|\pi_{\alpha,\beta}\| \ge \sum_{i=2m+1}^{3m} T_i =$

$$= \sum_{i=2m+1}^{3m} \Big(\sum_{j=1}^m |\alpha_i| + \sum_{j=m+1}^{2m} |\beta_i| + \sum_{j=2m+1}^{3m} |\delta_{ij} - \alpha_i r - \beta_i s| \Big) \ge$$

$$\ge mA_3 + mB_3 + m + (m-2)(rA_3 + sB_3) = \quad (5)$$

$$= m + m((1+r) - 2r)A_3 + (m(1+s) - 2s)B_3.$$

Умножим левые и правые части неравенств (3) – (5) на положительные числа

$$k = s(m(1+s) - 2r),\ l = r(m(1+r) - 2s),$$

$$p = rs(m(r+s) - 2)$$

(соответственно) и сложим их. Получим

$$m\|\pi_{\alpha,\beta}\|(k+l+p) \ge m(k(2+r) + l(2+s) + p) - 2(k+l),$$

откуда

$$\|\pi_{\alpha,\beta}\| \ge 2 + \frac{m(rk + sl - p) - 2(k+l)}{m(k+l+p)} = f(m, r, s).$$

Эта оценка точная, что означает существование $\alpha_i^{(0)}, \beta_i^{(0)}$, при которых

$\|\pi_{\alpha^{(0)},\beta^{(0)}}\| = f(m, r, s) = T_i$ $(i = 1, ..., n)$. Формулы для вычисления $\alpha_i^{(0)}, \beta_i^{(0)}$ мы не приводим. Таким образом,

$$\lambda(3m-2,\ 3m) \ge \lambda(X_{3m-2}, l_\infty^{3m}) = f(m, r, s).$$

В работах [2, 3] рассматривались случаи $r = s = 1$ [2], $r = s$ [3] и получена оценка $\lambda(3m-2, 3m) \ge \frac{7}{3} - \frac{4}{3m}$. Покажем сейчас, что и в более общем случае произвольных r и s, удовлетворяющих условию (1), $f(m, r, s) \le \frac{7}{3} - \frac{4}{3m}$. Действительно,

$$f(m, r, s) \le \frac{7}{3} - \frac{4}{3m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{m(rk + sl - p) - 2(k+l)}{m(k+l+p)} \le \frac{m-4}{3m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3m(rk + sl - p) - 6(k+l) \le (m-4)(k+l+p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (r^2 s + rs^2 + r^2 - 6rs + s^2 + r + s)(m+2) \ge 0.$$

На множестве, определяемом условиями (1), неравенство выполняется, а равенство достигается только при $r = s = 1$.

ЛОКОТЬ Вадим Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент по кафедре математического анализа Мурманского государственного педагогического университета

© Локоть В. В., 2007

Итак, найдены относительные проекционные константы

$$\lambda(X_{3m-2}, l_\infty^{3m}) = f(m,r,s),$$

которые дают хорошую оценку снизу абсолютной проекционной константы $\lambda(3m-2,\ 3m)$.

Примечания

1. *Blatter, J.* Minimal projections on to hyperplanes in sequence spaces [Text] / J. Blatter, E. W. Cheny. // Ann. Mat. Pura Appl. 1974. № 101. P. 215–227.

2. *Lokot, V. V.* On a class of minimal projections in finite dimensional spaces [Text] / V. V. Lokot // Optimization. 1994. Vol. 29. P. 311–317.

3. *Локоть, В. В.* Относительные проекционные константы некоторых классов подпространств в пространствах l_1^n и l_∞^n [Текст] / В. В. Локоть, Е. А. Халунина // Учёные записки МГПИ: Физико-математические науки. Математика: Сборник статей. Мурманск: МГПИ, 2002. Вып. 1. С. 61–66.

М. А. Лукин

О ПОЛУКОЛЬЦАХ С ОБРАТИМОЙ СУММОЙ ОБРАТИМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье дается обобщение понятия положительного полукольца. Исследуется структура полуколец, множество обратимых элементов которых замкнуто относительно сложения.

Введенное в статье понятие D-полукольца, обобщающее понятие положительного полукольца, возникло в процессе изучения структуры дизъюнктного объединения кольца и полутела. Поэтому необходимо привести некоторые определения и полученные результаты.

В работе рассматриваются только полукольца с единичным элементом.

Будем обозначать далее $U(S)$ – множество обратимых элементов полукольца S, $r(S)$ – множество элементов полукольца S, обладающих противоположным. Очевидно, что $r(S)$ является кольцом относительно операций в S.

Определение. Полукольцо S называется *дизъюнктным полукольцевым объединением* кольца R и полутела U и обозначается $U \dot\cup R$, если оно является объединением своих непересекающихся подмножеств $U(S)$ и $r(S)$, причем $U(S) \cong U$ и $r(S) \cong R$.

Полутело U называется *зероидным*, если $a = a + b$ для некоторых $a, b \in U$.

Теорема А [1]. *Для произвольного кольца R эквивалентны следующие условия:*

1) существует полукольцо, являющееся дизъюнктным объединением кольца R и полутела U;

2) R – радикальное по Джекобсону кольцо, аддитивная группа которого есть делимая абелева группа без кручения.

Теорема Б [2]. *Полутело U входит в дизъюнктное объединение с некоторым нетривиальным кольцом тогда и только тогда, когда оно не является зероидным.*

Определение. Элементы s_1, s_2 полукольца S находятся в *отношении Берна* $\sigma(I)$ по некоторому полукольцевому идеалу I тогда и только тогда, когда существуют элементы $i_1, i_2 \in I$, что $s_1 + i_1 = s_2 + i_2$. Отношение Берна является конгруэнцией на S.

Теорема В [3]. *Для любого полукольца S фактор-полукольцо $S/\sigma(r(S))$ является антикольцом, т. е. полукольцом с тождеством $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$.*

Определение. Назовем полукольцо S *U-полукольцом*, если $U(S) + U(S) \subseteq U(S)$. Очевидно, что для любого U-полукольца выполняется $U(S) + U(S) = U(S)$.

Положительным называется полукольцо S, в котором для любого элемента $s \in S$ элемент $1 + s$ обратим.

Теорема. *Для любого полукольца S равносильны следующие условия:*

1) S – U-полукольцо, и кольцо $r(S)$ радикально по Джекобсону;

2) $U(S) \dot\cup r(S)$;

3) S – U-полукольцо, и $U(S) + r(S) \subseteq U(S)$.

Доказательство. Докажем равносильности 1)⇔2) и 2)⇔3).

1)⇒2). Достаточно показать замкнутость операций на $U(S) \cup r(S)$. Поскольку в любом полукольце $r(S)$ является двусторонним идеалом, то операция умножения замкнута. Для любых $u \in U(S)$, $r \in r(S)$ выполняется $u + r = u(1 + u^{-1}r)$, обратным к этому элементу, очевидно является $(1 + (u^{-1}r)')u^{-1}$, следовательно, $u + r \in U(S)$. Поэтому операция сложения также замкнута.

2)⇒1) следует из теоремы А.

2)⇒3). Если $U(S) \dot\cup r(S)$, то $\forall u \in U(S)$, $\forall r \in r(S)$, $u + r \in U(S)$ или $u + r \in r(S)$. Предположим, что $u + r = r_1 \in r(S)$. Тогда $u = r_1 - r \in r(S)$, значит, в полукольце S нашелся обратимый элемент, обладающий противоположным, следовательно, ввиду дистрибутивности S – кольцо, что противоречит условию 2). Таким образом, $\forall u \in U(S)$, $\forall r \in r(S)$, $u + r \in U(S)$.

3)⇒2). Очевидно, ввиду того, что $r(S)$ двусторонний идеал.

Будем называть полукольца, удовлетворяющие эквивалентным условиям теоремы, *D-полукольцами*.

Заметим, что антикольцо S является D-полукольцом тогда и только тогда, когда S есть U-полукольцо.

Следствие. *Любое положительное полукольцо S является D-полукольцом, откуда следует, что $r(S)$ – радикально по Джекобсону, и если*

ЛУКИН Михаил Александрович – аспирант кафедры высшей математики ВятГГУ

© Лукин М. А., 2007

r(S)≠{0}, то U(S) – незероидное полутело (по теореме Б).

Пример 1. Пусть P – поле и T – некоторое его подполуполе, $M_n(P)$ – кольцо квадратных матриц над полем P. Подмножество (рис. 1) является D-полукольцом. Действительно, множество его обратимых элементов (рис. 2) и множество элементов, обладающих противоположным (рис. 3), образуют дизъюнктное объединение.

Предложение 1. *Пусть σ – отношение Берна на полукольце S по идеалу r(S). Тогда для любого D-полукольца S верными являются следующие утверждения:*

1) полукольцо S является положительным тогда и только тогда, когда S/σ – положительно,

2) фактор полукольцо S/σ также является D-полукольцом.

Доказательство. 1). Пусть S – положительное полукольцо. Тогда $\forall \bar{t} \in S/\sigma, \bar{t}+\bar{1}=\overline{t+1}$. Поскольку класс $\overline{t+1}$ обратимого элемента $t+1$ обратим в S/σ, то полукольцо S/σ положительно. Обратно, пусть S/σ положительно. Тогда $\forall t \in S, \exists p \in S, (1+t)p = 1+r$. Поэтому элемент $1 + t$ обратим справа. Аналогично доказывается, что $1 + t$ обратим слева, следовательно $1 + t$ обратим, что и требовалось доказать.

2). В силу теоремы В фактор-полукольцо S/σ является антикольцом. Поэтому достаточно доказать, что $U(S/\sigma)$ будет U-полукольцом. Действительно, пусть $\overline{u_1}+\overline{u_2}=\bar{t}$, тогда $\exists r \in r(S)$, $u_1 + u_2 = t + r$. Следовательно, $t = u_1 + u_2 - r \in U(S)$, что означает, что $\bar{t} \in U(S/\sigma)$.

Далее рассмотрим некоторые другие классы U-полуколец.

Для любого полукольца S определим подмножества:

$$X(S)=\{s\in S \mid \forall u\in U(S),\ u+s\in U(S)\},$$
$$Y(S)=\{s\in S \mid \exists u\in U(S),\ u+s\in U(S)\},$$
$$Z(S)=\{s\in S \mid \exists t\in S,\ t+s\in U(S)\}.$$

Заметим, что $Z(S)\supseteq Y(S)\supseteq X(S)$.

Равенство $X(S) = S$ означает, что S положительно.

Предложение 2. *Для любого U-полукольца S множество X(S) служит наибольшим положительным подполукольцом среди полуколец в S содержащих U(S).*

Доказательство. Покажем, что сложение и умножение в $X(S)$ замкнуты. Пусть $x_1, x_2 \in X(S)$. Тогда для любого $u\in U(S)$, $x_2+u\in U(S)$, а значит, $x_1+x_2+u\in U(S) \Rightarrow x_1+x_2\in X(S)$. Поскольку произведение обратимых элементов полукольца обратимо, то $(x_1 + u_1)(x_2 + u_2)$ обратим для любых u_1, u_2. Пусть $u_1 = (x_1 + 1)^{-1}u(x_2 + (x_1 + 1)^{-1}u)^{-1}$,

$$L=\left\{ l\in M_n \mid l=\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-1} & t_n \end{pmatrix}, p_{i,j}\in P, t_i \in T \right\}$$

Рис. 1

$$U(L)=\left\{ l\in M_n \mid l=\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-1} & t_n \end{pmatrix}, p_{i,j}\in P, t_i \in T, t_i \neq 0 \right\}$$

Рис. 2

$$r(L)=\left\{ l\in M_n \mid l=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{2,1} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{n,1} & \cdots & p_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, p_{i,j}\in P \right\}$$

Рис. 3

$u_2 = (x_1 + 1)^{-1}u$, где u – произвольный элемент из $U(S)$. Тогда

$$(x_1 + u_1)(x_2 + u_2) = (x_1 + (x_1 + 1)^{-1}u(x_2 + (x_1 + 1)^{-1}u)^{-1})(x_2 + (x_1 + 1)^{-1}u) = x_1x_2 + x_1(x_1 + 1)^{-1}u + (x_1 + 1)^{-1}u(x_2 + (x_1 + 1)^{-1}u)^{-1}(x_2 + (x_1 + 1)^{-1}u) = x_1x_2 + x_1(x_1 + 1)^{-1}u + (x_1 + 1)^{-1}u = x_1x_2 + (x_1 + 1)(x_1 + 1)^{-1}u = x_1x_2 + u$$

Следовательно, для любого $u \in U(S)$ элемент $x_1x_2 + u$ обратим, значит, $x_1x_2 \in X(S)$. Очевидно, для любого другого положительного подполукольца T, содержащего $U(S)$, выполняется включение $T \subseteq X(S)$.

Предложение 3. *Для любого U-полукольца S множество $Y(S)$ является подполукольцом в S.*

Доказательство. Покажем замкнутость операций в $Y(S)$. Пусть $y_1 \in Y(S)$, $y_2 \in Y(S)$, тогда $\exists u_1 \in U(S)$, $\exists u_2 \in U(S)$, $y_1 + u_1 \in U(S)$, $y_2 + u_2 \in U(S)$. Значит, $y_1 + y_2 + (u_2 + u_2) \in U(S)$, далее, $(y_1 + u_1)(y_2 + u_2) = y_1y_2 + u_1y_2 + y_1u_2 + u_1u_2$ – обратим, тогда $(y_1y_2 + u_1y_2 + y_1u_2 + u_1u_2) + u_1u_2 = y_1y_2 + u_1(y_2 + u_2) + (y_1 + u_1)u_2$ также обратим, но $u_1(y_2 + u_2) + (y_1 + u_1)u_2 \in U(S)$, значит, операция умножения в $Y(S)$ замкнута, $Y(S)$ – подполукольцо в S.

Будем говорить, что полукольцо S является *Y-полукольцом* (*Z-полукольцом*), если $Y(S) = S$ ($Z(S) = S$).

Следующее утверждение очевидно:

Предложение 4. *Подмножество Z(S) U-полукольца S является подполукольцом в S.*

Пример 2. Полукольцо, являющееся D-полукольцом, но не являющееся Z-полукольцом.

Рассмотрим прямое произведение множества элементов с неотрицательной стандартной частью нестандартного расширения множества действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и множества многочленов над $\boldsymbol{R}$ с нулевым свободным членом $F = \{a \in {}^*\boldsymbol{R}^+ | st(a) \geq 0\} \times \{b_1x + \ldots + b_nx^n,\ b_i \in R,\ b_i \geq 0\}$ с операциями $(a, b_1x + \ldots + b_nx^n)(c, d_1x + \ldots + d_nx^n) = (ac,\ (b_1x + \ldots + b_nx^n)(d_1x + \ldots + d_nx^n) + st(a)(d_1x + \ldots + d_nx^n) + (b_1x + \ldots + b_nx^n)\, st(c))$ и покоординатным сложением. Легко проверить, что F – полукольцо. В нем обратимые элементы – это элементы с нулевой второй координатой и ненулевой первой координатой. Элементы, обладающие противоположным, – элементы вида $(a,0)$, $st(a)=0$.

В этом примере $Z(S) = Y(S) = X(S)$ – множество элементов, обладающих противоположным.

Пример 3. Полукольцо, являющееся Y-полукольцом, но не являющееся положительным полукольцом.

Рассмотрим множество непрерывных функций $F = \{ f : [0,1] \to R \mid \exists \varepsilon > 0, \forall x \in [0, \varepsilon], f(x) \geq 0 \}$. В нем обратимые функции – это функции, принимающие в каждой точке [0,1] положительное значение. Функции, обладающие противоположным элементом, суть функции, принимающие нулевое значение в некоторой полуокрестности 0. Полукольцо F является Y-полукольцом, поскольку все его элементы – ограниченные функции. Однако не любая сумма положительной функции и функции принимающей на некоторой окрестности нуля нулевое значение положительна. Поэтому F не является положительным полукольцом.

В этом примере $Z(S) = Y(S) \supset X(S) = r(S)$.

Пример 4. Построим Z-полукольцо, не являющееся Y-полукольцом. Пусть $F = \{a \in {}^*R^+ | n > st(a) \geq n-1,\ n \in N\} \times \{b_1x + \ldots + b_nx^n,\ b_i \in R\}$ Обратимыми здесь будут те же элементы, что и в примере 2, поэтому новое полукольцо не будет Y полукольцом, однако для каждого элемента f найдется такой элемент g, что $f + g$ обратим.

Здесь $Z(S) \supset Y(S) = X(S)$.

Пример 5. Приведем пример U-полукольца S, для которого $Z(S) \supset Y(S) \supset X(S)$. Пусть $S = F_1 \times F_2$ с покоординатными операциями, где F_1 – полукольцо, описанное в примере 3, а F_2 – полукольцо, описанное в примере 4. Очевидно, что $X(F_1 \times F_2) = X(F_1) \times X(F_2)$, $Y(F_1 \times F_2) = Y(F_1) \times Y(F_2)$, $Z(F_1 \times F_2) = Z(F_1) \times Z(F_2)$. Поскольку $Z(F_1) \supset Y(F_1)$, то $Z(F_1 \times F_2) \supset Y(F_1 \times F_2)$. Аналогично, из $Y(F_2) \supset X(F_2)$ следует $Y(F_1 \times F_2) \supset X(F_1 \times F_2)$.

Предложение 5. *Пусть S – U-полукольцо и I – полукольцевой идеал в S, тогда для каждого фиксированного элемента $s \in S$ множество $P(s, I) = \{ p \in U(S) : \exists t \in U(S), (ps)\sigma(I)(st) \}$ является подполутелом в U.*

Доказательство. Покажем замкнутость операций в $P(s, I)$. Берем p_1, $p_2 \in P(s, I)$; это означает, что $[(p_1s)\sigma(I)(st_1)] \wedge [(p_2s)\sigma(I)(st_2)]$ для подходящих t_1, t_2. Из дистрибутивности следует, что $((p_1 + p_2)s)\sigma(I)(s(t_1 + t_2))$, что доказывает замкнутость сложения. Замкнутость умножения. Тогда существуют такие элементы $\exists j_1, j_2, i_1, i_2 \in I$, что $p_1(p_2s + j_1) = p_1(st_2 + i_1) = p_1st_2 + i_2 \wedge p_1(p_2s + j_1) = p_1p_2s + j_2$, откуда $p_1p_2s + j_2 = p_1st_2 + i_2$. Аналогично, $p_1st_2 + j_3 = st_1t_2 + i_3$ для некоторых i_3, $j_3 \in I$, следовательно, $p_1p_2s + j_2 + j_3 = st_1t_2 + i_2 + i_3$. Поэтому умножение замкнуто. Операция взятия обратного элемента. Для элемента $p \in p(s, I)$ и некоторых i_1, j_1, $j_2 \in I$, $t \in U(S)$ выполняются равенства $p^{-1}(ps + i_1) = p^{-1}(st + j_1) = p^{-1}st + j_2$. Поэтому $\exists i$, $s + i = p^{-1}st + j_2$. Умножив последнее равенство на t^{-1} справа, получим $(p^{-1}s)\sigma(I)(st^{-1})$. Значит, операция взятия обратного элемента также замкнута.

Примечания

1. *Вечтомов, Е. М.* Кольца, допускающие полукольцевое расширение при помощи полутела [Текст] / Е. М. Вечтомов, М. А. Лукин // Вестник ВятГГУ.

Информатика. Математика. Язык. Вып. 3. 2005. С. 128–131.

2. *Лукин, М. А.* О строении колец, входящих в полукольцевое дизъюнктное объединение с данным полутелом [Текст] / М. А. Лукин // Труды международной конф. «Современные методы физико-математических наук». Т. 1. Орел: Изд-во ОГУ, 2006. С. 188–191.

3. *Вечтомов, Е. М.* Две общие структурные теоремы о полумодулях [Текст] / Е. М. Вечтомов // Абелевы группы и модули. Вып. 15. Томск: Томский гос. ун-т, 2000. С. 17–23.

В. А. Онегов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ. ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ И РЕАЛИЗАЦИИ

Математические модели, как правило, представляют собой дифференциальные уравнения или их системы. Компьютерной реализации математической модели предшествует дискретизация математической модели. На этом этапе создается вычислительная модель, адекватная математической. Основной характеристикой вычислительной модели является аппроксимация. В статье формализуется понятие аппроксимации. При проведении численного эксперимента важным оказывается выбор параметра, характеризующего качество аппроксимации. Априорное исследование выбора значений этого параметра нетривиально. Неудачный выбор приводит к искаженному результату, а в некоторых случаях даже к «переполнению». В работе приведено полное исследование на аппроксимацию и численную устойчивость двух моделей, входящих в структуру курса «компьютерное моделирование».

Основным методологическим приемом информатики является построение и анализ математических моделей изучаемых явлений, систем и т. п. Как правило, математические модели динамических систем представляют собой дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений. Математическое исследование таких объектов (особенно в нелинейных случаях) не всегда удается осуществить в необходимом объеме. Возможным выходом из положения может стать организация вычислительного эксперимента. Поскольку дифференциальные уравнения или их системы представляют собой непрерывные объекты, то организации вычислительного эксперимента предшествует этап создания вычислительной модели, адекватной математической. Таким образом, вычислительная модель представляет собой дискретный аналог непрерывной математической модели. Ясно, что к вычислительной модели предъявляются определенные требования, выполнение которых позволяет говорить о том, что она действительно представляет математическую модель, а решения вычислительной модели можно считать решениями (приближенными) математической. В настоящей статье рассматриваются основные требования к вычислительным моделям и разбираются две конкретных модели, входящие в структуру образовательной дисциплины «Математические модели в естествознании и их исследование».

Пусть в качестве математической модели выступает система дифференциальных уравнений:

$$L_i(U_1, U_2, \ldots, U_n) = f_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

В выражениях (1) приняты обозначения: $U_1 = U_1(X, t), \ldots, U_n = U_n(X, t)$ – решения системы, $f_1 = f_1(X, t), \ldots, f_n = f_n(X,t)$ – заданные функции, L_i – дифференциальные операторы, $X = (x_1, \ldots, x_m) \in D \subset R^m$, $t \in [0; T]$. Прямое произведение D на $[0; T]$ обозначим Q ($Q = D^*[0; T]$). Предполагаем, что дифференциальные операторы заданы на множестве функций, имеющих все непрерывные производные, входящие в эти операторы. Множество значений операторов – непрерывные на Q функции.

Обычно дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений дополняются начальными условиями или (и) граничными (краевыми) условиями. Вид граничных условий (если они есть) будем указывать отдельно.

Построение вычислительной модели начинается с дискретизации множества Q. Множество Q заменяется множеством $Q_{h,\tau} = \{(X^{(k)}, t_j)\} \subset Q$, то есть множеством дискретных точек из Q. Параметр h – наибольшее расстояние между двумя соседними точками $X^{(k)} \in D$, а τ – наибольшее расстояние между t_j и t_{j+1} (соседние точки из $[0; T]$). Множество $Q_{h,\tau}$ называют иногда сеткой, а точки, ее образующие, – узлами сетки. Тогда h и τ характеризует плотность сетки: чем значение этих параметров меньше, тем плотнее сетка. Предположим, что общее количество узлов равно N.

Замечание 1. Как правило, строят регулярную сетку. Сетка называется регулярной, если по каждой переменной x_i выбирается фиксированный шаг h_i, то есть $x_i^{(k)} = x_i^{(0)} + k \cdot h_i$. В этом случае $h = max\{h_i\}$ $(I = 1, \ldots, m)$. Аналогично выбираются точки t_j, то есть $t_j = t_0 + j \cdot \tau$ (эти точки – равноотстоящие).

Затем в N_1 узле сетки (множество внутренних узлов $Q_{h,\tau}^{(0)}$) все производные в операторах L_i заменяются некоторыми линейными комбинациями значений неизвестных функций U_i в ряде соседних узловых точках. В результате такой замены вместо дифференциальных операторов получаются дискретные операторы

$$L_{h,\tau,i}(U_{h,\tau,1}, \ldots, U_{h,\tau,n}),\ i = 1, \ldots, n.$$

Эти операторы заданы на множестве сеточных функций $U_{h,\tau,j}$. Каждая сеточная функция –

ОНЕГОВ Владислав Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой прикладной математики ВятГГУ
© Онегов В. А., 2007

таблица значений функции $U_i(X, t)$, вычисленных в узлах сетки $Q_{b,\tau}$.

В результате выполнения описанных процедур системе дифференциальных уравнений ставится в соответствие система скалярных (обычно нелинейных) уравнений

$$L_{b,\tau,i}(U_{b,\tau,1}, \ldots, U_{b,\tau,n}) = f_{b,\tau,i},\ i = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

При этом количество неизвестных равно $n \cdot N$, а количество уравнений – $n \cdot N_1$. Таким образом, не хватает $n \cdot (N - N_1)$ уравнений. Обычно недостающие уравнения строят, используя начальные и граничные условия и опираясь на специфику конкретной дифференциальной задачи. Окончательно, дискретизация и учет начальных и граничных условий приводят к системе из $n \cdot N$ уравнений с $n \cdot N$ неизвестными.

Встает вопрос о том, можно ли по решению дискретной задачи (системы) судить о качестве решений дифференциальной задачи. Введем понятие аппроксимации. С этой целью рассмотрим несколько предварительных понятий. Поскольку сеточные функции представляют собой таблицы (векторы), постольку для их измерения можно воспользоваться любой векторной нормой [1]. В нашем случае удобно взять первую векторную норму, так как она согласуется с естественной нормировкой непрерывных функций.

Если считать, что все узловые точки сетки $Q_{b,\tau}^{(0)}$ некоторым образом упорядочены, то каждой из них можно поставить в соответствие свой порядковый номер. Этот же номер присваиваем каждому значению в таблице $U_{b,\tau,j}$. Результат – каждая сеточная функция $U_{b,\tau,j}$ ($j = 1, \ldots, n$) может рассматриваться как вектор $\{U^{(l)}{}_{b,\tau,j}\}$, $l = 1, \ldots, N_1$. Тогда первая норма вектора (норма сеточной функции $U_{b,\tau,j}$) определяется так:

$$\left\|U_{h,\tau,j}\right\| = \max_{l} \left|U^{(l)}{}_{h,\tau,j}\right| .$$

Поскольку норма непрерывной на Q функции $U_j(X, t)$ задается равенством:

$$\left\|U_j\right\| = \max_{(X,t)\in Q} \left|U_j(X,t)\right| ,$$

постольку, переходя к пределу при $h \to 0$ и $\tau \to 0$, имеем

$$\left\|U_{h,\tau,j}\right\| \xrightarrow[h\to 0,\tau\to 0]{} \left\|U_j\right\| .$$

В этом заключается согласование норм сеточной функции $U_{b,\tau,j}$ и непрерывной функции U_j.

Так как решение системы (2) – это n сеточных функций $U_{b,\tau,j}$, $j = 1, \ldots, n$, то можно рассматривать его как n-мерный вектор $U_{b,\tau}$, а норму определить так:

$$\left\|U_{h,\tau}\right\| = \max_{1\le j\le n} \left\|U_{h,\tau,j}\right\| .$$

Обозначим $U^*(X, t)$ точное решение задачи (1). Ясно, что $U^*(X, t)$ – n-мерный вектор с компонентами $U^*_j(X, t)$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение 1. Дискретный оператор $L_{b,\tau,i}$ аппроксимирует дифференциальный оператор L_i на точном решении задачи (1) $U^*(X, t)$, если имеет место соотношение:

$$\left\|L_i(U^*) - L_i(U^*{}_{h,\tau})\right\| \xrightarrow[h\to 0,\tau\to 0]{} 0 .$$

Значения оператора $L_i(U^*)$ рассматриваются только в узлах сетки $Q^{(0)}_{b,\tau}$.

Определение 2. Если имеет место аппроксимация при всех значениях $i = 1, \ldots, n$ для всех операторов задачи (1), то задача (2) аппроксимирует задачу (1) на точном решении задачи (1) $U^*(X, t)$.

Замечание 2. Вообще говоря, этими определениями аппроксимации можно пользоваться только в случаях, когда начальные и граничные условия в задаче (2) учитываются точно. Если это не так, то только что данные определения необходимо дополнить аналогичными определениями аппроксимации операторов, входящих в граничные и начальные условия.

Определение 3. Задача (2) аппроксимирует задачу (1) с порядками α и β, если на точном решении задачи (1) $U^*(X, t)$ имеет место:

$$\left\|L_i(U^*) - L_{h,\tau,i}(U^*{}_{h,\tau,i})\right\| \le C_1 \cdot h^{\alpha} + C_2 \cdot \tau^{\beta}$$

при всех $i = 1, \ldots, n$.

В последнем неравенстве C_1 и C_2 – константы.

Таким образом, любая предложенная вычислительная модель в обязательном порядке должна быть исследована на аппроксимацию. Если нет аппроксимации математической модели, то вычислительная модель должна быть отвергнута. Установление факта аппроксимации с порядком значительно сложнее, чем просто аппроксимации.

Из аппроксимации, особенно из аппроксимации с порядками α и β, часто удается установить наличие сходимости решения задачи (2) к решению задачи (1), то есть соотношения:

$$\left\|U^*{}_{h,\tau} - U_{h,\tau}\right\| \xrightarrow[h\to 0,\tau\to 0]{} 0 .$$

В последнем выражении введено обозначение $U_{b,\tau}$ – решение задачи (2).

Если удается установить неравенство:

$$\left\|U^*{}_{h,\tau} - U_{h,\tau}\right\| \le A_1 \cdot h^{\alpha} + A_2 \cdot \tau^{\beta} , \quad (3)$$

A_1, A_2 – константы,

то говорят об оценке погрешности с порядками α и β.

Конечно, установление факта сходимости и, тем более, установление оценки погрешности достаточно сложно и во многом опирается на специфику математической модели (1) и наследуемой ее (при наличии аппроксимации) вычислительной модели.

Предположим, что построенная вычислительная модель (2) аппроксимирует задачу (1). В этом

случае встает вопрос о методе решения задачи (2). Иногда этот метод элементарен. Однако в общем случае идет речь о методе решения системы уравнений (нелинейных) с большим количеством неизвестных. Для каждой вычислительной модели выбирается свой численный метод решения, исследование которого и реализация не тривиальны. В предложенных нами примерах эти трудности преодолеваются достаточно просто.

Важным вопросом при решении задачи (2) является вопрос выбора основных характеристик вычислительной модели параметров h и τ. Установление факта аппроксимации и даже получение оценки погрешности (3) не дают способа выбора этих параметров («они должны быть малы»). Выбор конкретных значений h и τ иногда приводит к неожиданному (отрицательному) эффекту, суть которого в получении приближенного решения, не соответствующего качеству решения задачи (1). Этот эффект будем называть неустойчивостью, а его проявления рассмотрим на конкретных примерах.

Модель 1. Динамика однородной популяции.

Пусть $U(t)$ – численность однородной популяции в момент времени t. В качестве математической модели изменения численности популяции возьмем известную [2], [3] модель Ферхюльста – Пирла:

$$\frac{dU}{dt} = k \cdot U - b \cdot U^2 , \; U(0) = Q. \qquad (4)$$

Модель (4) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием (задача Коши). Коэффициент k – коэффициент рождаемости (обобщенная характеристика всех положительных факторов, влияющих на развитие популяции), b – коэффициент смертности (учет отрицательных факторов). Дифференциальным оператором в модели (4) является один оператор:

$$L(U) \equiv \frac{dU}{dt} - k \cdot U + b \cdot U^2 .$$

Численная реализация модели (4) состоит в построении вычислительной модели, связанной с методами (численными) решения задачи Коши. Предположим, что нас интересует решение задачи (4) при $t \in [0; T]$. Выбрав некоторое значение шага τ, заменим отрезок $[0; T]$ множеством узлов:

$$\{t_j = j \cdot \tau\}, \; j = 0, \ldots, N.$$

В каждом узле t_j имеем:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{U(t_{j+1}) - U(t_j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{d^2U}{dt^2}(\xi_j) . \qquad (5)$$

Ясно, что последнее равенство справедливо только в предположении существования на $[0; T]$ непрерывной второй производной у функции $U(t)$. Отбрасывая в равенствах (5) остаточные члены, приходим к вычислительной модели:

$$L_\tau(U_\tau) \equiv \frac{U(t_{j+1}) - U(t_j)}{\tau} - k \cdot U(t_j) + b \cdot U^2(t_j) = 0 , \quad (6)$$

$j = 0, 1, \ldots, N - 1$, функция U_τ – вектор $\{U(t_j)\}$.

В предположении, что решение задачи (4) обладает указанной выше гладкостью, вычислительная модель (6) аппроксимирует математическую модель (4), и даже с порядком $\beta = 1$.

Система (6) представляет собой рекуррентное соотношение:

$$U_{j+1} = U_j \cdot [1 + \tau \cdot (k - b \cdot U_j)], \quad U_0 = Q, \; j = 0, 1, \ldots, N - 1. \qquad (7)$$

Вопрос о сходимости значений U_j, полученных по формулам (7) (решение вычислительной модели), к решению $U^*(t_j)$ задачи (4) исследуем следующим образом. Имеем интегральное тождество, соответствующее уравнению (4):

$$U^*(t_{j+1}) = U^*(t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(U^*(t))dt, \; f(U^*) = U^* \cdot (k - b \cdot U^*). \qquad (8)$$

Равенство (7) на j-м шаге получается из (8) заменой интеграла в правой части на квадратуру левых прямоугольников [4], погрешность которой определяется остаточным членом:

$$R(f) = \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{dU^*}{dt} \cdot (k - 2b \cdot U^*) . \qquad (9)$$

В формуле (9) значение в правой части вычисляется в некоторой точке ζ_j. Таким образом, установили факт сходимости решения задачи (6) (или (7)) к решению задачи (4) при $\tau \to 0$, и, кроме того, получили погрешность этого решения на одном шаге (9).

Если в равенстве (9) заменить $\frac{dU^*}{dt}$ на выражение, стоящее в правой части уравнения (4), то получим следующее представление остаточного члена:

$$R(f) = \frac{\tau^2}{2} \cdot U^* \cdot (k - b \cdot U^*) \cdot (k - 2b \cdot U^*).$$

Рассматривая функцию $g(U) = U \cdot (k - b \cdot U) \cdot (k - 2b \cdot U)$, легко установить, что максимальное значение ее абсолютной величины достигается в двух точках:

$$U_{1,2} = \frac{k}{b} \cdot \frac{\sqrt{3} \pm 1}{2\sqrt{3}} ,$$

и поэтому имеет место равенство:

$$|g(U)| = -g(U_1) = g(U_2) = \frac{k^3}{b} \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}} .$$

Таким образом, на каждом шаге j ($j = 0, 1, \ldots, N-1$) можно пользоваться оценкой остаточного члена:

$$|R(f)| \le \frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{k^3}{b} \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}} ,$$

которая одновременно и есть оценка погрешности решения вычислительной модели.

Решение дифференциального $U^*(t)$ уравнения (4) обладает асимптотическим свойством:

$$U^*(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \overline{U} = \frac{k}{b}$$

при любом начальном значении $Q > 0$. Решение $\overline{U}$ называется стационарным. Ясно, что этим же свойством должно обладать и решение вычислительной модели (7), то есть $U_j \xrightarrow[j\to\infty]{} \overline{U}$. Однако это не всегда так.

Положим $k = 10$, а $b = 0{,}5$ и проделаем несколько вычислительных экспериментов, результаты которых сведем в табл. 1. В этом примере $\overline{U} = 20$.

Анализ табл. 1 показывает, что произвольный выбор параметра τ часто приводит к результату, не имеющему никакого отношения к решению непрерывной задачи (4). Каким же должен быть параметр τ?

Решением задачи (4) является функция, которая, непрерывно изменяясь, стремится к асимптотическому значению $\overline{U}$. При этом не существует ни точек минимума, ни точек максимума при $t \in [0; T]$ ($Q \neq 0$). Это говорит о том, что график этой функции не пересекает прямой $U = \overline{U}$. Таким образом, если $Q > \overline{U}$, то значения функции приближаются к $\overline{U}$ сверху, а если $Q < \overline{U}$ – снизу. При $Q = \overline{U}$ функция постоянна $U \equiv \overline{U}$. Из табл. 1 видно, что при $\tau = 0.2$ и $\tau = 0.1$ это приближенное решение ведет себя не так. Будем выбирать параметр τ таким образом, чтобы качественное поведение решения вычислительной модели (6) согласовалось с поведением точного решения задачи (4). Рассмотрим два случая.

1. Если $Q > \overline{U}$, то $U_{j+1} = U_j \cdot (1 + \tau \cdot b \cdot (\overline{U} - U_j)) > \overline{U}$ при всех значениях j. В силу монотонного убывания U_j достаточно, чтобы последнее неравенство выполнялось при $j = 0$. Отсюда имеем

$$\tau \cdot b \cdot Q \cdot (\overline{U} - Q)) > \overline{U} - Q,\ \tau < \frac{1}{b \cdot Q} \cdot$$

2. При $Q < \overline{U}$ имеем $\tau \cdot b \cdot Q \cdot (\overline{U} - U_j)) < \overline{U} - Q$, поэтому получаем то же самое неравенство для τ.

Таким образом, в рассмотренном примере хорошие результаты следовало ожидать лишь при $\tau < \frac{1}{15}$ ($Q = 30$) и $\tau < \frac{1}{5}$ ($Q = 10$), что и подтверждает табл. 1.

Модель 2. Теплопроводность ограниченного стержня.

Стержень – абстракция физического стержня, свойства которого изотропны в любом его сечении перпендикулярной плоскостью. В этом случае температура стержня в любой точке такого сечения одинакова, поэтому температура зависит только от одной пространственной координаты x.

Пусть $U(x, t)$ – температура стержня в точке $x \in [0; 1]$ (единичный стержень) в момент времени t. Математическая модель, которая описывает распределение температуры в единичном стержне, такова [5]:

$$L(U) \equiv \frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad (11)$$

Кроме того, считаем, что в начальный момент времени распределение температуры в стержне задано равенством:

$$U(x, 0) = \varphi(x), \qquad (12)$$

а на краях стержня поддерживается постоянная температура:

$$U(0, t) = U(1, t) = 0. \qquad (13)$$

Таким образом, полная математическая модель представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа (11) с начальным условием (12) и краевыми условиями (13). Множество, на котором определено решение этой задачи: $Q = [0; 1] * [0; T]$.

Выбирая параметры h и τ, построим в множестве Q два семейства параллельных прямых:

$$X = x_k = k \cdot h,\ k = 0, \ldots, N,$$

$$T = t_j = j \cdot \tau,\ j = 0, \ldots, [\frac{T}{\tau}].$$

Таблица 1

t	Q = 30				Q = 10			
	Точное	τ = 0.2	τ = 0.1	τ = 0.01	Точное	τ = 0.2	τ = 0.1	τ = 0.01
0.0	30.000	30.000	30.000	30.000	10.000	10.000	10.000	10.000
0.1	22.795	0.000	15.000	22.536	17.616	20.000	15.000	14.668
0.2	20.945	0.000	18.750	20.809	19.051	20.000	18.750	17.709
0.3	20.338	0.000	19.922	20.274	19.640	20.000	19.922	19.130
0.4	20.123	0.000	20.000	20.095	19.866	20.000	20.000	19.687
0.5	20.017	0.000	20.000	20.033	19.951	20.000	20.000	19.889
0.6	20.006	0.000	20.000	20.011	19.982	20.000	20.000	19.961
0.7	20.002	0.000	20.000	20.004	19.993	20.000	20.000	19.986
0.8	20.001	0.000	20.000	20.001	19.998	20.000	20.000	19.995
0.9	20.000	0.000	20.000	20.000	19.999	20.000	20.000	19.998
1.0	20.000	0.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	19.999

При пересечении этих двух взаимно перпендикулярных семейств прямых образуется множество дискретных точек (x_k, t_j) (узлов). Множество Q заменяется множеством $Q_{b,\tau} = \{(x_k, t_j)\}$.

В каждом внутреннем узле имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U(x_k, t_{j+1}) - U(x_k, t_j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_k, \xi_j), \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U(x_{k-1}, t_j) - 2 \cdot U(x_k, t_j) + U(x_{k+1}, t_j)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x^2}(\varsigma_k, t_j). \quad (15)$$

Внутренними узлами являются все узлы (x_k, t_j) из $Q_{b,\tau}$ при $k = 1, \ldots, N-1$, и $j = 0, \ldots, [\frac{T}{\tau}] - 1$.

Отбрасывая в (14) и (15) остаточные члены, приходим к вычислительной модели (системе уравнений) [6]:

$$L_{h,\tau}(U_{h,\tau}) \equiv \frac{U_{k,j+1} - U_{k,j}}{\tau} - a^2 \cdot \frac{U_{k-1,j} - 2 \cdot U_{k,j} + U_{k+1,j}}{h^2} = f(x_k t_j) \quad (16)$$

Количество уравнений в (16) – количество внутренних точек, то есть $(N-1) \cdot [\frac{T}{\tau}]$. Всего же неизвестных $U_{k,j}$ – $(N+1) \cdot ([\frac{T}{\tau}] + 1)$. Дефицит уравнений исчезает, если к уравнениям (16) добавить $N+1$ начальное условие:

$$U_{k,0} = \varphi(x_k), \; k = 0, \ldots, N, \quad (17)$$

и $2 \cdot [\frac{T}{\tau}]$ граничных условия:

$$U_{0,j} = U_{N,j} = 0, \; j = 1, \ldots, [\frac{T}{\tau}]. \quad (18)$$

Окончательно вычислительная модель – система (16) с условиями (17), (18). Система (16) представляет собой рекуррентные соотношения, которые позволяют по известному решению на j-м временном слое ($t = t_j$) находить решение на $(j+1)$-м слое. Значения решения на нулевом слое заданы равенством (17). На границах стержня решения постоянны на всех временных слоях и задаются равенствами (18). Тогда систему (16) разрешить относительно $U_{k,j+1}$:

$$U_{k,j+1} = \frac{a^2\tau}{h^2} \cdot U_{k-1,j} + (1 - 2 \cdot \frac{a^2\tau}{h^2}) \cdot U_{k,j} + \frac{a^2\tau}{h^2} \cdot U_{k+1,j} + \tau \cdot f(x_k, t_j) \quad (19)$$

при $k = 1, \ldots, N-1$, $j = 0, \ldots, [\frac{T}{\tau}] - 1$.

Схема (19) фактически задает метод решения системы (16) – зная решение на нулевом временном слое, находим решение на первом и т. д.

Отметим, что в рассматриваемой модели начальное и граничные условия учитываются точно. Тогда аппроксимация зависит только от аппроксимации дифференциального оператора. Так как

$$|L(U^*) - L_{b,\tau}(U^*_{b,\tau})| \le \frac{\tau}{2} \cdot M_{2,t} + \frac{h^2}{12} \cdot M_{4,x}, \quad (20)$$

причем левая часть рассматривается на внутренних узлах сетки, то аппроксимация имеет место с порядком $\alpha = 2$, а $\beta = 1$. В неравенстве (20) использованы обозначения:

$$M_{2,t} = Max\left|\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2}\right|, M_{4,x} = Max\left|\frac{\partial^4 U^*}{\partial x^4}\right|.$$

Чтобы установить сходимость решения задачи (16) – (18) к решению задачи (11) – (13), докажем несколько утверждений.

Лемма 1. Если $L_{b,\tau}(U_{b,\tau}) \ge 0$, $U_{k,0} \ge 0$, $U_{0,j} = U_{N,j} = 0$ и, кроме того, выполнено неравенство $1 - 2 \cdot \frac{a^2\tau}{h^2} \ge 0$, то $U_{b,\tau} \ge 0$.

Доказательство. Так как $L_{b,\tau}(U_{b,\tau}) \ge 0$, то

$$U_{k,j+1} \ge \frac{a^2\tau}{h^2} \cdot (U_{k-1,j} + U_{k+1,j}) + (1 - 2 \cdot \frac{a^2\tau}{h^2}) \cdot U_{k,j}.$$

Поскольку $U_{k,0} \ge 0$, то из предыдущего неравенства непосредственно следует, что $U_{k,1} \ge 0$. Установлена база для полной индукции. Из предположения, что $U_{k,j} \ge 0$ следует справедливость неравенства $U_{k,j+1} \ge 0$. Лемма доказана.

Следствие. Если $L_{b,\tau}(U_{b,\tau}) \le 0$, $U_{k,0} \le 0$, $U_{0,j} = U_{N,j} = 0$ и, кроме того, выполнено неравенство $1 - 2 \cdot \frac{a^2\tau}{h^2} \ge 0$, то $U_{b,\tau} \le 0$.

Лемма 2. Пусть $\hat{U}_{h,\tau}$ решение задачи:

$$L_{h,\tau}(\hat{U}_{h,\tau}) = |f(x_k, t_j)|, \; \hat{U}_{k,0} = |\varphi(x_k)|, \; \hat{U}_{0,j} = \hat{U}_{N,j} = 0.$$

Тогда $|U_{h,\tau}| \le \hat{U}_{h,\tau}$, где $U_{b,\tau}$ – решение задачи (16) – (18).

Доказательство. Сначала отметим, что по лемме 1 $\hat{U}_{h,\tau} \ge 0$. В силу линейности оператора $L_{b,\tau}$ имеем

$$L_{h,\tau}(\hat{U}_{h,\tau} - U_{h,\tau}) = |f(x_k, t_j)| - f(x_k, t_j) \ge 0,$$
$$\hat{U}_{h,\tau} - U_{h,\tau} = |\varphi(x_k)| - \varphi(x_k) \ge 0, \quad (21)$$
$$\hat{U}_{0,j} - U_{0,j} = \hat{U}_{N,j} - U_{N,j} = 0.$$

По лемме 1 отсюда следует, что $\hat{U}_{h,\tau} - U_{h,\tau} \ge 0$, то есть $U_{h,\tau} \le \hat{U}_{h,\tau}$.

Линейность оператора $L_{b,\tau}$ приводит к неравенствам

$$L_{h,\tau}(-\hat{U}_{h,\tau} - U_{h,\tau}) = -|f(x_k, t_j)| - f(x_k, t_j) \le 0,$$
$$-\hat{U}_{h,\tau} - U_{k,\tau} = -|\varphi(x_k)| - \varphi(x_k) \le 0.$$

Кроме того, выполнены равенства (21). По следствию к лемме 1 имеем $-\hat{U}_{h,\tau} - U_{h,\tau} \le 0$, то есть $U_{h,\tau} \ge -\hat{U}_{h,\tau}$. Из установленных двух неравенств следует утверждение леммы.

Теорема 1. В предположении дважды непрерывной дифференцируемости по t и четырежды по x точного решения $U^*_{b,\tau}$ задачи (11) – (13) имеет место оценка погрешности:

$$\left|U^*_{h,\tau} - U_{h,\upsilon}\right| \le \frac{\frac{\tau}{2}\cdot M_{2,t} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot M_{4,x}}{h\cdot(1-h)+2a^2}\cdot \cdot (1+t_j)\cdot x_k\cdot(1-x_k), \qquad (22)$$

где $M_{2,t} = Max\left|\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2}\right|, M_{4,x} = Max\left|\frac{\partial^4 U^*}{\partial x^4}\right|$, $j = 1, \ldots, [\frac{T}{\tau}]$, $k = 0, \ldots, N$.

Кроме того, имеет место оценка

$$\left\|U^*_{h,\tau} - U_{h,\tau}\right\| \le \frac{\frac{\tau}{2}\cdot M_{2,t} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot M_{4,x}}{h\cdot(1-h)+2a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+T). \qquad (23)$$

Доказательство. Для разности $U^*_{b,\tau} - U_{b,\tau}$ имеем

$$L_{h,\tau}(U^*_{h,\tau} - U_{h,\tau}) = -\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot\frac{\partial^4 U^*}{\partial x^4}.$$

По лемме 2 $|U^*_{b,\tau} - U_{b,\tau}| \le E_{b,\tau}$, где $E_{b,\tau}$ – решение задачи:

$$L_{b,\tau}(E_{b,\tau}) = \frac{\tau}{2}\cdot M_{2,t} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot M_{4,x},$$
$$E_{k,0} = 0,\ E_{0,j} = E_{N,j} = 0.$$

Величины $M_{2,t}$ и $M_{4,x}$ были определены ранее. Возьмем функцию

$$D(x,t) = A\cdot(t+1)\cdot x\cdot(1-x) \ge 0$$

и подберем коэффициент A так, чтобы выполнилось неравенство $D_{b,\tau} \ge E_{b,\tau}$. Имеем $L_{b,\tau}(D_{b,\tau}) = A\cdot x_k\cdot(1-x_k) + 2\cdot A\cdot a^2\cdot(1+t_j)$ (на внутренних узлах). Кроме того, выполняются равенства $D_{k,0} = A\cdot x_k\cdot(1-x_k)$, $D_{0,j} = D_{N,j} = 0$. Требуемое неравенство будет справедливо при выполнении равенства

$$A = \frac{\frac{\tau}{2}\cdot M_{2,t} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot M_{4,x}}{h\cdot(1-h)+2a^2}.$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим значения оператора $L_{b,\tau}$ на функции $E_{b,\tau} - D_{b,\tau}$, то есть

$$L_{b,\tau}(E_{b,\tau} - D_{b,\tau}) = \frac{\tau}{2}\cdot M_{2,t} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot M_{4,x} - A\cdot x_k\cdot(1-x_k) - 2\cdot A\cdot a^2\cdot(1+t_j).$$

При указанном выборе коэффициента A получаем $L_{b,\tau}(E_{b,\tau} - D_{b,\tau}) \le 0$. Кроме того, $E_{k,0} - D_{k,0} \le 0$. По следствию к лемме 1 имеем оценку $E_{b,\tau} \le D_{b,\tau}$. С установлением последнего неравенства утверждение (22) теоремы доказано. Вычисляя максимум функции $(1+t)\cdot x\cdot(1-x)$ при $t \in [0, T]$ и $x \in [0, 1]$, находим, что

$$(1+t)\cdot x\cdot(1-x) \le \frac{1}{2}\cdot(1+T).$$

Поскольку получающееся из (22) неравенство

$$\left|U^*_{h,\tau} - U_{h,\upsilon}\right| \le \frac{\frac{\tau}{2}\cdot M_{2,t} + \frac{a^2\cdot h^2}{12}\cdot M_{4,x}}{h\cdot(1-h)+2a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+T)$$

справедливо для всех значений $U^*_{k,j} - U_{k,j}$, $k = 0, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, [\frac{T}{\tau}]$, то оно верно и для максимума, то есть для $\left\|U^*_{h,\tau} - U_{h,\tau}\right\| = \max\limits_{k,j}\left|U^*_{k,j} - U_{k,j}\right|$. Оценка (23) установлена.

Из доказанной теоремы следует сходимость

$$\left\|U^*_{h,\tau} - U_{h,\tau}\right\| \xrightarrow[h,\tau\to 0]{} 0.$$

Информация о качестве (скорости) сходимости дается неравенствами (22) и (23). Скорость сходимости имеет порядок $O(h^2 + \tau)$.

Замечание. Леммы 1 и 2, а также теорема 1 были доказаны в предположении выполнения неравенства $1 - 2\cdot\frac{a^2\tau}{h^2} \ge 0$. Может показаться, что это очень обременительное требование. Покажем, что это не так.

Теорема 2. Предположим, что вычисления по схеме (19) выполняются точно (без округлений), а на некотором временном слое t_{j_0} в некоторой точке x_{k_0} допущена локальная ошибка δ, затем дальнейшие вычисления проводятся точно. Тогда при выполнении требования $1 - 2\cdot\frac{a^2\tau}{h^2} \ge 0$ при продвижении по временным слоям снизу вверх модуль ошибки не увеличивается.

Доказательство. Обозначим решение, которое получается при точных вычислениях по схеме (19) через $U_{k,j}$, а решение, реализующее описанную ситуацию, – $\overline{U}_{k,j}$. В силу линейности схемы (19) величины $\varepsilon_{k,j} = U_{k,j} - \overline{U}_{k,j}$ являются решениями той же самой системы

$$\varepsilon_{k,j+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}\cdot\cdot(\varepsilon_{k-1,j} + \varepsilon_{k+1,j}) + (1 - 2\cdot\frac{a^2\tau}{h^2}\cdot)\cdot\varepsilon_{k,j}. \qquad (24)$$

Будем пользоваться первой векторной нормой на каждом j-м временном слое:

$$\|\varepsilon\|^{(j)} = \max_k\left|\varepsilon_{k,j}\right|.$$

Так как все $\varepsilon_{k,j} = 0$ при $j \le j_0$, $k \ne k_0$, а $\varepsilon_{k_0,j_0} = \delta$, то $\|\varepsilon\|^{(j)} = 0$, $j < j_0$. На j_0 слое имеем $\|\varepsilon\|^{(j_0)} = |\delta|$. Учитывая требование теоремы ($1 - 2@ \frac{a^2\tau}{h^2} \ge 0$), из (24) получаем очевидное неравенство $\|\varepsilon\|^{(j_0+1)} \le \|\varepsilon\|^{(j_0)} = |\delta|$. И, вообще, $\|\varepsilon\|^{(j)} \le |\delta|$ при всех $j > j_0$. Теорема доказана.

Замечание. Вычислительные схемы, обладающие свойством, подобным свойству, сформулированному в теореме 2, называются численно устойчивыми. Только такими схемами можно пользоваться в вычислительной практике.

Пример. Пусть имеет место ситуация, описанная в теореме 2, но

$$1-2\cdot\frac{a^2\tau}{h^2} < 0.$$

Проведем анализ схемы (19) на устойчивость. Так как приемлемую точность решения системы (19) можно получить только при небольших значениях параметров h и τ, то будем уменьшать оба параметра ($h \to 0$, $\tau \to 0$), но так, чтобы отношение $\frac{a^2\tau}{h^2}$ оставалось постоянным. Пусть $\frac{a^2\tau}{h^2} = 1$. Тогда схема (24) будет иметь вид:

$$\varepsilon_{k,j+1} = (\varepsilon_{k-1,j} + \varepsilon_{k+1,j}) - \varepsilon_{k,j}.$$

Ниже приведена так называемая ε-схема распространения ошибки по временным слоям, в которой приведены только коэффициенты при величине δ. Самый нижний слой – временной слой t_{j_0}. В центре табл. 2 – $\varepsilon_{k_0,j}$.

Если проследить изменения $|\varepsilon_{k_0,j}|$ при $j > j_0 + 3$, то просматривается закономерность: $\frac{|\varepsilon_{k_0,j+1}|}{|\varepsilon_{k_0,j}|} \ge 2{,}7$.

Таким образом, ошибка δ распространяется по таблице в центральной колонке с коэффициентами, ведущими себя как члены геометрической прогрессии со знаменателем $-q$, где $q \ge 2{,}7$.

Поскольку для достижения приемлемой точности необходимо выбирать небольшие значения параметров τ и h, то незначительное продвижение по времени требует большого количества шагов по временным слоям (сотни и тысячи шагов), а это приводит к тому, что небольшая ошибка (например, округления) влечет погрешности, полностью искажающие реальную картину. Реализация вычислительных схем, подобных рассмотренной, на компьютере, как правило, приводит к переполнению.

Теорема 2 и рассмотренный пример позволяет сделать вывод относительно устойчивости схемы (16). Она устойчива при $\tau \le \frac{h^2}{2\cdot a^2}$ и неустойчива при $\tau > \frac{h^2}{2\cdot a^2}$.

Примечания

1. *Фаддеев, Д. К.* Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. М.: Физматгиз, 1960. С. 656.

2. *Арнольд, В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели [Текст] / В. И. Арнольд. М.: МЦНМО, 2000. С. 32.

3. *Горстко, А. Б.* Познакомьтесь с математическим моделированием [Текст] / А. Б. Горстко. М.: Знание, 1991. С. 244.

4. *Мысовских, И. П.* Лекции по методам вычислений [Текст] / И. П. Мысовских. М.: Физматгиз, 1962. С. 344.

5. *Петровский, И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными [Текст] / И. Г. Петровский. М.: Физматгиз, 1961. С. 400.

6. *Березин И. С.* Методы вычислений [Текст] : т. 2 / И. С. Березин, Н. И. Жидков. М.: Физматгиз, 1960. С. 620.

Таблица 2

414	–882	1554	–2304	2907	–3139	2907	–2304	1554	–882	414
–112	266	–504	784	–1016	1107	–1016	784	–504	266	–112
28	–77	161	–266	357	–393	357	–266	161	–77	28
–6	21	–50	90	–126	141	–126	90	–50	21	–6
1	–5	15	–30	45	–51	45	–30	15	–5	1
0	1	–4	10	–16	19	–16	10	–4	1	0
0	0	1	–3	6	–7	6	–3	1	0	0
0	0	0	1	–2	3	–2	1	0	0	0
0	0	0	0	1	–1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	δ	0	0	0	0	0

Л. В. Панкратова

МЕТОД СРЕДНИХ КАК ЭФФЕКТИВНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И СРЕДСТВО РАЗВИТИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОГО ИНТЕРЕСА ШКОЛЬНИКОВ

Рассматриваются примеры задач и анализируются различные способы их решения. Демонстрируется эффективность применения свойств среднего степенного для решения подобных задач, указываются основные направления дальнейшей работы с ними.

Интерес к предмету был и остается одним из действенных условий успешности и эффективности процесса обучения: чем выше интерес к предмету, тем активнее идет обучение и тем выше его результаты.

Одним из путей повышения интереса к математике является правильная работа над задачей. Когда задача решена – интерес к ней постепенно пропадает, ответ получен, цель достигнута. Но, как известно, на этом работа над задачей не заканчивается, нужно сделать проверку, попробовать найти другой путь решения, обобщить данную задачу или, наоборот, конкретизировать, добавить другие данные или вопросы. То есть нужно показать, что задача не исчерпалась, существует еще много способов ее видоизменения. Такая всесторонняя работа над задачей является, без сомнения, мощным средством развития интеллектуальных умений школьника, стимулирует развитие самостоятельности, так как требует применения фактов, приемов и методов из различных областей знаний, а также, возможно, чтения дополнительной литературы. У учеников появляется исследовательский и творческий интерес к решенной задаче. Если проводить такую работу систематически, учащиеся не только научатся самостоятельно составлять задачи, но и их знания станут более полными и достаточно глубокими.

Одним из наиболее значимых аспектов математической культуры школьника является техника вычислений и оценок. Необходимо, чтобы учащийся владел различными приемами этой техники, причем не на уровне «слепого» применения, поскольку невозможно помнить все используемые при решении задач «фокусы».

В настоящей работе мы предлагаем вниманию читателя несколько задач, которые, на наш взгляд, наиболее естественно решаются с использованием свойств среднего степенного. Это делает возможным их рассмотрение на соответствующем занятии математического кружка или факультатива. Для каждой задачи мы приводим по крайней мере два способа ее решения, что позволяет оценить их разнообразие и сравнить эффективность. Комментарии и замечания к задачам дают возможность увидеть и другие направления работы с ними.

Задача 1 [5, с. 39]. Доказать, что $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

Решение 1 (см. [5, с. 232]). Пусть $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a$, $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b$, откуда

$$a^3 + b^3 = 6. \qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что $ab^2 + a^2b < a^3 + b^3$ (здесь строгое неравенство, так как $a \neq b$), или $ab(a + b) < a^3 + b^3 = 6$, или

$$3ab(a + b) < 18. \qquad (2)$$

Сложив почленно (1) и (2), получим $(a + b)^3 < 24 = 3 \cdot 8$, откуда $a+b<2\sqrt[3]{3}$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Напомним, что средним степенным порядка x двух положительных чисел a и b называется величина $F(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}, x\neq 0,\\ \sqrt{ab}, x=0.\end{cases}$

Известно, что функция $F(x)$ является возрастающей на всей числовой прямой, то есть для любых $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $F(x_1) \le F(x_2)$, причем $F(x_1) = F(x_2)$ лишь при $a = b$. Воспользуемся этим свойством среднего степенного. Пусть снова $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a$, $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b$. Из монотонности функции $F(x)$ следует, что $F(1) < F(3)$, а это позволяет записать оценку $\dfrac{a+b}{2}<\left(\dfrac{a^3+b^3}{2}\right)^{1/3}=\sqrt[3]{3}$, откуда и получаем требуемое неравенство. Заметим, что $a \neq b$, поэтому знак неравенства строгий.

Задача 2 [5, с. 39]. Доказать, что для любого действительного x имеет место неравенство $a^{2x} \le \dfrac{1}{3}(1+2a^{3x})$, где $a > 0$.

Решение 1 (см. [5, с. 234]). Имеем:

$$\frac{1}{3}(1+2a^{3x})-a^{2x}=\frac{1}{3}(2a^{3x}-3a^{2x}+1)=\frac{1}{3}(2a^{3x}+a^{2x}-4a^{2x}+1)=$$
$$=\frac{1}{3}(a^{2x}(2a^x+1)-(2a^x-1)(2a^x+1))=\frac{1}{3}(2a^x+1)(a^x-1)^2\ge 0.$$

Знак равенства имеет место лишь в двух случаях:

ПАНКРАТОВА Лариса Валерьевна – старший преподаватель кафедры прикладной математики ВятГГУ
© Панкратова Л. В., 2007

1) если $x = 0$, a – любое положительное число;
2) если $a = 1$, a – любое действительное число.

Решение 2. Применим неравенство Коши к положительным числам 1, a^{3x}, a^{3x}. Получим: $\frac{1+2a^{3x}}{3} \ge \sqrt[3]{a^{6x}} = a^{2x}$, что и требовалось доказать. Заметим, что равенство имеет место только тогда, когда $a^{3x} = 1$, что полностью описывается случаями, указанными в первом способе решения.

Решение 3. Воспользуемся «весовым» неравенством Коши для величин 1 и a^{3x} с весами 1/3 и 2/3. Получим: $\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{2}{3}\cdot a^{3x} \ge 1^{\frac{1}{3}} \cdot \left(a^{3x}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{2x}$. При этом равенство описывается только приведенными уже случаями.

Задача 3 [4, с. 203]. Докажите, что $\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} \ge x^4 + y^4$ при любых x и y, отличных от нуля.

Решение 1 (см. [4, с. 203]). Обозначим $x^2 = a$, $y^2 = b$. Тогда

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} - a^2 - b^2 =$$
$$= \frac{(a-b)\cdot a^2}{b} + \frac{(b-a)\cdot b^2}{a} = (a-b)\cdot\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) = \frac{(a-b)\cdot(a^3-b^3)}{ab} \ge 0. \quad (3)$$

Считаем нужным сделать здесь ссылку на комментарий авторов, приведенный там же [4, с. 203]: если f – это некоторая возрастающая функция, то $(a - b)\cdot(f(a) - f(b)) \ge 0$ для любых чисел a и b из области ее определения. Тогда оценка последнего выражения в (3) становится очевидной в силу возрастания функции $f(x) = x^3$ и положительности чисел a и b. Заметим здесь же, что равенство в (3) имеет место лишь в случае, когда $a = b$, что возможно только при $|x| = |y|$.

Решение 2. Разделим обе части данного неравенства на $x^2y^2 > 0$. Получим:

$$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} \ge \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}. \quad (4)$$

Обозначим $\frac{x^2}{y^2} = a$. Тогда (4) можно переписать в виде $a^2 + \frac{1}{a^2} \ge a + \frac{1}{a}$, что равносильно неравенству $\left(a + \frac{1}{a}\right)\cdot\left(a + \frac{1}{a} - 1\right) \ge 2$. Последнее же является очевидным, так как $a + \frac{1}{a} \ge 2$ для положительных значений a, что следует из неравенства Коши. При этом равенство исчерпывается случаем $a = 1$, что полностью описывает результаты предыдущего решения.

Задача 4 [4, с. 208]. Докажите, что $100! < 50^{100}$.

Решение 1. Докажем более общее утверждение: $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ для натуральных чисел n, больших пяти. Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. База индукции проверяется несложно: $6! < 3^6$. Пусть теперь выполняется неравенство $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ для некоторого $n \ge 6$. Покажем, что тогда справедливо и неравенство $(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$. Воспользуемся индукционным предположением:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! < (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Тогда для доказательства индукционного перехода достаточно будет установить, что верно неравенство $(n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}$. Последнее же можно переписать в виде $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \ge 2$, а это немедленно следует из неравенства Бернулли.

Решение 2. Перепишем данное неравенство в виде $\sqrt[100]{100!} < 50$. Заметим, что для чисел 1, 2, ..., 100 левая часть записанного неравенства есть их среднее геометрическое G. Среднее же арифметическое A этих чисел равно 50,5. Воспользуемся одним из уточнений неравенства Коши, приведенным, например, в [1, с. 204]:

$$A_n - G_n \ge \frac{1}{n}\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_n}\right)^2, \quad (5)$$

причем равенство в (5) достигается лишь при условии $a_1 = \ldots = a_n$. В силу (5)

$$A - G = 50{,}5 - \sqrt[100]{100!} > \frac{1}{100}\cdot(1-10)^2 = 0{,}81,$$

откуда $\sqrt[100]{100!} < 50{,}5 - 0{,}81$, что и доказывает данное неравенство.

Задача 5 [5, с. 14]. Доказать, что уравнение $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ имеет единственное решение $x = y = 1$ в целых положительных числах.

Решение 1 (см. [5, с. 97]). Перепишем данное уравнение в таком виде:

$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1 = 3x^2y + 3xy^2 + 3xy$,
или $(x + y)^3 + 1 - 3xy(x + y + 1) = 0$,
откуда $(x + y + 1)\cdot((x + y)^2 - (x + y) + 1) - 3xy(x + y + 1) = 0$,
или $(x + y + 1)\cdot(x^2 - xy + y^2 - x - y + 1) = 0$.

Так как $x > 0$, $y > 0$, то $x + y + 1 \ne 0$, а поэтому $x^2 - (y + 1)\cdot x + (y^2 - y + 1) = 0$. Тогда получа-

ем, что $x=\frac{y+1\pm(y-1)\sqrt{-3}}{2}$. Для того, чтобы x было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы $y-1=0$, откуда $y=1$. Тогда $x=\frac{y+1}{2}=1$. Утверждение задачи доказано.

Решение 2. Перепишем данное уравнение в виде $\frac{x^3+y^3+1}{3}=xy$. Так как $x>0$, $y>0$, то левую часть полученного уравнения можно рассматривать как среднее арифметическое чисел x^3, y^3, 1, а правую часть – как среднее геометрическое этих же чисел. Условия достижения равенства в неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим позволяют нам сделать вывод, что $x^3=y^3=1$, что полностью доказывает утверждение задачи.

Задача 6 [6]. Доказать, что при $a\ge\frac{1}{2},b\ge\frac{1}{2}$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\ge\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}. \qquad (6)$$

Решение 1 (см. [3, с. 22]). Введем в рассмотрение функцию $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ и исследуем ее на выпуклость. Так как $f''(x)=2-\frac{1}{4x^{3/2}}$, то легко получаем, что на промежутке $[\frac{1}{4};\infty)$ рассматриваемая функция выпукла вниз ($f''(x)\ge 0$). Применим теперь неравенство Иенсена $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$ к определенной выше функции $f(x)$, точкам $x_1=a^2$, $x_2=b^2$ и коэффициентам $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ на промежутке $[\frac{1}{4};\infty)$:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{a+b}{2},$$

откуда после несложных преобразований и получим (6).

Решение 2 (см.[3, с. 23]). Снова заменим a^2 на x, b^2 на y. Рассмотрим функцию $\varphi(x,y)=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2-\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}$, где $x\in[\frac{1}{4},\infty)$, $y\in[\frac{1}{4},\infty)$. Условимся считать, что $x\ge y\ge\frac{1}{4}$, и найдем первую частную производную функции $\varphi(x, y)$ по x:

$$\varphi'_x(x,y)=\frac{x-y}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2(x+y)}}+\frac{1}{4\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\left(x-y+\frac{\sqrt{2(x+y)}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{2(x+y)}}\right)=$$
$$=\frac{x-y}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{2(x+y)}\left(\sqrt{2(x+y)}+2\sqrt{x}\right)}\right).$$

Оценим снизу найденную производную: $\varphi'_x(x,y)\ge\frac{x-y}{2}\left(1-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot1\cdot2}\right)=0$. Итак, $\varphi(x, y)$ является неубывающей по x функцией. Поскольку при $x=y=\frac{1}{4}$ $\varphi(x, y)=0$, то $\varphi(x, y)\ge 0$ при $x\ge y\ge\frac{1}{4}$, что дает нам требуемое неравенство.

Решение 3. Заметим, что правая часть (6) есть не что иное, как разность среднего квадратического и среднего арифметического чисел a и b (R_2 и A_2 соответственно). Для двух положительных чисел известно следующее неравенство, связывающее средние геометрическое (G_2), арифметическое (A_2) и квадратическое (R_2):

$$A_2 - G_2 \ge R_2 - A_2. \qquad (7)$$

Доказательство (7) можно найти в [2, с. 57].

Возвращаясь к задаче, заметим, что для ее решения теперь достаточно установить следующее неравенство:

$$A_2-G_2\le\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2. \qquad (8)$$

Тогда в силу (7) и транзитивности отношения «≤» утверждение задачи будет доказано.

Покажем справедливость (8). Для этого рассмотрим разность $\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2-(A_2-G_2)$ и покажем, что она неотрицательна.

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2-(A_2-G_2)=$$
$$=\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2-\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}=$$
$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{4}\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2(a+b)^2-2\right)$$

Так как по условию задачи $a\ge\frac{1}{2},b\ge\frac{1}{2}$, то $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2(a+b)^2\ge 2$. Отсюда немедленно следует необходимое.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что последний способ решения дает нам возможность записать уточнение неравенства задачи для $a\ge\frac{1}{2},b\ge\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2 \geq \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}\ .$$

Замечание 2. К сожалению, мы не обнаружили в решениях, заимствованных в [3], исследования вопроса о достижении равенства в доказываемом неравенстве. Однако приведенные решения позволяют ясно видеть, что данное неравенство обращается в равенство лишь при $a = b$.

Мы попытались продемонстрировать некоторые приемы работы над задачей, включающие не только применение различных подходов к решению, но и постановку дополнительных вопросов, возникающих при более детальном анализе задачи.

Хочется еще раз заметить, насколько эффективным и разумным является применение свойств среднего степенного при решении задач, основанных на использовании свойств функций. Это делает важным не только само изучение среднего степенного и его свойств, но и формирование у школьников умения видеть задачу, которая может быть решена соответствующим методом. Подобное обучение позволяет существенно дополнить «арсенал» традиционных методов решения задач, приобщить школьников к самостоятельной работе, реализовать внутрипредметные и межпредметные связи.

Примечания

1. *Калинин, С. И.* Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана [Текст]: учеб. пособие по спецкурсу / С. И. Калинин. Киров: Изд-во ВятГГУ, 2002. 368 с.

2. *Калинин, С. И.* О некоторых соотношениях для среднего степенного двух положительных чисел [Текст] / С. И. Калинин, З. В. Шилова // Некоторые вопросы теории среднего степенного: сб. науч. ст. Киров: ВГПУ, 1999. С. 54–61.

3. *Клумова, И.* Решение задачи М647 [Текст] / И. Клумова // Квант. 1981. № 7. С. 22–23.

4. Ленинградские математические кружки [Текст] : пособ. для внеклассной работы. Киров: Изд-во «АСА», 1994. 272 с.

5. *Сивашинский, И. Х.* Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям [Текст] / И. Х. Сивашинский. М.: Наука, 1971. 368 с.

6. *Фомин, С.* Задача М647 [Текст] / С. Фомин // Квант. 1980. № 10. С. 30.

Е. А. Прокушкина

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ГЮЙГЕНСА

В статье рассматриваются некоторые применения классического неравенства Гюйгенса и его обобщения в вопросах доказательства неравенств, решения уравнений, исследования переменных величин на экстремум.

В теории неравенств хорошо известно классическое неравенство Гюйгенса (см., напр., [1]). Напомним его. Пусть a_1, ..., a_n – положительные числа, тогда справедливо неравенство

$$1+\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leq \sqrt[n]{(1+a_1)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)}\ , \qquad (1)$$

в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = \ldots = a_n$.

Приведённое неравенство и есть неравенство Гюйгенса. Известно, что оно впервые было сформулировано в XVII в. и допускает обобщение на «весовой» случай:

$$(1+a_1)^{p_1}\cdot\ldots\cdot(1+a_n)^{p_n} \geq 1+a_1^{\,p_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\,p_n}, \qquad (2)$$

где p_1, ..., p_n – набор положительных весов, удовлетворяющий условию $p_1+\ldots+p_n=1$ (см., напр., [2]).

Цель нашей работы – рассмотреть некоторые применения неравенств (1) и (2) в вопросах решения уравнений, доказательства неравенств, исследования величин на экстремум.

Перейдём к рассмотрению упомянутых задач.

Задача 1. *Докажите неравенство* $1+\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{15}\cdot\sqrt[8]{255}\cdot\sqrt[16]{65535} \leq 16\sqrt[16]{2}$.

Решение. Рассмотрим левую часть неравенства и заметим, что для показателей корней ее второго слагаемого справедливо соотношение $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$. Запишем её в виде $1+(3)^{\frac{1}{2}}\cdot(15)^{\frac{1}{4}}\cdot(255)^{\frac{1}{8}}\cdot(65535)^{\frac{1}{16}}\cdot 1^{\frac{1}{16}}$, теперь на показатели степеней мы можем посмотреть как на «весы», сумма которых равна единице. Полагая $a_1 = 3$, $a_2 = 15$, $a_3 = 255$, $a_4 = 65535$, записанное выражение оценим сверху по неравенству (2):

$$1+\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{15}\cdot\sqrt[8]{255}\cdot\sqrt[16]{65535} =$$
$$=1+(3)^{\frac{1}{2}}\cdot(15)^{\frac{1}{4}}\cdot(255)^{\frac{1}{8}}\cdot(65535)^{\frac{1}{16}}\cdot 1^{\frac{1}{16}} \leq$$
$$\leq (4)^{\frac{1}{2}}\cdot(16)^{\frac{1}{4}}\cdot(256)^{\frac{1}{8}}\cdot(65536)^{\frac{1}{16}}\cdot(2)^{\frac{1}{16}} = 16\sqrt[16]{2}$$
$$1+\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{15}\cdot\sqrt[8]{255}\cdot\sqrt[16]{65535} \leq 16\sqrt[16]{2}\ .$$

ПРОКУШКИНА Елена Александровна – студентка IV курса факультета информатики ВятГГУ, специальность «Прикладная математика».
© Прокушкина Е. А., 2007

Задача 2. *Докажите неравенство* $1+\sqrt[3]{26}\cdot\sqrt[4]{80}\cdot\sqrt[5]{242}\cdot\sqrt[6]{728}\le 81\sqrt[60]{8}$. Данную задачу предлагаем для самостоятельного осмысления.

Теперь попробуем рассмотреть более общие примеры вышеприведенных задач.

Задача 3. *Докажите неравенство* $1+\prod_{n=1}^{\infty}(81^{\frac{1}{n+2}}-1)^{\frac{1}{n(n+1)}}\le 3.$

Заметим, что из показателей степеней можно составить ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, n-я частичная сумма которого равна $\sigma_n=\frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$. Воспользуемся неравенством (2), чтобы произвести оценку сверху:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\prod_{k=1}^{n}(81^{\frac{1}{k+2}}-1)^{\frac{1}{k(k+1)}})\le\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(81^{\frac{1}{k+2}})^{\frac{1}{k(k+1)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}81^{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}=\lim_{n\to\infty}81^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}=81^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}$, то получаем $\lim_{n\to\infty}(1+\prod_{k=1}^{n}(81^{\frac{1}{k+2}}-1)^{\frac{1}{k(k+1)}})\le 81^{\frac{1}{4}}=3$. По теореме о предельном переходе в простом неравенстве имеем оценку $1+\prod_{n=1}^{\infty}(81^{\frac{1}{n+2}}-1)^{\frac{1}{n(n+1)}}\le 3$.

Задача 4. *Докажите неравенство* $\sqrt[n]{2\cdot n!}<\sqrt[n]{(n+2)!}-2\sqrt[n]{2}, n\in N, n\ge 2$.

Решение. Преобразуем неравенство, поделив каждую его часть на $\sqrt[n]{2}$: $(n!)^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{(n+2)!}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-2.$

Заметим, что в выражении $(n!)^{\frac{1}{n}}=1^{\frac{1}{n}}\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot n^{\frac{1}{n}}$ сумма весов n положительных сомножителей дает 1. Произведем оценку полученного выражения по неравенству (2):

$$1^{\frac{1}{n}}\cdot 2^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot n^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot(n+1)^{\frac{1}{n}}-1=((n+1)!)^{\frac{1}{n}}-1.$$

Полученное выражение представимо в виде $2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot(n+1)^{\frac{1}{n}}-1$, для которого также можно произвести оценку по неравенству (2)

$$2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot(n+1)^{\frac{1}{n}}-1<3^{\frac{1}{n}}\cdot 4^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot(n+2)^{\frac{1}{n}}-2=$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{\frac{1}{n}}\cdot 4^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot(n+2)^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}}-2=\left(\frac{(n+2)!}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-2.$$

В итоге получаем

$$(n!)^{\frac{1}{n}}<((n+1)!)^{\frac{1}{n}}-1<\left(\frac{(n+2)!}{2}\right)^{\frac{1}{n}}-2.$$

Задача 5. *Найдите все действительные корни иррационального уравнения* $\sqrt[3]{(8x^2+1)\cdot(\sqrt{x}+1)^2}=2x+1$.

Решение 1. Область допустимых значений данного уравнения $x\ge 0$. В этой области его преобразуем следующим образом:

$$\sqrt[3]{(8x^2+1)\cdot(\sqrt{x}+1)^2}=2x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(8x^2+1)\cdot(\sqrt{x}+1)^2=8x^3+12x^2+6x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x^3+16x^2\sqrt{x}+8x^2+1+2\sqrt{x}+x=8x^3+12x^2+6x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16x^2\sqrt{x}-4x^2+2\sqrt{x}-5x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}(16x^2-4x\sqrt{x}+2-5\sqrt{x})=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\16x^2-4x\sqrt{x}-5\sqrt{x}+2=0\end{array}\right.$$

Будем решать второе уравнение совокупности:

$$\sqrt{x}=\frac{16x^2+2}{4x+5}\Leftrightarrow x=\frac{256x^4+64x^2+4}{16x^2+40x+25}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 256x^4+24x^2-16x^3-25x+4=0.$$

Так как $256x^4+24x^2-16x^3-25x+4=$

$$=(x-\frac{1}{4})(256x^3+48x^2+36x-16)=(x-\frac{1}{4})(x-$$

$$-\frac{1}{4})(256x^2+112x+64)=(x-\frac{1}{4})^2(256x^2+112x+64),$$

то имеем $\left[\begin{array}{l}256x^2+112x+64=0\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$, где уравнение $256x^2+112x+64=0$ действительных корней не имеет.

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right.$.

Данное уравнение можно решить и с использованием неравенства Гюйгенса. Сделаем это.

Решение 2. Запишем левую часть уравнения в виде $\left(8x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{2}{3}}$. Обозначим за $a_1=8x^2$ и $a_2=\sqrt{x}$. Заметим, что в области допустимых значений уравнения a_1 и a_2 будут положительны (за исключением случая, когда $x=0$, при подстановке которого в уравнение получаем верное ра-

венство). Для показателей степеней справедливо соотношение $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. Теперь можно оценить полученное выражение снизу по неравенству (2): $\left(8x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{2}{3}}\geq 1+(8x^2)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{x})^{\frac{2}{3}}=1+\left(8x^2\cdot x\right)^{\frac{1}{3}}=1+2x$, получили правую часть исходного уравнения. Нужно добиться равенства в оценке. Последнее возможно при условии

$$8x^2=\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(8x\sqrt{x}-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0-n.к. \\ x\sqrt{x}=\frac{1}{8} \end{array}\right. \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{array}\right.$.

В итоге, решая иррациональное уравнение $\sqrt[3]{(8x^2+1)\cdot(\sqrt{x}+1)^2}=2x+1$ с помощью неравенства (2), мы получили уравнение второй степени, корни которого легко находятся, а не четвертой, как при решении стандартным методом.

Задача 6. *Решите уравнение* $1+x^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{\frac{2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}=\sqrt{2x}$ *при* $x\geq 1$.

Решение. Левую часть уравнения представим в виде $1+\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ и оценим ее сверху при условиях $x\geq 0$, $\frac{2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}>0$, которые выполнимы при $x>1$. Будем иметь:

$$1+\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\sqrt{x}+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+1\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(2x-\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2x}.$$

Равенство в оценке возможно при условии

$$\sqrt{x}=\frac{2x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x}=2x-\sqrt{x}-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x}=1+\sqrt{2} \\ \sqrt{x}=1-\sqrt{2}\rightarrow n.к. x\geq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}.$$

Проверим значение $x=1$: $1+\sqrt[4]{1}\cdot\sqrt{\frac{2-\sqrt{1}-1}{\sqrt{1}+1}}\neq\sqrt{2}$.

Ответ: $x=3+2\sqrt{2}$.

Задача 7. *Найдите решение уравнения* $1+\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x^3+3x}{3x^2+1}}=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3x^2+1}}$.

Решение. Область допустимых значений $x\geq 0$. Запишем левую часть уравнения в виде $1+\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{x^3+3x}{3x^2+1}}=1+x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^3+3x}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$ и произведем оценку сверху, используя неравенство (1).

$\begin{cases} x>0 \\ \frac{x^3+3x}{3x^2+1}>0 \end{cases}\rightarrow x>0$ ($x=0$ проверим позже).

$$1+x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^3+3x}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}\leq(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{x^3+3x}{3x^2+1}+1\right)^{\frac{1}{2}}=(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{x^3+3x+3x^2+1}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}=(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{(x+1)^3}{3x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(x+1)^2}{\sqrt{3x^2+1}}$$

Равенство в оценке возможно лишь при условии

$$x=\frac{x^3+3x}{3x^2+1} \Leftrightarrow 3x^3+x=x^3+3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1\rightarrow n.к \\ x=0\rightarrow n.к. \end{array}\right.$$

При подстановке значения $x=0$ в уравнение получаем верное равенство.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Рассмотрим еще одно иррациональное уравнение.

Задача 8. *Решите иррациональное уравнение* $1+((x^3-2)(x^2-2)^3)^{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{x-2}=(x-1)\cdot((x^2+x+1)(x+1)^3)^{\frac{1}{8}}$.

Решение. Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} (x^2+x+1)(x+1)^3\geq 0 \\ x-2\geq 0 \\ (x^3-2)(x^2-2)^3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\in(\infty,\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\infty) \\ x\geq 2 \\ x\geq\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 2.$$

Используем неравенство (2), чтобы оценить левую часть уравнения сверху при условии $x > 2$, которое выполняется по ОДЗ уравнения (значение $x = 2$ не является решением уравнения). Имеем:

$$1+(x^3-2)^{\frac{1}{8}}(x^2-2)^{\frac{3}{8}}(x-2)^{\frac{1}{2}} \le (x^3-1)^{\frac{1}{8}}(x^2-1)^{\frac{3}{8}}(x-1)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= (x-1)^{\frac{1}{8}}(x^2+x+1)^{\frac{1}{8}}(x-1)^{\frac{3}{8}}(x+1)^{\frac{3}{8}}(x-1)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= (x-1)((x+1)^3(x^2+x+1))^{\frac{1}{8}} = (x-1)(x^5+4x^4+7x^3+7x^2+4x+1)^{\frac{1}{8}}.$$

Равенство в оценке обеспечивается при условии

$$\begin{cases} x^3-2 = x^2-2 \\ x^2-2 = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x^2 \\ x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \\ x > 2 \end{cases}.$$ Получаем, что уравнение не имеет решений.

Задача 9. *Функция*

$$F(x,y) = 1+(3y+2)^{(x-3)^2}(2x-1)^{(y-2)^2} - (3(y+1))^{(x-3)^2}(2x)^{(y-2)^2}$$

рассматривается на множестве точек (x,y), удовлетворяющих условию $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$. *В каких точках этой окружности она обращается в нуль?*

Решение. Рассмотрим выражение $1+(3y+2)^{(x-3)^2}(2x-1)^{(y-2)^2}$ и оценим его по неравенству (2) при условиях $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$, $3y + 2 > 0$, $2x - 1 > 0$. Получаем

$$1+(3y+2)^{(x-3)^2}(2x-1)^{(y-2)^2} \le (3y+2+1)^{(x-3)^2}(2x-1+1)^{(y-2)^2} =$$
$$= (3y+3)^{(x-3)^2}(2x)^{(y-2)^2} = (3(y+1))^{(x-3)^2}(2x)^{(y-2)^2}.$$

Равенство в оценке реализует соотношение F (x, y) = 0. Равенство в оценке возможно при условии

$3y + 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 2/3x - 1$.

Найдем решение системы

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2 = 1 \\ y = \dfrac{2}{3}x-1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{51}{13}, y_1 = \dfrac{21}{13} \\ x_2 = 3, y_2 = 1 \end{array}.$$

Ответ: (3,1) и $\left(\dfrac{51}{13}, \dfrac{21}{13}\right)$.

Теперь перейдем к вопросу исследования переменных величин на экстремум.

Задача 10. *Найдите наибольшее значение функции* $f(x) = 1+\sqrt{e^{3x}}\cdot\sqrt{\dfrac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}}$ *на отрезке* $[0, \dfrac{\ln 15}{3}]$.

Решение. Реализуем сначала стандартный подход. Так как

$$f'(x) = \left(e^{\frac{3x}{2}}\right)'\cdot\sqrt{\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}} + \sqrt{e^{3x}}\cdot\left(\left(\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot e^{\frac{3x}{2}}\cdot\sqrt{\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}} +$$
$$+\sqrt{e^{3x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{-3e^{3x}(1+e^{3x})+3e^{3x}(e^{3x}-15)}{(1+e^{3x})^2}\right) =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot e^{\frac{3x}{2}}\cdot\left(\left(\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1+e^{3x}}{15-e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 16\frac{e^{3x}}{(1+e^{3x})^2}\right),$$ то

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1+e^{3x}}{15-e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 16\frac{e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 15-e^{3x} - \frac{16e^{3x}}{1+e^{3x}} = 0 \Leftrightarrow 15-2e^{3x}-e^{6x} = 0.$$

Имеем решение $x = \dfrac{\ln 3}{3}$. Значение производной на интервале $(0, \dfrac{\ln 3}{3})$ положительно, а на интервале $(\dfrac{\ln 3}{3}, \dfrac{\ln 15}{3})$ – отрицательно. Значит, функция $f(x)$ в точке $x = \dfrac{\ln 3}{3}$ достигает своего наибольшего значения 4.

Решим данную задачу посредством неравенства (1). Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = 1+(e^{3x})^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}$ и введем ограничения

$$\begin{cases} e^{3x} > 0 \\ \dfrac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}} > 0 \end{cases}.$$ Данные условия выполнимы при $x \in [0, \dfrac{\ln 15}{3})$. Оценим функцию $f(x)$ сверху:

$$1+(e^{3x})^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}} \le (e^{3x}+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}}+1\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\left(e^{3x}+1\right)\left(\frac{16}{e^{3x}+1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 4$$. Теперь нужно добиться равенства в оценке:

$$e^{3x} = \frac{15-e^{3x}}{1+e^{3x}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{3x}+(e^{3x})^2+e^{3x}-15 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (e^{3x})^2+2e^{3x}-15 = 0 \rightarrow x = \frac{\ln 3}{3}.$$

Проверим значение $x=\frac{\ln 15}{3}$: $f(\frac{\ln 15}{3})=0$.

При значении $x=\frac{\ln 3}{3}$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения 4.

Задача 11. *Найдите наибольшее значение функции* $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$ *на интервале* (0,3).

Решение. Перепишем функцию $f(x)$ в виде $f(x)=\left(\frac{3-x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}$. Оценим её сверху, используя неравенство (1), полагая: $a_1=x$, $a_2=\frac{3-x}{1+x}$. Введенные величины на рассматриваемом интервале (0,3) положительны. Можем произвести оценку:

$$\left(\frac{3-x}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\le\left(\frac{3-x}{x+1}+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}}-1=$$

$$=\left(\frac{4}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{4}-1=1.$$

Равенство в оценке возможно лишь при условии $x=\frac{3-x}{x+1}$, т. е. при выполнении равенства $x^2+2x-3=0$. Последнее уравнение имеет корни $x_1=1$, $x_2=-3$, из которых только первый принадлежит интервалу (0,3). Получили: $f(1)=1$.

Задача 12. *Найдите наименьшее значение функции f(x), если*

$$f(x)=\sqrt{Sin\pi x+2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{Sin\pi x+1}}.$$

Решение. С помощью неравенства (1) произведем оценку функции $f(x)$ при условии $\begin{cases}\mathrm{Sin}\pi x+1>0\\ \frac{1}{Sin\pi x+1}>0\end{cases}$, которое выполняется при $x\in\mathbf{R}\setminus\{\frac{3}{2}+2n\}, n\in$ Z.

Получим: $\left(\frac{1}{Sin\pi x+1}+1-1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(Sin\pi x+2-1)^{\frac{1}{2}}\ge$

$\ge\left(\frac{1}{Sin\pi x+1}\right)^{\frac{1}{2}}(Sin\pi x+1)^{\frac{1}{2}}-1=1-1=0.$ Для того, чтобы равенство в оценке имело место, должно выполняться условие

$$\frac{1}{\mathrm{Sin}\pi x+1}=\mathrm{Sin}\pi x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\mathrm{Sin}\pi x+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\mathrm{Sin}\pi x+1=1\\ \mathrm{Sin}\pi x+1=-1\to n.к.\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{Sin}\pi x=0,\ \begin{array}{l}\pi x=0+\pi n, n\in Z\\ x=n\end{array}.$$

Ответ: в точках $x=n$, $n\in Z$ функция принимает свое наименьшее значение 0.

Рассмотренные выше задачи позволяют смотреть на неравенство Гюйгенса как на метод исследования соответствующих вопросов. Мы видим, что во многих случаях этот метод может давать более простое решение задачи.

Примечания

1. *Сорокин, Г. А.* Доказательство некоторых классических неравенств с помощью производной [Текст] / Г. А. Сорокин // Математика в школе. 1980. № 6. С. 55–56.

2. *Колпащикова, Н. В.* Одно доказательство неравенства Коши для взвешенных средних и его применение [Текст] / Н. В. Колпащикова // Некоторые вопросы среднего степенного: сборник научных статей. Киров: Изд-во ВГПУ, 1999. С. 62–67.

Н. В. Садовников

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ СПЕЦКУРСА «ОСНОВЫ ДВУЗНАЧНОЙ, БЕСКОНЕЧНОЗНАЧНОЙ И ПОРЯДКОВОЙ ЛОГИК» ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА

В статье рассмотрены основные направления фундаментализации вузовского образования, ее существенные признаки. Автором разработан элективный курс по изучению многозначной и порядковой логики для студентов-математиков педвуза, имеющих фундаментальную направленность.

Фундаментальность является основополагающим принципом обучения математике в педагогическом вузе, поскольку именно знание основных фундаментальных математических положений позволит учителю в дальнейшем легко ориентироваться в школьной математике, в методике ее преподавания, реагировать на возможные изменения в содержании школьного курса математики. Главная проблема состоит в разумном

САДОВНИКОВ Николай Владимирович – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре теории и методики обучения математике Пензенского государственного педагогического университета имени В. Г. Белинского.

© Садовников Н. В., 2007

сочетании фундаментального, общепрофессионального и специального компонентов высшего образования. Применительно к подготовке учителей математики в педвузе необходима сбалансированность собственно математической (специальной), общепедагогической и методической подготовки. Говоря о соотношении фундаментальной и профессиональной составляющих в вузовском образовании, можно подчеркнуть, что пока нет общепринятого определения фундаментальной науки и фундаментальной учебной дисциплины. Некоторые авторы понимают под фундаментальностью более углубленную подготовку специалиста по данному направлению «вглубь», другие – «вширь».

Мы считаем, что к фундаментальным наукам нужно относить те, чьи основные понятия и положения первичны, не являются следствием других наук, они непосредственно отражают, систематизируют и синтезируют в законы и закономерности факты и явления природы или общества. Образование становится фундаментальным, если оно ориентировано на выявление глубинных, сущностных оснований и связей между разнообразными процессами окружающего мира, и становится целостным, когда эти общие дисциплины оказываются не просто совокупностями традиционных курсов, а образуют единые циклы фундаментальных дисциплин, объединенных общей целевой фундаментализацией, объектом исследования, методологией построения каждой из дисциплин и ориентированных на междисциплинарные связи. Наиболее оптимальным является образование, которое базируется на единстве фундаментальности и профессиональной направленности обучения. Принцип профессиональной направленности обучения является важнейшим для высшей школы, так как большинство высших школ всегда были, есть и будут (по крайней мере, в ближайшее время) профессиональными по своей сути и назначению. И, несмотря на все новые веяния в вузах, профессиональная составляющая в высшем образовании всегда будет иметь место. Фундаментальность образования в чистом виде для любого вуза, а тем более – педагогического, невозможна. Принцип профессиональной направленности определяет общую структуру учебно-воспитательного процесса, учебные планы и учебные программы, то есть является организующим началом всего учебно-методического комплекса. Необходимость преподавания общенаучных дисциплин (математики, физики) в непосредственной взаимосвязи со специальными дисциплинами неоспорима. Однако известно, что изложение многих дисциплин в вузах не лишено догматизма, и это не приучает студентов к систематическому поиску нового, к замене отживающего более современным, перспективным. Часто в преподавании математики не устанавливаются связи с основной специальностью студента. Это приводит к тому, что студенты не воспринимают общетеоретические дисциплины как нечто абсолютно необходимое для дальнейшей работы. Содержание курсов заучивается догматически, без попыток осмыслить, как они могут быть использованы в профессиональной деятельности.

Главная цель деятельности системы высшего педагогического образования – подготовка специалистов высокой квалификации в соответствии с социальным заказом. Поэтому именно будущая профессиональная деятельность специалиста задает и определяет цели изучения всех учебных дисциплин, а значит, содержание и формы соответствующей учебной деятельности студентов, готовящихся к этой профессии.

В учебно-методической системе вуза должны быть одновременно реализованы принципы фундаментальной и технологической направленности обучения.

В результате педагогической интеграции принципов фундаментальной и технологической направленности возникает «целостность», обладающая интегрированным качеством, т. е. не сводимостью к сумме составляющих ее компонентов, как самой методической системы, так и интегрирующей основы. Можно говорить о принципе единства фундаментальной и технологической направленности обучения как методическом принципе обучения в педвузе.

Для реализации этого принципа нами разработан спецкурс для студентов-математиков педвуза «Основы двузначной, бесконечнозначной и порядковой логик». Данный спецкурс имеет также и определенную методологическую значимость для методической подготовки учителя математики в педвузе, которая проявляется, в частности, в реализации диалога различных логик в математике и методике обучения математике. Как известно, в программе педвузов предусмотрено изучение на III курсе математической логики, в основе которой лежит двузначная логика. Основное содержание педвузовского курса математической логики составляют теория высказываний и теория предикатов. В контексте фундаментализации образования мы предлагаем нетрадиционный подход к изучению этого курса, положив в основу так называемый функциональный подход, дающий более общее представление об изучаемом предмете.

Далее в контексте нашего исследования в процессе обобщения основных булевых операций мы совершаем переход к бесконечнозначной логике (БЛ).

Завершается наш спецкурс изучением порядковой логики и логических определителей. По-

рядковая логика является более мощным математическим аппаратом (по сравнению с БЛ), так как позволяет выделять любой порядковый элемент из некоторого множества C = [A,B], являющегося в общем случае замкнутым и ограниченным интервалом множества всех действительных чисел.

Содержание элективного курса «Основы двузначной, бесконечнозначной и порядковой логик», рассчитанного примерно на тридцать часов занятий, состоит из трех частей.

Глава 1. Введение в логику

1.1. Алгебра логики. Булевы функции от одной и двух переменных.

1.2. Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней.

1.3. Канонические формы булевых функций: СДНФ и СКНФ.

1.4. Понятия о минимизации булевых функций. Минимальные ДНФ и КНФ булевых функций.

1.5. Сокращенная дизъюнктивная нормальная форма логических функций.

1.6. Алгоритм Квайна получения сокращенной ДНФ булевых функций.

1.7. Методы получения тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм.

1.8. Методы получения минимальных конъюнктивных нормальных форм.

Глава 2. Бесконечнозначная логика

2.1. Задание функции бесконечнозначной логики (БЛ).

2.2. Эквивалентные логические и логико-алгебраические преобразования в БЛ.

2.3. Канонические представления функций бесконечнозначной логики.

2.4. Обыкновенные уравнения и неравенства в БЛ.

2.5. Методы решения уравнений и неравенств в БЛ.

2.6. Типовые обыкновенные уравнения и неравенства бесконечной логики без отрицаний.

Глава 3. Порядковая логика

3.1. Задание функции порядковой логики.

3.2. Понятие порядкового логического определителя.

3.3. Свойства логических определителей.

3.4. Раскрытие логических определителей в дизъюнктивной форме.

3.5. Раскрытие логических определителей в конъюнктивной форме.

Несомненно, имея фундаментальный характер, данный спецкурс несет и методическую направленность. В частности, многие законы булевой алгебры (закон контрапозиции и др.) лежат в основе схем доказательства теорем школьного и вузовского курсов математики (доказательство методом от противного и др.). В принципе любую теорему можно представить в виде логического высказывания, имеющего форму импликации ($A(x) \to B(x)$, где $A(x)$ – условие теоремы, а $B(x)$ – её заключение). При решении задач логического характера также можно условие задачи перевести на язык логического выражения, которое с помощью эквивалентных логических преобразований приводится к каноническому виду (СДНФ или СКНФ), удобному для обратного перевода полученного ответа. На примере получения минимальных дизъюнктивных и минимальных конъюнктивных нормальных форм булевых функций можно показать межпредметные связи математики и техники, математики и экономики и т. д.

При переходе от обычной (двузначной) логики к бесконечнозначной и при переходе от БЛ к порядковой логике можно показать будущим учителям математики использование многих научных методов познания (в частности, обобщения, абстрагирования и др.) в математических исследованиях.

Полностью содержание данного спецкурса нами опубликовано в учебном пособии, а также издано в виде монографии. Отметим лишь, что подход, принятый нами при изучении первой главы, отличается от традиционных подходов к изучению курса математической логики тем, что в его основу положен более общий (фундаментальный) функциональный подход. Данная глава носит вводный характер для дальнейшего содержания спецкурса, а для совершенствования методической подготовки студентов – будущих учителей математики она является самой важной из всего данного спецкурса. Материал этой главы может быть в дальнейшем использован при изучении спецкурса и спецсеминара по ТиМОМ, посвященных подготовке студентов педвузов к использованию задач в школьном курсе математики.

После рассмотрения уравнений и неравенств БЛ и методов их решения (во второй главе) целесообразно провести самостоятельную работу проверочного характера с целью проверки знаний и умений студентов по теме «Бесконечнозначная логика». Задания придется составлять самому преподавателю, так как никаких дидактических материалов по этой теме нет.

Преобладающей формой организации изучения второй главы остается лекция. Можно провести несколько практических занятий, но предварительно необходимо тщательно продумать их содержание и методику проведения.

Следует отметить солидный научный уровень материала этой главы, его абстрактный характер. Знания, приобретаемые студентами при изучении бесконечнозначной логики, имеют фундаментальный характер. Необходимо акцентировать внимание студентов на том, что двузначная логика есть частный случай БЛ.

После изучения основных свойств логических определителей в виде лемм (в третьей главе, посвященной изучению порядковой логики) показываем теоретические основы раскрытия логических определителей в дизъюнктивной и конъюнктивной формах. Конечно, содержание данной главы носит чисто абстрактный характер, без явного выхода на практику, то есть это знания без явно выраженной практической направленности, что говорит об их фундаментальном характере. Исходя из такой направленности содержания материала главы «Порядковая логика», его изучение целесообразно организовать чисто лекционно. Составление задач для практического решения будет выглядеть слишком искусственным.

Несмотря на теоретический характер данного спецкурса, он несомненно будет полезен студентам-старшекурсникам математических специальностей педвузов в плане их ознакомления с одним из разделов математики как науки. Элективный курс «Основы двузначной, бесконечнозначной и порядковой логик» способствует фундаментализации не только специальной (математической) подготовки будущего учителя, но и его методической подготовки.

Д. С. Саймуков

МЕТОД MIHALY BENCZE В УТОЧНЕНИИ НЕРАВЕНСТВА КОШИ ДЛЯ k-КРАТНЫХ СРЕДНЕГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО И СРЕДНЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Методом M. Bencze устанавливается уточнение неравенства Коши для k-кратных арифметико-геометрических средних положительных чисел.

В работе [M. Bencze. New Proof and Refinement for the AM-GM Inequality // Octogon. 2002. Vol. 10, № 1. P. 347–348] был установлен результат, уточняющий неравенство Коши для арифметико-геометрических средних положительных чисел. Сформулируем его. Пусть $x \in (0, +\infty)$ и $a_i > 0$, $i = 1, 2, ..., m$. Введем в рассмотрение функцию

$$B(x) = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m}(x + a_i)} - x .$$

Справедлива следующая

Теорема (M. Bencze). *Функция $B(x)$ возрастающая, причем $G_m \le B(x) \le A_m$, где $G_m = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_j}$ есть среднее геометрическое, а $A_m = \frac{\sum_{i=1}^{m}(a_j)}{m}$ – среднее арифметическое чисел a_i, $i = 1, 2, ..., m$.*

Цель настоящей работы – распространить результат Mihaly Bencze на случай k-кратных среднего геометрического и среднего арифметического рассматриваемой совокупности чисел.

Напомним вначале определение k-кратного среднего геометрического G_m^k и k-кратного среднего арифметического A_m^k положительных чисел a_i, $i = 1, 2, ..., m$:

$$G_m^k = \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_i}\ ,\quad A_m^k = \left(\frac{\sum\limits_{\substack{i_1,...,i_k=1 \\ i_1 \le i_2 \le ... \le i_k}}^{m} \left(a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot ... \cdot a_{i_k} \right)}{\widetilde{C}_m^k} \right)^{\frac{1}{k}},$$

где $\widetilde{C}_m^k = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}$ – число сочетаний с повторениями из m по k. Введем функцию

$$\widetilde{B}(x) = \sqrt[\widetilde{C}_m^k]{\prod_{\substack{i_1,...,i_k=1 \\ i_1 \le i_2 \le ... \le i_k}}^{m} \left(x + a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot ... \cdot a_{i_k} \right)} - x \ , \quad x \in (0, +\infty).$$

В отношении ее докажем теорему.

Теорема А. *Функция $\widetilde{B}(x)$ – возрастающая, причем $G_m^k \le \left(\widetilde{B}(x)\right)^{\frac{1}{k}} \le A_m^k$.*

Доказательство: Возьмем $n = \widetilde{C}_m^k$ и набор чисел c_j, $j = 1, 2, ..., n$, таких, что $c_j = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k$ (количество сомножителей равно k), $i_1, i_2, ..., i_k = 1, 2, ..., m$, причем $i_1 \le i_2 \le ... \le i_k$. Тогда $\widetilde{B}(x)$ представляется так:

$$\widetilde{B}(x) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} \left(x + c_j \right)} - x \ .$$

Следовательно, по теореме M. Bencze $\widetilde{B}(x)$ – неубывающая функция и для неё справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{x \to 0} \widetilde{B}(x) \le \widetilde{B}(x) \le \lim_{x \to +\infty} \widetilde{B}(x) . \qquad (1)$$

Найдем пределы в (1). Вычисление первого предела не представляет трудностей:

САЙМУКОВ Дмитрий Сергеевич – студент II курса факультета информатики ВятГГУ, специальность «Прикладная математика»
© Саймуков Д. С., 2007

$$\lim_{x\to 0}\widetilde{B}(x)=\sqrt[\widetilde{C}_m^k]{\prod_{\substack{i_1,\dots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\dots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\dots\cdot a_{i_k}\right)}=\sqrt[\widetilde{C}_m^k]{(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\widetilde{C}_k^m}}=\sqrt[\frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}]{(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}}}=$$

$$=(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\frac{\frac{(m+k-1)!}{m!(k-1)!}}{\frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}}}=(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\frac{k!(m-1)!}{m!(k-1)!}}=(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\frac{k}{m}}=\left(\sqrt[m]{(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)}\right)^k.$$

Второй предел вычислим поэтапно. Введем вспомогательную функцию

$$A(x)=\prod_{\substack{i_1,\dots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\dots\le i_k}}^{m}\left(x+a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\dots\cdot a_{i_k}\right).$$

Тогда искомый предел есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[\widetilde{C}_m^k]{A(x)}-x\right)$. Для его вычисления выражение функции умножим и разделим на следующее выражение:

$$\left(\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-1}+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-2}\cdot x+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-3}\cdot x^2+\dots+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)\cdot x^{\widetilde{C}_m^k-2}+x^{\widetilde{C}_m^k-1}\right),$$

будем иметь

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[\widetilde{C}_m^k]{A(x)}-x\right)\left(\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-1}+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-2}\cdot x+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-3}\cdot x^2+\dots+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)\cdot x^{\widetilde{C}_m^k-2}+x^{\widetilde{C}_m^k-1}\right)}{\left(\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-1}+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-2}\cdot x+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-3}\cdot x^2+\dots+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)\cdot x^{\widetilde{C}_m^k-2}+x^{\widetilde{C}_m^k-1}\right)}\right)$$

Числитель полученной дроби преобразуем по формуле $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+\dots+a\cdot b^{n-2}+b^{n-1})$, полагая $a=\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)$, $b=x$, $n=\widetilde{C}_m^k$. После раскрытия скобок, приведения подобных членов в числителе дроби и деления числителя и знаменателя дроби на $x^{\widetilde{C}_m^k-1}$ получим

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{x^{\widetilde{C}_m^k-1}}\left(x^{\widetilde{C}_m^k-1}\cdot\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\dots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\dots\cdot a_{i_k}\right)+\dots+(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\widetilde{C}_k^m}\right)}{\frac{1}{x^{\widetilde{C}_m^k-1}}\left(\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-1}+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-2}\cdot x+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)^{\widetilde{C}_m^k-3}\cdot x^2+\dots+\left(A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}\right)\cdot x^{\widetilde{C}_m^k-2}+x^{\widetilde{C}_m^k-1}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\dots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\dots\cdot a_{i_k}\right)+\dots+\frac{(a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_m)^{\widetilde{C}_k^m}}{x^{\widetilde{C}_m^k-1}}\right)}{\left(\left(\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}\right)^{\widetilde{C}_m^k-1}+\left(\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}\right)^{\widetilde{C}_m^k-2}+\left(\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}\right)^{\widetilde{C}_m^k-3}+\dots+\left(\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}\right)+1\right)}\right).$$

Воспользуемся теоремой о пределе частного. Тогда в числителе после предельного перехода останется только $\sum\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\right)$, так как остальные слагаемые стремятся к 0 при $x\to+\infty$. В знаменателе же получаем $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{C}_m^k-1}\left(\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}\right)^{\widetilde{C}_m^k-i}+1\right)$. Вычислим следующий предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[\widetilde{C}_m^k]{\prod\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(x+a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\right)}}{x}.$$

Внесем $\frac{1}{x}$ под знак корня и произведения: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[\widetilde{C}_m^k]{\prod\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(1+\frac{a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}}{x}\right)}$. Так как $\frac{a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, то выражение под корнем стремится к 1 и $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}=1$.

Согласно полученному результату $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{C}_m^k-1}\left(\frac{A(x)^{\frac{1}{\widetilde{C}_m^k}}}{x}\right)^{\widetilde{C}_m^k-i}+1\right)=\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{C}_m^k-1}(1)^{\widetilde{C}_m^k-i}+1=\widetilde{C}_m^k$.

Следовательно, имеем $\lim\limits_{x\to+\infty}\widetilde{B}(x)=\frac{\sum\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\right)}{\widetilde{C}_m^k}$.

Подставив значения найденных пределов в (1), получим:

$$\left(\sqrt[m]{(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m)}\right)^k\le\widetilde{B}(x)\le\frac{\sum\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\right)}{\widetilde{C}_m^k}.$$

Отсюда имеем

$$\left(\sqrt[m]{(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m)}\right)\le\left(\widetilde{B}(x)\right)^{\frac{1}{k}}\le\left(\frac{\sum\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\right)}{\widetilde{C}_m^k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Замечание: При $a_1=a_2=..=a_m=a$ получаем соотношение:

$$\left(\sqrt[m]{(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m)}\right)=\left(\widetilde{B}(x)\right)^{\frac{1}{k}}=\left(\frac{\sum\limits_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1\\ i_1\le i_2\le\ldots\le i_k}}^{m}\left(a_{i_1}\cdot a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}\right)}{\widetilde{C}_m^k}\right)^{\frac{1}{k}}=a,$$

То есть в этих условиях $\widetilde{B}(x)=const=a$.

А. А. Симонова

ОДНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА КОШИ

В работе рассматривается новое доказательство классического неравенства Коши.

В работе [Dinka M., Bencze M. A new proof of the inequality between arithmetical and geometrical means // Octogon. 2001. Vol. 9, № 1. P. 423–424] предлагается к рассмотрению один подход к доказательству неравенства Коши, основанный на методе полной математической индукции. Однако при чтении цитируемой работы обнаруживаются ошибки и технические издержки, мы попытались отмеченные недостатки устранить. Для удобства чтения предлагаемого ниже текста мы постарались обозначения авторов работы сохранить.

Рассмотрим следующую вспомогательную теорему.

Теорема 1. *Если* $z - w_k \ge 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, $w_n \ge 0$ *и* $\sum_{k=1}^{n} w_k \ge 0$ *, то* $\prod_{k=1}^{n}(z - w_k) \le z^n$.

Доказательство. Заметим, что $z \ge 0$, так как если $z < 0$, мы получаем $w_k \le 0$, следовательно, $z - w_k \le 0$, а это не удовлетворяет условию теоремы.

Докажем требуемое неравенство с помощью метода индукции.

1) Для $n = 1$ неравенство очевидно. Докажем его для $n = 2$. Имеем:

$$(z - w_1)(z - w_2) = (z^2 - z(w_1 + w_2) + w_1 w_2).$$

$w_1 w_2 \le \left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right)^2$, так как среднее геометрическое двух чисел в квадрате меньше либо равно среднему арифметическому этих чисел в квадрате, поэтому

$$\left(z^2 - z(w_1 + w_2) + w_1 w_2\right) \le \left(z^2 - z(w_1 + w_2) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{w_1 + w_2}{2}\right)^2\right) = \left(z - \frac{w_1 + w_2}{2}\right)^2 \le z^2 ,$$

где $w_1 + w_2 \ge 0$. Равенство в оценке достигается при $w_1 = w_2 = 0$.

2) Пусть неравенство выполняется для $n-1$ чисел, докажем это неравенство для n чисел. Обе части неравенства $\prod_{k=1}^{n-1}(z - w_k) \le z^{n-1}$ умножим на $z - w_n \ge 0$. Получим $\prod_{k=1}^{n}(z - w_k) \le z^n - w_n z^{n-1} \le z^n$, так как $w_n \ge 0$ и $z^{n-1} \ge 0$. Из этого следует $\prod_{k=1}^{n}(z - w_k) \le z^n$. Равенство в соотношении выполняется при $w_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Установим сейчас неравенство Коши.

Теорема 2 . *Для* $x_k > 0$, *где* $k = 1, \ldots, n$, *справедливо следующее неравенство:* $\prod_{k=1}^{n} x_k \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n$.

Доказательство. Пусть $z = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, тогда существует такое m, что $x_m \le z \le x_{m+1}$. Рассмотрим $b_k = z - x_k$, где $k = 1, \ldots, m$, $b_k = x_k - z$, где $k = m + 1, \ldots, n$. Ясно, что $b_k \ge 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Подставив z и b_k в неравенство, доставляемое теоремой 1, мы получим соотношение

$$\prod_{k=1}^{m}(z - b_k) \cdot \prod_{k=m+1}^{n}(z + b_k) \le z^n .$$

Для того, чтобы последнее неравенство было верным, надо показать, что

$z - b_k \ge 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, $z + b_k \ge 0$ $(k = m + 1, \ldots, n)$,

$$b_n \ge 0 \text{ и } \sum_{k=1}^{n} x_k \ge 0 .$$

Рассмотрим произведение

$(z - b_1)\ldots(z - b_m)(z + b_{m+1})\ldots(z + b_n) = x_1 \ldots x_n$.

Каждый из его сомножителей не меньше нуля, так как $z - b_k = x_k \ge 0$, $k = 1, \ldots, m$, и $z + b_k = x_k \ge 0$, $k = m + 1, \ldots, n$.

Далее:

$$b_1 + \ldots + b_m - b_{m+1} - \ldots - b_n = (x_1 - z) + \ldots +$$
$$+ (x_m - z) - (z - x_{m+1}) - \ldots - (z - x_n) =$$
$$= zn - x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \cdot$$

Следовательно, по теореме 1 мы можем утверждать, что

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = (z - b_1)..(z - b_m)(z + b_{m+1})..(z + b_n) \le$$

$$\le z^n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n .$$

Теорема доказана.

Замечание . Автор считает своим долгом отметить, что проведенные исследования были навеяны определёнными размышлениями в 2003 г. по подходу к доказательству неравенства Коши бывшим студентом специальности «Прикладная математика» Карачевым Олегом.

СИМОНОВА Анастасия Андреевна – студентка III курса факультета информатики ВятГГУ, специальность «Прикладная математика»

© Симонова А. А., 2007

А. Н. Соколова

К ИССЛЕДОВАНИЯМ ПО УТОЧНЕНИЮ ПОЛОЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТОЧКИ В ФОРМУЛЕ ТЕЙЛОРА

Статья посвящена обзору исследований последних лет, касающихся изучения положения промежуточной точки в формуле Тейлора-Лагранжа. Предпринимаются попытки практической реализации описания положения такой точки с применением аппарата частичных экспоненциальных многочленов Белла.

1. Введение. Хорошо известно, что в приложениях весьма часто применяется разложение функции в степенной ряд Тейлора.

Напомним представление функции по формуле Тейлора.

Пусть функция $f(x)$ определена на открытом интервале I, содержащем точку a, и n раз дифференцируема на нем. Тогда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\ . \qquad (1)$$

Выражение $R_n(x)$ называют остаточным членом формулы Тейлора.

Существует несколько различных форм остаточного члена формулы Тейлора. Если остаточный член представлен в форме Пеано $R_n(x)=o((x-a)^n)$, то из (1) получаем так называемую локальную теорему Тейлора. Другой формой остаточного члена является форма Шлемимха-Роша:

$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^{n-p}(x-a)^p$, где $p\in \mathbf{N}$, $\xi\in(x, a)$.

Варьируя параметр p, получаем еще несколько форм остаточного члена. Например, при $p=1$ имеем форму Коши $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\left(1-\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{n-1}(x-a)^n$. При $p=n$ получаем форму Лагранжа $R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$, которая используется наиболее часто. Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в зарубежной литературе часто называют формулой Тейлора-Лагранжа.

Теорема Тейлора была сформулирована в XVIII в. Относительно промежуточной точки она является теоремой существования, но не дает совершенно никаких сведений о точном положении этой точки внутри интервала (a, x).

Вопрос описания положения промежуточной точки всегда интересовал исследователей и специалистов прикладных областей математики. С развитием вычислительной техники существенно расширились возможности поиска положения промежуточной точки, но все еще не существовало подходящего аналитического описания. Во второй половине XX в. возникли конструктивные идеи для поиска положения промежуточной точки.

S. Haber и O. Shisha в 1978 г. показали, что при подходящих условиях точка ξ лежит ближе к точке a, чем к x [6]. Затем Azpetia в 1982 г. предложил идею функционального описания положения промежуточной точки [1]. Его идею развил Ruben Mera [8], а уточнил коэффициенты в функциональном представлении промежуточной точки Ulrich Abel в 2003 г. [2].

Цель данной статьи – донести до читателя главные результаты последних лет, позволяющие определять положение промежуточной точки в формуле Тейлора, поскольку, несмотря на то что проблема относится к классическому анализу и существует очень давно, в отечественной литературе исследования в данной области не публиковались.

Описанный в статье метод с использованием частичных многочленов Белла является на данный момент самым точным и дает наиболее полную информацию о положении промежуточной точки.

Решение прикладных задач разложением функции в степенной ряд Тейлора наиболее подходит для практической реализации на ЭВМ, поскольку вычислительные затраты на суммирование членов ряда меньше, чем затраты на автоматическое дифференцирование или интегрирование. Но так как в функциональном ряду бесконечное количество членов, на практике очень полезна теорема Тейлора, дающая возможность производить приближенные вычисления.

2. Идея функционального описания положения промежуточной точки. Из теоремы Ролля легко видеть, что если $f^{(n+1)}(x)$ существует и отлична от нуля на I, то точка ξ, удовлетворяющая равенству (1), единственна. При таких условиях положение ξ на отрезке можно вычислять как значение некоторой числовой функции от x: $\xi=\xi(x)$. Эта идея была предложена в 1982 г. математиком Azpetia [1]. Следующее утверждение также доказано им.

Положим $\xi(a)=a$, тогда функция $\xi(x)$ будет непрерывной на интервале I.

Пусть n – фиксированное положительное целое число. А данная функция $f(x)$ n раз дифференцируема на I. Обозначим за $F(f)$ множество $\{j\geq 1: f^{(n+j)}(a)\neq 0\}$. Это множество строится

СОКОЛОВА Анна Николаевна – методист научно-исследовательского отдела ВятГГУ, выпускница факультета информатики ВятГГУ 2006 г.
© Соколова А. Н., 2007

из натуральных чисел j, для которых производная функции $f(x)$ порядка $n+j$ в точке a не обращается в нуль.

Предположим, что множество F не пусто для $f(x)$. Минимум $F(f)$ обозначим через p. Наконец, за λ обозначим число, определенное так:

$$\lambda = \left(C^n_{n+p}\right)^{1/p}. \qquad (2)$$

Если множество $F(f)$ пусто, то функция $f(x)$ представляет собой многочлен степени, меньшей либо равной n, и проблема поиска промежуточной точки не стоит, поскольку точное значение функции может быть получено довольно легко и нет необходимости применять теорему Тейлора.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ такая, что $F(f)$ не пусто. Допустим, что $f^{(n+p)}(x)$ существует, непрерывна, не обращается в нуль на I. Тогда $\xi(x)$ дифференцируема в a, причем $\xi'(a) = \lambda$.*

Доказательство: Пусть $x \in I$. Применим теорему Тейлора для $f(x)$ и $f^{(n)}(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+p)}(\tau)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p},$$

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a) + \frac{f^{(n+p)}(\sigma)}{p!}(\xi - a)^p.$$

В приведенных разложениях отсутствуют слагаемые $\frac{f^{(n+j)}(a)}{(n+j)!}(x-a)^{n+j}$, $j = 1, 2, \ldots, p-1$, поскольку $f^{(n+j)}(a) = 0$ для $j = 1, 2.., p-1$.

Отсюда из (1) получаем равенство

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+p)}(\tau)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+p)}(\sigma)}{n!\,p!}(x-a)^n(\xi-a)^p.$$

После приведения подобных слагаемых получаем

$$\frac{f^{(n+p)}(\tau)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p} = \frac{f^{(n+p)}(\sigma)}{n!\,p!}(x-a)^n(\xi-a)^p.$$

Поделим обе части равенства на $(x-a)^n$:

$$\frac{f^{(n+p)}(\tau)}{(n+p)!}(x-a)^p = \frac{f^{(n+p)}(\sigma)}{n!\,p!}(\xi-a)^p.$$

Преобразуем полученное выражение.

$$\frac{(\xi-a)^p}{(x-a)^p} = \frac{n!\,p!}{(n+p)!}\cdot\frac{f^{(n+p)}(\tau)}{f^{(n+p)}(\sigma)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\xi-a}{x-a} = \sqrt[p]{\frac{n!\,p!}{(n+p)!}\cdot\frac{f^{(n+p)}(\tau)}{f^{(n+p)}(\sigma)}}.$$

$$\frac{\xi(x)-a}{x-a} = \lambda\left(\frac{f^{(n+p)}(\tau)}{f^{(n+p)}(\sigma)}\right)^{1/p}.$$

При $x \to a$ левая часть равенства стремится к $\xi'(a)$, так как $\xi(a) = a$. Выражение в скобках в правой части стремится к 1. Теорема доказана.

Удивляет тот факт, что значение $\xi'(a)$ зависит не от конкретного вида функции $f(x)$, а от количества последовательных нулей $f^{(k)}(a)$ для $k > n$. Тем не менее производные высшего порядка $\xi^{(k)}(a)$, если они существуют, уже зависят от вида $f^{(k)}(a)$, $k > n$. Мы можем вычислить все значения следующих производных $\xi(x)$ в точке a всякий раз, когда они существуют.

Для простоты предположим, что $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая на I функция и что ряд Тейлора сходится равномерно на I. На время допустим существование $\xi^{(k)}(a)$, $k = 2, 3, \ldots$

Из (1) и $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, сразу же следует

$$f^{(n)}[\xi(x)] = n!\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-n}. \qquad (3)$$

Положим $p = 1$.

Тогда

$$f^{(n+1)}(\xi(x))\xi'(x) = n!\left(\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + 2\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(x-a) + 3\frac{f^{(n+3)}(a)}{(n+3)!}(x-a)^2 + \ldots + k\frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}(x-a)^{k-1} + \ldots\right).$$

Отсюда можно найти $\xi'(x)$:

$$\xi'(x) = \frac{n!}{f^{(n+1)}(\xi(x))}\left(\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + 2\frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(x-a) + 3\frac{f^{(n+3)}(a)}{(n+3)!}(x-a)^2 + \ldots + k\frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}(x-a)^{k-1} + \ldots\right).$$

$f^{(n+1)}(\xi(x)) \neq 0$ на I за счет непрерывности функции $\xi(x)$ на данном интервале.

Вычисляя значение функции $\xi'(x)$ в точке $x = a$, мы получаем тот же результат, как и раньше:

$$\xi'(a) = \frac{n!}{f^{(n+1)}(a)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \left(C^n_{n+1}\right)^{-1} = \lambda.$$

Мы можем продолжать процесс дифференцирования, чтобы вычислять следующие значения $\xi^{(k)}(a)$.

В общем случае для произвольного p имеем

$$f^{(n+p)}[\xi(x)](\xi'(x))^p + \\ + \frac{p!}{(p-2)!} f^{(n+p-1)}[\xi(x)](\xi'(x))^{p-2} \frac{\xi''(x)}{2!} + \ldots = \\ = \frac{n!\,p!}{(n+p)!} f^{(n+p)}(a) + \frac{n!(p+1)!}{(n+p+1)!} f^{(n+p+1)}(a)(x-a) + \\ + \frac{n!(p+2)!}{(n+p+2)!} f^{(n+p+2)}(a)(x-a)^2 + \ldots \quad (4)$$

Не трудно видеть, что для вычислений удобнее выбирать точку $a = 0$, если это возможно.

В частном случае при $p = 1$ $\xi(x) \approx a + (x - a)/2$ при $x \to a$. Такое асимптотическое поведение было описано Jacobson также в 1982 г. [7]

Но все еще необходимо было доказать существование $\xi^{(k)}(a)$, $k = 2, 3, \ldots$, что сделал Ruben Mera в 1992 г. [8]

Теорема 2. *Если $f(x)$ вещественная аналитическая функция на I и не многочлен, степени меньшей либо равной n, то $\xi^{(k)}(a)$ существует для всех $k \geq 1$.*

Доказательство. Мы предполагали, что функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на I, $\xi(x)$ непрерывна. Кроме того, поскольку множество $F(f)$ не пусто, в нем найдется число k, такое, что $f^{(n+k)}(\xi(x))$ не будет стремиться к нулю при $x \to a$ в некоторой проколотой окрестности U точки a, так как $f^{(n+k)}(a) \neq 0$.

Не сложно заметить, что эти особенности влекут за собой существование $\xi'(x)$ на U. Аналогично, существование $\xi^{(k)}(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a для всех $k \geq 2$ может быть доказано по индукции.

Равномерная сходимость функционального ряда с общим членом $f_n(x)$ означает, что для любого положительного числа ε найдется натуральное число $N(\varepsilon)$, обладающее свойством: для всех номеров $k > N$ выполняется неравенство $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Теперь, в предположении равномерной сходимости, выражение справа в (4) имеет предел при $x \to a$, следовательно, $\xi''(x)$ тоже будет иметь предел при $x \to a$. В силу непрерывности функции $\xi''(x)$, если предел $\xi''(x)$ при $x \to a$ существует, то существует $\xi''(a)$. Доказательство достигается по индукции.

Получилось, что если для функции $f(x)$ выполняются условия теорем 1 и 2, то положение промежуточной точки в остаточном члене ряда Тейлора этой функции может быть найдено по следующему алгоритму:

1. Найти значения производных $\xi^{(k)}(x)$ для $k = 1, 2, 3, \ldots, m$. Положение точки ξ будет вычисляться тем точнее, чем больше производных будет найдено.

2. Для данного интервала (a, x) вычисляем ξ по формуле

$$\xi(x) \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{\xi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ ,$$

где m – максимальный порядок известных производных $\xi^{(k)}(x)$.

Очевидно, что нахождение значений производных высшего порядка $\xi^{(k)}(a)$ представляет собой долгий и трудоемкий процесс. Кроме того, значение $\xi(x)$ все равно вычисляется приближенно, что увеличивает общую погрешность при вычислениях.

Рекуррентные соотношения Ulrich Abel [2] дают более точный результат. Но прежде чем перейти к их рассмотрению, нам понадобятся некоторые сведения о частичных многочленах Белла [4].

3. Многочлены Белла. Экспоненциальные частичные многочлены Белла – многочлены $B_{k,j}[x_v] = B_{k,j}(x_1, x_2, \ldots)$ от бесконечного числа переменных $x_1, x_2, \ldots$, которые определены формальным двойным разложением в ряд:

$$exp\left(\sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right) = \sum_{n,k\geq 0} B_{n,k}[x_v] \frac{t^n}{n!} \ . \quad (5)$$

В частности, из (5) следует, что

$$\frac{1}{k!}\left(\sum_{m\geq 1} x_m \frac{t^m}{m!}\right) = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}[x_v] \frac{t^n}{n!} \ , \quad (6)$$

Эти многочлены названы в честь Эрика Белла, который ввел в рассмотрение эти объекты в 1927 г. [4]

Частичные многочлены Белла имеют целые коэффициенты. Значение каждого частичного многочлена может быть вычислено по формуле

$$B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}) = \\ = \sum \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots (1!)^{i_1} (2!)^{i_2} \ldots} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots \ , \quad (7)$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целым числам $i_1, i_2, \ldots$, удовлетворяющим следующей системе:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + \ldots = k, \\ i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \ldots = n. \end{cases} \quad (8)$$

Заметим, что $B_{n,k}[x_v]$ зависит только от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1}$.

Поскольку наиболее полная таблица частичных многочленов Белла приведена в [4], а данный источник не доступен для большинства читателей, приведем таблицу значений $B_{n,k}[x_v]$ до $n = 10$ (см. таблицу). Для составления данной таблицы была написана программа, реализующая решение системы уравнений (8).

Поиск решений системы (8) производится в три этапа:

1) Генерация всех возможных разбиений числа k на слагаемые.

2) Для каждого разбиения генерируются перестановки.

Оба эти этапа представляют собой комбинаторные алгоритмы, имеющие временную сложность порядка $O(n!)$.

3) Для каждого полученного набора проверяется второе условие системы (8). Если равенство достигается, то вычисляется очередной коэффициент, таким образом, получаем по формуле (7) соответствующее слагаемое в выражении для частичного многочлена Белла.

Нам оказал поддержку своим вниманием и полезными замечаниями студент III курса специальности «Прикладная математика и информатика» Александр Михайлович Яновер. Он же расширил таблицу частичных многочленов Белла до $n = 13$.

4. О других формах представления коэффициентов в разложении функции $\xi(x)$. Следующие теоремы представляют собой основной результат Ulrich Abel.

Как и ранее, p – натуральное число, такое, что $f^{(n+j)}(a) = 0$ для всех j, $1 \le j < p$ и $f^{(n+p)}(a) \ne 0$.

Рекуррентные соотношения дают возможность получить для промежуточной точки ξ в (1) уточненное асимптотическое представление в виде ряда

$$\xi(x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k, \ (x \to a). \qquad (9)$$

Теорема 3. *Пусть n, p и q – натуральные числа. Функция $f(x)$ обладает в точке a из $\mathbf{R}$ производными до порядка $n + p + q$, причем $f^{(n+p+q)}(x)$ непрерывна в т. a. Если для функции множество $F(f)$ не пусто и $f^{(n+p)}(a) \ne 0$, то промежуточная точка $\xi = \xi(x)$ в равенстве (1) обладает асимптотическим представлением*

$$\xi(x) = a + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k + O(|x-a|^q), \ (x \to a), \qquad (10)$$

где $O(|x-a|^q)$, как обычно, обозначает функцию, ограниченную по сравнению с $(x-a)^q$, и коэффициенты c_k вычисляются по рекуррентной формуле

$$R_k(c_1,\dots,c_k) = (k+1)c_1 \sum_{i=1}^{k} \binom{1/p}{i} i! B_{k,i}[f_v] - \qquad (11)$$

$$- \sum_{j=1}^{k} (j+1) B_{k+1,j+1}(c_1,\dots,c_{k-j+1}) \sum_{i=1}^{j} \binom{1/p}{i} i! B_{j,i}[\tilde{f}_v];$$

$$c_1 = \left(C_{n+p}^{n}\right)^{1/p}, \ c_{k+1} = R_k(c_1,\dots,c_k) \qquad (12)$$

$$(k = 1, \dots, q-1);$$

$B_{k,j}[x_v] = B_{k,j}(x_1, x_2, \dots, x_{k-j+1})$ обозначают экспоненциальные частичные многочлены Белла от переменных $x_1, x_2, \dots$ и

$$f_j = \left(C_{n+p+j}^{j}\right)^{-1} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{f^{(n+p)}(a)}, \qquad (13)$$

$$\tilde{f}_j = \left(C_{n+p+j}^{n}\right)\left(C_{n+p}^{n}\right)^{-1} \cdot f_j, \ (j = 0, 1, \dots, q).$$

Напомним, что символ $\binom{1/p}{i}$ определяется так:

$$\binom{1/p}{i} = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{p} - 2\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{p} - i + 1\right). \qquad (14)$$

Замечание 1. Равенство (10) дает уточненное асимптотическое представление (9) в случае, когда $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая в точке a функция.

Если окажется, что функция $f(x)$ аналитическая в a, то ряд (9) сходится к $\xi(x)$.

Доказательство. В условиях теоремы можно применить формулу Лагранжа-Тейлора для разложения $f(x)$ в точке a в ряд до порядка $(n + p + q)$, и затем еще раз для разложения $f^{(n)}(\xi)$ в (1) до порядка $(p + q)$.

Таким образом, имеем

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \sum_{j=n+p}^{n+p+q-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j +$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+p+q}}{(n+p+q)!} f^{(n+p+q)}(\xi_1),$$

где ξ_1 расположена между a и x. Заметим, что в разложении не участвуют слагаемые, у которых $j = n + 1, n + 2, \dots, n + p - 1$ в силу того, что по условию теоремы для них $f^{(n+j)}(a) = 0$.

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(a) + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(p+j)!}(\xi-a)^{p+j} +$$

$$+ \frac{f^{(n+p+q)}(\xi_2)}{(p+q)!}(\xi-a)^{p+q},$$

где точка ξ_2 расположена между a и ξ.

Подставим разложение $f^{(n)}(\xi)$ в ряд Тейлора для $f(x)$. Получим

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{(x-a)^n}{n!}\left[f^{(n)}(a) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(p+j)!}(\xi-a)^{p+j} + \frac{(\xi-a)^{p+q}}{(p+q)!} f^{(n+p+q)}(\xi_2) \right].$$

Приравняв правые части выражений для $f(x)$, произведем уничтожение слагаемых в обеих частях выражения и получим

$$\sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(n+p+j)!}(x-a)^{p+j} + \frac{(x-a)^{p+q}}{(n+p+q)!} f^{(n+p+q)}(\xi_1) =$$

$$= \sum_{j=0}^{q-1} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{n!(p+j)!}(\xi-a)^{p+j} + \frac{(\xi-a)^{p+q}}{n!(p+q)!} f^{(n+p+q)}(\xi_2).$$

$B_{0,0}[x_v]=1$	$B_{n,1}[x_v]=x_n$	$B_{n,n}[x_v]=x_1^n$
n=3		
k=2	$B_{3,2}[x_v]=3x_1x_2$	
n=4		
k=2	$B_{4,2}[x_v]=4x_1x_3+3x_2^2$	
k=3	$B_{4,3}[x_v]=6x_1^2x_2$	
n=5		
k=2	$B_{5,2}[x_v]=5x_1x_4+10x_2x_3$	
k=3	$B_{5,3}[x_v]=10x_1^2x_3+15x_1x_2^2$	
k=4	$B_{5,4}[x_v]=10\,x_1^3x_2$	
n=6		
k=2	$B_{6,2}[x_v]=6x_1x_5+15x_2x_4+10x_3^2$	
k=3	$B_{6,3}[x_v]=15x_1^2x_4+60x_1x_2x_3+15x_2^3$	
k=4	$B_{6,4}[x_v]=45x_1^2x_2^2+20x_1^3x_3$	
k=5	$B_{6,5}[x_v]=15x_1^4x_2$	
n=7		
k=2	$B_{7,2}[x_v]=24x_1x_6+21x_2x_5+35x_3x_4$	
k=3	$B_{7,3}[x_v]=105x_1x_2x_4+21x_1^2x_5+70x_1x_3^2+105x_2^2x_3$	
k=4	$B_{7,4}[x_v]=210x_1^2x_2x_3+35x_1^3x_4+105x_1x_2^3$	
k=5	$B_{7,5}[x_v]=105x_1^3x_2^2+35x_1^4x_3$	
k=6	$B_{7,6}[x_v]=21x_1^5x_2$	
n=8		
k=2	$B_{8,2}[x_v]=229x_1x_7+96x_2x_6+56x_3x_5+35x_4^2$	
k=3	$B_{8,3}[x_v]=168x_1x_2x_5+280x_1x_3x_4+96x_1^2x_6+210x_2^2x_4+280x_2x_3^2$	
k=4	$B_{8,4}[x_v]=420x_1^2x_2x_4+840x_1x_2^2x_3+280x_1^2x_3^2+56x_1^3x_5+105x_2^4$	
k=5	$B_{8,5}[x_v]=560x_1^3x_2x_3+420x_1^2x_2^3+70x_1^4x_4$	
k=6	$B_{8,6}[x_v]=210x_1^4x_2^2+56x_1^5x_3$	
k=7	$B_{8,7}[x_v]=28x_1^6x_2$	
n=9		
k=2	$B_{9,2}[x_v]=9x_1x_8+36x_2x_7+84x_3x_6+126x_4x_5$	
k=3	$B_{9,3}[x_v]=280x_3^3+36x_1^2x_7+378x_2^2x_5+252x_1x_2x_6+1260x_2x_3x_4$	
k=4	$B_{9,4}[x_v]=756x_1^2x_2x_5+1260x_1^2x_3x_4+1890x_1x_2^2x_4+2520x_1x_2x_3^2+290x_1^3x_6+1260x_2^3x_3$	
k=5	$B_{9,5}[x_v]=3780x_1^2x_2^2x_3+1260x_1^3x_2x_4+840x_1^3x_3^2+126x_1^4x_5+945x_1x_2^4$	
k=6	$B_{9,6}[x_v]=1260x_1^3x_2^3+1260x_1^4x_2x_3+126x_1^5x_4$	
k=7	$B_{9,7}[x_v]=378x_1^5x_2^2+84x_1^6x_3$	
k=8	$B_{9,8}[x_v]=36x_1^7x_2$	
n=10		
k=2	$B_{10,2}[x_v]=126x_5^2+210x_4x_6+120x_3x_7+45x_2x_8+10x_1x_9$	
k=3	$B_{10,3}[x_v]=10309x_1x_2x_7+2907x_1x_3x_6+1260x_1x_4x_5+2520x_2x_3x_5+14175x_1^2x_8+2180x_2^2x_6+1575x_2x_4^2+2100x_3^2x_4$	
k=4	$B_{10,4}[x_v]=12600x_1x_2x_3x_4+4361x_1^2x_2x_6+2520x_1^2x_3x_5+3780x_1x_2^2x_5+1575x_1^2x_4^2+6300x_2^2x_3^2+3436x_1^3x_7+$ $+2800x_1x_3^3+3150x_2^3x_4$	
k=5	$B_{10,5}[x_v]=9450x_1^2x_2^2x_4+12600x_1^2x_2x_3^2+2520x_1^3x_2x_5+4200x_1^3x_3x_4+12600x_1x_2^3x_3+726x_1^4x_6+945x_2^5$	
k=6	$B_{10,6}[x_v]=12600x_1^3x_2^2x_3+3150x_1^4x_2x_4+2100x_1^4x_3^2+4725x_1^2x_2^4+252x_1^5x_5$	
k=7	$B_{10,7}[x_v]=3150x_1^4x_2^3+2520x_1^5x_2x_3+210x_1^6x_4$	
k=8	$B_{10,8}[x_v]=630x_1^6x_2^2+120x_1^7x_3$	
k=9	$B_{10,9}[x_v]=45x_1^8x_2$	
n=11		
k=2	$B_{11,2}[x_v]=462x_5x_6+330x_4x_7+165x_3x_8+55x_2x_9+11x_1x_{10}$	
k=3	$B_{11,3}[x_v]=5775x_3x_4^2+4620x_3^2x_5+6930x_2x_4x_5+4620x_2x_3x_6+990x_2^2x_7+1386x_1x_5^2+2310x_1x_4x_6+1320x_1x_3x_7+$ $+495x_1x_2x_8+55x_1^2x_9$	
k=4	$B_{11,4}[x_v]=15400x_2x_3^3+34650x_2^2x_3x_4+6930x_2^3x_5+23100x_1x_3^2x_4+17325x_1x_2x_4^2+27720x_1x_2x_3x_5+6930x_1x_2^2x_6+$ $+6930x_1^2x_4x_5+4620x_1^2x_3x_6+1980x_1^2x_2x_7+165x_1^3x_8$	
k=5	$B_{11,5}[x_v]=17325x_2^4x_3+69300x_1x_2^2x_3^2+34650x_1x_2^3x_4+15400x_1^2x_3^3+69300x_1^2x_2x_3x_4+20790x_1^2x_2^2x_5+$ $+5775x_1^3x_4^2+9240x_1^3x_3x_5+4620x_1^3x_2x_6+330x_1^4x_7$	
k=6	$B_{11,6}[x_v]=10395x_1x_2^5+69300x_1^2x_2^3x_3+46200x_1^3x_2x_3^2+34650x_1^3x_2^2x_4+11550x_1^4x_3x_4+6930x_1^4x_2x_5+462x_1^5x_6$	
k=7	$B_{11,7}[x_v]=17325x_1^3x_2^4+34650x_1^4x_2^2x_3+4620x_1^5x_3^2+6930x_1^5x_2x_4+462x_1^6x_5$	
k=8	$B_{11,8}[x_v]=6930x_1^5x_2^3+4620x_1^6x_2x_3+330x_1^7x_4$	
k=9	$B_{11,9}[x_v]=990x_1^7x_2^2+165x_1^8x_3$	
k=10	$B_{11,10}[x_v]=55x_1^9x_2$	

n=12	
k=2	$B_{12,2}[x_v]=462x_6^2+792x_5x_7+495x_4x_8+220x_3x_9+66x_2x_{10}+12x_1x_{11}$
k=3	$B_{12,3}[x_v]=5775x_4^3+27720x_3x_4x_5+9240x_3^2x_6+8316x_2x_5^2+13860x_2x_4x_6+7920x_2x_3x_7+1485x_2^2x_8+5544x_1x_5x_6+$ $+3960x_1x_4x_7+1980x_1x_3x_8+660x_1x_2x_9+66x_1^2x_{10}$
k=4	$B_{12,4}[x_v]=15400x_3^4+138600x_2x_3^2x_4+51975x_2^2x_4^2+83160x_2^2x_3x_5+13860x_2^3x_6+69300x_1x_3x_4^2+55440x_1x_3^2x_5+$ $+83160x_1x_2x_4x_5+55440x_1x_2x_3x_6+11880x_1x_2^2x_7+8316x_1^2x_5^2+13860x_1^2x_4x_6+7920x_1^2x_3x_7+2970x_1^2x_2x_8+$ $+220x_1^3x_9$
k=5	$B_{12,5}[x_v]=138600x_2^3x_3^2+51975x_2^4x_4+184800x_1x_2x_3^3+415800x_1x_2^2x_3x_4+83160x_1x_2^3x_5+138600x_1^2x_3^2x_4+$ $+103950x_1^2x_2x_4^2+166320x_1^2x_2x_3x_5+41580x_1^2x_2^2x_6+27720x_1^3x_4x_5+18480x_1^3x_3x_6+7920x_1^3x_2x_7+495x_1^4x_8$
k=6	$B_{12,6}[x_v]=10395x_2^6+207900x_1x_2^4x_3+415800x_1^2x_2^2x_3^2+207900x_1^2x_2^3x_4+61600x_1^3x_3^3+277200x_1^3x_2x_3x_4+$ $+83160x_1^3x_2^2x_5+17325x_1^4x_4^2+27720x_1^4x_3x_5+13860x_1^4x_2x_6+792x_1^5x_7$
k=7	$B_{12,7}[x_v]=62370x_1^2x_2^5+277200x_1^3x_2^3x_3+138600x_1^4x_2x_3^2+103950x_1^4x_2^2x_4+27720x_1^5x_3x_4+16632x_1^5x_2x_5+$ $+924x_1^6x_6$
k=8	$B_{12,8}[x_v]=51975x_1^4x_2^4+83160x_1^5x_2^2x_3+9240x_1^6x_3^2+13860x_1^6x_2x_4+792x_1^7x_5$
k=9	$B_{12,9}[x_v]=13860x_1^6x_2^3+7920x_1^7x_2x_3+495x_1^8x_4$
k=10	$B_{12,10}[x_v]=1485x_1^8x_2^2+220x_1^9x_3$
k=11	$B_{12,11}[x_v]=66x_1^{10}x_2$
n=13	
k=2	$B_{13,2}[x_v]=532x_6x_7+399x_5x_8+221x_4x_9+88x_3x_{10}+24x_2x_{11}+4x_1x_{12}$
k=3	$B_{13,3}[x_v]=13976x_4^2x_5+11180x_3x_5^2+18634x_3x_4x_6+5324x_3^2x_7+11180x_2x_5x_6+7986x_2x_4x_7+3993x_2x_3x_8+$ $+665x_2^2x_9+1863x_1x_6^2+3194x_1x_5x_7+1996x_1x_4x_8+887x_1x_3x_9+266x_1x_2x_{10}+24x_1^2x_{11}$
k=4	$B_{13,4}[x_v]=62115x_3^3x_4+139760x_2x_3x_4^2+11180_8x_2x_3^2x_5+83856x_2^2x_4x_5+5590_4x_2^2x_3x_6+7986x_2^3x_7+23293x_1x_4^3+$ $+111808x_1x_3x_4x_5+37269x_1x_3^2x_6+33542x_1x_2x_5^2+55904x_1x_2x_4x_6+31945x_1x_2x_3x_7+5989x_1x_2^2x_8+11180x_1^2x_5x_6+$ $+7986x_1^2x_4x_7+3993x_1^2x_3x_8+1331x_1^2x_2x_9+88x_1^3x_{10}$
k=5	$B_{13,5}[x_v]=186347x_2^2x_3^3+279521x_2^3x_3x_4+41928x_2^4x_5+62115x_1x_3^4+5590_{43}x_1x_2x_3^2x_4+209641x_1x_2^2x_4^2+$ $+33542_5x_1x_2^2x_3x_5+55904x_1x_2^3x_6+139760x_1^2x_3x_4^2+111808x_1^2x_3^2x_5+167712x_1^2x_2x_4x_5+111808x_1^2x_2x_3x_6+$ $+23958x_1^2x_2^2x_7+11180x_1^3x_5^2+18634x_1^3x_4x_6+10648x_1^3x_3x_7+3993x_1^3x_2x_8+221x_1^4x_9$
k=6	$B_{13,6}[x_v]=83856x_2^5x_3+559043x_1x_2^3x_3^2+209641x_1x_2^4x_4+372695x_1^2x_2x_3^3+838564x_1^2x_2^2x_3x_4+167712x_1^2x_2^3x_5+$ $+186347x_1^3x_3^2x_4+139760x_1^3x_2x_4^2+223617x_1^3x_2x_3x_5+5590_4x_1^3x_2^2x_6+27952x_1^4x_4x_5+18634x_1^4x_3x_6+$ $+7986x_1^4x_2x_7+399x_1^5x_8$
k=7	$B_{13,7}[x_v]=41928x_1x_2^6+419282x_1^2x_2^4x_3+559043x_1^3x_2^2x_3^2+279521x_1^3x_2^3x_4+62115x_1^4x_3^3+279521x_1^4x_2x_3x_4+$ $+83856x_1^4x_2^2x_5+13976x_1^5x_4^2+22361x_1^5x_3x_5+11180x_1^5x_2x_6+532x_1^6x_7$
k=8	$B_{13,8}[x_v]=83856x_1^3x_2^5+279521x_1^4x_2^3x_3+111808x_1^5x_2x_3^2+83856x_1^5x_2^2x_4+18634x_1^6x_3x_4+11180x_1^6x_2x_5+$ $+532x_1^7x_6$
k=9	$B_{13,9}[x_v]=41928x_1^5x_2^4+55904x_1^6x_2^2x_3+5324x_1^7x_3^2+7986x_1^7x_2x_4+399x_1^8x_5$
k=10	$B_{13,10}[x_v]=7986x_1^7x_2^3+3993x_1^8x_2x_3+221x_1^9x_4$
k=11	$B_{13,11}[x_v]=665x_1^9x_2^2+88x_1^{10}x_3$
k=12	$B_{13,12}[x_v]=24x_1^{11}x_2$

Преобразуем полученное выражение:

$$\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(n+p+j)!}(x-a)^{p+j}-\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{n!(p+j)!}(\xi-a)^{p+j}=$$
$$=\frac{f^{(n+p+q)}(\xi_2)}{n!(p+q)!}(\xi-a)^{p+q}-\frac{f^{(n+p+q)}(\xi_1)}{(n+p+q)!}(x-a)^{p+q}$$

В силу непрерывности $f^{(n+p+q)}(x)$ заключаем, что

$$\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(n+p+j)!}(x-a)^{p+j}-\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{n!(p+j)!}(\xi-a)^{p+j}=$$

$$=O(|x-a|^{p+q})\ (x\to a).$$

Продолжим преобразования предпоследнего выражения:

$$\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!}(x-a)^{p}+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(n+p+j)!}(x-a)^{p+j}=$$
$$=\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{n!(p+j)!}(\xi-a)^{p+j}+O(|x-a|^{p+q})\quad,$$
$$(x\to a).$$

Делим обе части на $\frac{f^{(n+p)}(a)}{(n+p)!}(x-a)^{p}$:

$$1+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)(x-a)^{p+j}(n+p)!}{(n+p+j)!f^{(n+p)}(a)(x-a)^{p}}=$$
$$=\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)(\xi-a)^{p+j}(n+p)!}{n!(p+j)!f^{(n+p)}(a)(x-a)^{p}}+\frac{(n+p)!O(|x-a|^{p+q})}{f^{(n+p)}(a)(x-a)^{p}},$$
$$(x\to a).$$

Преобразуем слагаемые, используя введенные функции f_j и $\widetilde{f}_j$ (13):

$$\frac{(n+p)!f^{(n+p+j)}(a)}{(n+p+j)!f^{(n+p)}(a)}=$$
$$=\frac{j!(n+p)!f^{(n+p+j)}(a)}{j!(n+p+j)!f^{(n+p)}(a)}=\frac{1}{j!}\left(C^{j}_{n+p+j}\right)^{-1}f_j\ ;$$

$$\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)(\xi-a)^{p+j}(n+p)!}{n!(p+j)!f^{(n+p)}(a)(x-a)^{p}}=$$
$$=\frac{(\xi-a)^{p}}{(x-a)^{p}}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)(\xi-a)^{j}(n+p)!p!}{f^{(n+p)}(a)n!(p+j)!p!}=$$
$$=\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{p}C^{p}_{n+p}\sum_{j=0}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)(\xi-a)^{j}p!j!}{f^{(n+p)}(a)(p+j)!j!}=$$
$$=\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{p}C^{p}_{n+p}\left[1+\sum_{j=1}^{q-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)(\xi-a)^{j}p!j!}{f^{(n+p)}(a)(p+j)!j!}\right]=$$
$$=\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{p}C^{p}_{n+p}\left[1+\sum_{j=1}^{q-1}\widetilde{f}_j\frac{(\xi-a)^{j}}{j!}\right]$$

$$\widetilde{f}_j=C^{n}_{n+p+j}\left(C^{n}_{n+p}\right)^{-1}f_j=$$
$$=\frac{(n+p+j)!}{n!(p+j)!}\frac{n!p!}{(n+p)!}\left(C^{j}_{n+p+j}\right)^{-1}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{f^{(n+p)}(a)}=$$
$$=\frac{p!j!}{(p+j)!}\frac{f^{(n+p+j)}(a)}{f^{(n+p)}(a)}$$

После чего имеем

$$1+\sum_{j=1}^{q-1}f_j\frac{(x-a)^{j}}{j!}=$$
$$=\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^{p}C^{n}_{n+p}\left[1+\sum_{j=1}^{q-1}\widetilde{f}_j\frac{(\xi-a)^{j}}{j!}\right]+O(|x-a|^{q}),$$
$$(x\to a).$$

Заметим, что $(\xi-a)/(x-a)>0$. Извлечем корень степени p из обеих частей уравнения

$$\sqrt[p]{1+\sum_{j=1}^{q-1}f_j\frac{(x-a)^{j}}{j!}}=$$
$$=\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)\left(C^{n}_{n+p}\right)^{1/p}\sqrt[p]{1+\sum_{j=1}^{q-1}\widetilde{f}_j\frac{(\xi-a)^{j}}{j!}+O(|x-a|^{q})},(x\to a).$$

Откуда получаем биномиальное разложение

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i}{1/p}\left[\sum_{j=1}^{q-1}f_j\frac{(x-a)^{j}}{j!}\right]^{i}=$$
$$=\frac{\xi-a}{x-a}\left(C^{n}_{n+p}\right)^{1/p}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i}{1/p}\left[\sum_{j=1}^{q-1}\widetilde{f}_j\frac{(\xi-a)^{j}}{j!}+O(|x-a|^{q})\right]^{i}$$

для всех x, достаточно близких к a.

Следовательно, что для каждого целого числа $m=1,\ldots,q$ будет выполняться равенство

$$(x-a)\sum_{i=0}^{m-1}\binom{i}{1/p}\left[\sum_{j=1}^{m-1}f_j\frac{(x-a)^{j}}{j!}\right]^{i}=$$
$$=(\xi-a)\left(C^{n}_{n+p}\right)^{1/p}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{i}{1/p}\left[\sum_{j=1}^{m-1}\widetilde{f}_j\frac{(\xi-a)^{j}}{j!}\right]^{i}+O(|x-a|^{m+1}),$$
$$x\to a.$$

После применения формулы (6) имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{k+1}}{k!}\sum_{i=0}^{k}C^{i}_{1/p}i!B_{k,i}[f_v]=$$
$$=\left(C^{n}_{n+p}\right)^{1/p}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(\xi-a)^{j+1}}{j!}\sum_{i=0}^{j}C^{i}_{1/p}i!B_{j,i}[\widetilde{f}_v]+O(|x-a|^{m+1}),$$
$$(x\to a).\qquad(15)$$

Чтобы установить асимптотическое представление (10) и рекуррентную формулу (11), прибегнем к математической индукции по m.

При $\mathbf{B}_{0,0}[x_v]=1$ для $m=1$ выражение (15) принимает вид $x-a=\left(C^{n}_{n+p}\right)^{1/p}(\xi-a)+O(|x-a|^{2})$ при $x\to a$.

Отсюда $\xi = a + c_1(x-a) + O(|x-a|^2)$ с коэффициентом $c_1 = \left(C^n_{n+p}\right)^{1/p}$.

Сейчас предположим, что для любого m, $2 \le m < q$,

$$\xi(x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k + O(|x-a|^m),\ (x \to a) \quad (16)$$

с коэффициентами c_k, определенными по формулам (11). В силу (10) мы можем записать

$$\xi = a + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{m!}(x-a)^m \cdot r(x), \quad (17)$$

где функция $r(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a. Подставим выражение (17) в (15) и снова применим формулу (6). Имеем

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+1}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{1/p}{i} i! B_{k,i}[f_v] =$$

$$= c_1^{-1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{j=0}^{k} (j+1) B_{k+1,j+1}(c_1, \ldots, c_{m-1}, r(x)) \times \quad (18)$$

$$\times \sum_{i=0}^{j} \binom{1/p}{i} i! B_{j,k}[\tilde{f}_v] + O(|x-a|^{m+1}),\ x \to a.$$

Заметим, что все $\mathbf{B}_{k+1,j+1}(c_1, \ldots, c_{m-1}, r(x))$ в последней формуле не зависят от $r(x)$ за исключением случая, когда $k = m-1$ и $j = 0$, где $\mathbf{B}_{m,1}(c_1, \ldots, c_{m-1}, r(x)) = r(x)$. Таким образом, приравнивая коэффициенты при $(x-a)^{k+1}$, мы получим для $k = 0$ очевидное равенство $1 = c_1^{-1}\mathbf{B}_{1,1}[c_v]$, и для $k = 1, 2, \ldots, m-2$ формулу $c_{k+1} = \mathbf{R}_k(c_1, \ldots, c_k)$.

Для $k = m-1$ мы заключаем, что $r(x) = \mathbf{R}_m(c_1, \ldots, c_m) + O(|x-a|)$ при $x \to a$. Ввиду (17) это влечет, что

$$\xi(x) = a + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k + O(|x-a|^{m+1}),\ x \to a,$$

с коэффициентами $c_1, \ldots, c_m$, заданными соотношениями (11)–(13).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ – вещественная аналитическая в точке a функция. Известны натуральные числа n и p, где p определяется так же, как ранее. Тогда существует интервал I, содержащий точку a, такой, что промежуточная точка из выражения (1) единственным образом определяется на I и может быть представлена на нем в виде сходящегося ряда:*

$$\xi(x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k,$$

где коэффициенты c_k вычисляются по формулам (11) и (12).

В частном случае при $p = 1$ (т. е. $f^{(n+1)}(a) \ne 0$) формула (12) принимает более простой вид, и мы получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$c_1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$c_{k+1} = \frac{k+1}{n+1} f_k - \sum_{j=1}^{k} (j+1)\tilde{f}_j B_{k+1,j+1}(c_1, \ldots, c_{k-j+1}),$$

$$(k = 1, \ldots, q-1).$$

Замечание 2. Приведем формулы нескольких первых коэффициентов c_k:

$$c_1 = \left(C^n_{n+p}\right)^{1/p},$$

$$c_2 = \frac{2c_1}{p(p+1)}\left(\frac{p+1}{n+p+1} - c_1\right)\frac{f^{(n+p+1)}(a)}{f^{(n+p)}(a)},$$

$$c_3 = 3c_1\left((p+3)c_1^2 - 4c_1\frac{p+1}{n+p+1} - \frac{(p-1)(p+1)^2}{(n+p+1)^2}\right)\left(\frac{f^{(n+p+1)}(a)}{p(p+1)f^{(n+p)}(a)}\right)^2 +$$

$$+ \frac{6c_1}{p}\left(\frac{1}{(n+p+1)(n+p+2)} - \frac{c_1^2}{(p+1)(p+2)}\right)\frac{f^{(n+p+2)}(a)}{f^{(n+p)}(a)}.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству мы приходим к равенству

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{(n+p+j)!}(x-a)^{p+j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(n+p+j)}(a)}{n!(p+j)!}(\xi-a)^{p+j}$$

для всех x достаточно близких к a.

Результат действий, аналогичных проделанным выше, снова приводит к выражению (17). Его можно представить в виде

$$F(x, \xi) = g(x) - h(\xi) = 0, \quad (19)$$

где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{k+1}}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/p}{i} i! B_{k,i}[f_v],$$

$$h(\xi) = \left(C^n_{n+p}\right)^{1/p} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^{j+1}}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{1/p}{i} i! B_{j,i}[\tilde{f}_v].$$

В силу того, что

$$F'_{\xi}(a,a) = -h'(a) =$$

$$= -\left(C^p_{n+p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\xi-a)^{j+1}}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{i}{1/p} i! B_{j,i}[\tilde{f}_v]\right)'_{\xi=a} =$$

$$= -\left(C^p_{n+p}\right)^{1/p} \ne 0,$$

теорема об обратной функции гарантирует существование интервала $(a-\delta,\ a+\delta)$, где $\delta > 0$, на котором (19) может быть разрешено относительно ξ, причем единственным образом. Следовательно, ξ может быть однозначно выражена в окрестности точки a функцией $\xi = \xi(x)$. Более того, условие $h'(a) \ne 0$ влечет, что h – однозначная функция на некотором круге с центром в точке a и обладающая аналитической обратной функцией h^{-1} в комплексной окрестности $h(a) = 0$. Поскольку $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$, мы можем выбрать положительную константу r, такую, что $\xi(x) = h^{-1}(g(x))$ для всех x в интервале $(a-r,\ a+r)$, где композиция $h^{-1} \circ g$ есть аналитическая в круге $D_r(a) = \{z: |z-a| < r\}$ функция. В си-

лу всего перечисленного, функция $\xi(x)$ может быть разложена в степенной ряд (4), сходящийся для всех x из $D_r(a)$. Очевидно, что коэффициенты будут такими же, как в выражении (9).

Таким образом, доказаны соотношения, позволяющие вычислять положение промежуточной точки в формуле Лагранжа-Тейлора с любой степенью точности.

Рассмотренный в данной работе материал может быть использован в различных теоретических исследованиях, а также в многочисленных прикладных областях. Кроме того, этот материал в соответствующих аспектах должен отражаться в современных курсах математического анализа для студентов математических специальностей вузов.

Примечания

1. *Azpeitia, A. G.* On the Lagrange remainder of the Taylor formula, The Mathematical Association of America, MONTHLY 89 (1982) 311–312.

2. *Abel, U.* On the Lagrange Remainder of the Taylor Formula. The Mathematical Association of America, MONTHLY 110 (2003) 627–633.

3. *Bao-lin, Z.* A Note on the Mean Value Theorem for Integrals. The Mathematical Association of America, MONTHLY 104 (1997) 561–562.

4. Bell Polinomial [Electronic recourse] http://mathworld.wolfram.com/BellPolynomial.html

5. *Comtet, L.* Advanced Combinatorics. Reidel [Text] / L. Comtet. Dordrecht, 1974.

6. *Haber, S.* On the Location of the Intermediate Point in Taylor's Theorem [Text] / S. Haber, O. Shisha // General Inequalities 2: Proc. Second International Conference / Oberwolfach, 1978. P. 143–144.

7. *Jacobson, B.* On the mean value theorem for integrals, The Mathematical Association of America MONTHLY 89 (1982) 300–301.

8. *Mera, R.* On the Determination of the Intermediate Point in Taylor's Theorem [Text] / R. Mera. 1992. January. P. 56–58.

9. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления [Текст] / Г. М. Фихтенгольц. М.: Наука, 1970. Т. 2. 800 с.

О. В. Старостина

ИНЪЕКТИВНЫЕ ИДЕАЛЫ АБЕЛЕВО-РЕГУЛЯРНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОЛУКОЛЕЦ

Дан критерий инъективности идеалов *arp*-полуколец. В частности, получено, что произвольное *arp*-полукольцо S самоинъективно тогда и только тогда, когда S является полной булевой решеткой.

Полукольцо S называется *абелево-регулярным положительным*, или *arp-полукольцом*, если S – положительное (т. е. элемент $a + 1$ обратим в S для любого элемента $a \in S$) и абелево-регулярное полукольцо (т. е. для каждого $a \in S$ уравнение $axa = a$ разрешимо в S и любой его идемпотент e перестановочен со всеми элементами из S). Основные понятия и структурная теория класса *arp*-полуколец развиты в работе [1].

Пусть $L(S)$ – множество всех идемпотентов *arp*-полукольца S, а $U(S)$ – множество всех обратимых элементов в S. Изучение *arp*-полуколец сводится к изучению троек $<L(S), U(S), \varphi_S>$. $<U(S), +, \cdot>$ – полутело без нуля относительно операций сложения и умножения в S. $<L(S), \vee, \cdot>$ – ограниченная дистрибутивная решетка (с 0 и 1) относительно операции умножения $\cdot$ полукольца S и сложения $\vee$. При этом операция сложения $\vee$ определяется следующим образом: каждый элемент a *arp*-полукольца S представляется в виде произведения $a = e_a \cdot u$ обратимого элемента $u \in U(S)$ и однозначно определенного идемпотента $e_a \in L(S)$ [1, предложение 2.1], поэтому полагают $f \vee g = e_{f+g}$. Любой идеал I *arp*-полукольца S представляется в виде

$$I = \sum_{e \in L(S) \cap I} eU(S) = (L(S) \cap I) \cdot U(S)$$ [2].

Будем рассматривать левые S-полумодули. Каждый идеал полукольца S является S-полумодулем. В частности, само полукольцо S есть S-полумодуль. Полумодуль ${}_SM$ называется *инъективным*, если для произвольных полумодуля ${}_SA$ и его подполумодуля ${}_SB$ любой S-гомоморфизм $h : B \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $k : A \to M$. Полукольцо S называется *самоинъективным*, если полумодуль ${}_SS$ инъективен.

Описание инъективных полумодулей над булевыми решетками дано Т. С. Фофановой в [3]:

Теорема А. *Полумодуль над булевой решеткой инъективен тогда и только тогда, когда он является полной и бесконечно дистрибутивной решеткой.*

Если S – решетка, то S-полумодуль M является верхней полурешеткой с 0, и M можно рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного порядка $m_1 \le m_2 \Leftrightarrow m_1 + m_2 = m_2$, $m_1, m_2 \in M$. Полумодуль ${}_SM$ называется *полным*, если полурешетка M является полной решеткой, т. е. любое непустое подмножество $A \subseteq M$ имеет $\sup A = \vee A$ и $\inf A = \wedge A$. Так как M – полурешетка с 0, то для полноты достаточно существования $\vee A$ для любого непустого подмножества $A \subseteq M$. Полный полумодуль ${}_SM$ называется *бесконечно дистрибутивным*, если $m + \bigwedge\limits_{i \in I} m_i = \bigwedge\limits_{i \in I} (m + m_i)$ (или, что эквивалентно, $m \wedge (\bigvee\limits_{i \in I} m_i) = \bigvee\limits_{i \in I} (m \wedge m_i)$ [4, с. 137]) для любых m, $m_i \in M$ $(i \in I)$.

СТАРОСТИНА Ольга Валентиновна – аспирант кафедры высшей математики ВятГГУ
© Старостина О. В., 2007

Теорема В [4, с. 148]. *Любая полная булева решетка бесконечно дистрибутивна.*

Теорема 1. *Идеал I arp-полукольца S инъективен тогда и только тогда, когда I является полной булевой подрешеткой в $L(S)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть I – инъективный левый идеал *arp*-полукольца S. Докажем сначала, что идеал $I \subseteq L(S)$ и является инъективным $L(S)$-полумодулем. Рассмотрим S-полумодуль $L(S)\times S$ с покоординатно заданной операцией сложения $(e, s_1) + (g, s_2) = (e \vee g, s_1 + s_2)$ и произведением $(eu)\cdot(g, s_1) = (eg, eus_1)$, $e, g \in L(S)$, $u \in U(S)$, $s_1, s_2 \in S$. На этом полумодуле определим конгруэнцию σ:

$(e, s_1)\ \sigma\ (g, s_2)$ означает, что $e = g$ и $s_1\ \rho(eS)\ s_2$, где $\rho(eS)$ – конгруэнция Берна по идеалу eS, т. е. $s_1\ \rho(eS)\ s_2 \Leftrightarrow s_1 + ex = s_2 + ey$ для некоторых $x, y \in S$. Пусть ${}_sT = {}_S(L(S)\times S)/\sigma$. Отождествим класс конгруэнции $[(0, s)]_\sigma \equiv s$ с элементами $s \in S$. Обозначим $[(1, 0)]_\sigma \equiv \infty$. Тогда $[(e, s)]_\sigma = e\cdot[(1, 0)]_\sigma + [(0, s)]_\sigma = e\cdot\infty + s$. Ясно, что ${}_sS \subseteq {}_sT$, $\infty + s = \infty$ и $u\cdot\infty = \infty$ для любых $s \in S$, $u \in U(S)$.

Рассмотрим тождественный S-гомоморфизм h: $I \to I$. Существует S-гомоморфизм k: $T \to I$, продолжающий h. Если $k(1) = i$, то $i = h(i) = k(i) = ik(1) = i^2$ и $i \in L(S)$. Для любого $e \in L(S)\cap I$ $e = h(e) = ek(1) = ei$, поэтому $e \le i$. Обозначим $j = k(\infty)$ и покажем, что $j = i$. Пусть $j = eu$, $e \in L(S)\cap I$, $u \in U(S)$. Тогда $ue = j = k(\infty) = k(u\cdot\infty) = u\cdot k(\infty) = uj$, отсюда $j = e \le i$. С другой стороны, $j = k(\infty) = k(\infty + i) = k(\infty) + h(i) = j + i = (j\vee i)w$ для некоторого $w \in U(S)$, откуда $j = i \vee j$ и $j \ge i$. Таким образом, $j = i$. Для любого $v \in U(S)$ имеем $i = k(\infty) = k(v\cdot\infty) = v\cdot k(\infty) = vi$, тогда для каждого $e \in L(S)$ $e = ei = eiv = ev$. Следовательно, $I = (I\cap L(S))\cdot U(S) = I\cap L(S) \subseteq L(S)$.

Идеал I можно рассматривать как $L(S)$-полумодуль. Так как отображение π: $S \to L(S)$, $eu \mapsto e$ ($e \in L(S)$, $u \in U(S)$), – эпиморфизм [1, предложение 2.1], то инъективный S-полумодуль I инъективен и как $L(S)$-полумодуль [5, с. 50].

Осталось убедиться в том, что инъективный идеал I решетки $L(S)$ является полной булевой подрешеткой в $L(S)$. Пусть I – инъективный $L(S)$-полумодуль. Так как существует эпиморфное отображение любой дистрибутивной решетки на двухэлементную цепь, то I – инъективная полурешетка [5], а значит, является полной, бесконечно дистрибутивной подрешеткой $L(S)$ (теорема А).

Рассмотрим тождественный $L(S)$-гомоморфизм h: $I \to I$. Дистрибутивная решетка $L(S)$ вкладывается в булеву решетку B [6, гл. II, § 4], поэтому h можно продолжить до $L(S)$-гомоморфизма k: $B \to I$. Дополнение элемента e в решетке B будем обозначать e'. Тогда для любого $e \in I$ $0 = k(0) = k(ee') = e\cdot k(e')$ и $i = k(1) = k(e \vee e') = h(e) \vee k(e') = e \vee k(e')$. Это означает, что каждый элемент e в идеале I имеет дополнение, равное $k(e')$. Таким образом, I является полной булевой подрешеткой в $L(S)$.

Достаточность. Пусть идеал I *arp*-полукольца S является полной булевой подрешеткой решетки $L(S)$. Обозначим через i наибольший элемент идеала I. Так как идемпотент каждого элемента *arp*-полукольца S определяется однозначно, то для любых $e \in I$, $u \in U(S)$ $e\cdot u = e$. Для произвольных e, $f \in I$ $e + f = (e \vee f)w = e \vee f$, где w некоторый обратимый элемент. Поэтому для любого S-полумодуля M подполумодуль iM можно рассматривать как I-полумодуль.

Пусть B – подполумодуль S-полумодуля A и $h : B \to I$ – S-гомоморфизм. Тогда iB – подполумодуль I-полумодуля iA и $\bar{h} = h|_{iB} : iB \to I$ можно рассматривать как I-гомоморфизм. Согласно теоремам А и В, I является инъективным I-полумодулем, поэтому $\bar{h}$ можно продолжить до I-гомоморфизма $\bar{k} : iA \to I$. Определим $k : A \to I$, полагая $k(a) = \bar{k}(ia)$, $a \in A$. Ясно, что k – полурешеточный гомоморфизм. Учитывая, что i – наибольший элемент идеала I, получаем $k(sa) = \bar{k}(isa) = is\,\bar{k}(ia) = s\,\bar{k}(ia) = sk(a)$ для любых $s \in S$, $a \in A$. Если $b \in B$, то $k(b) = \bar{k}(ib) = \bar{h}(ib) = h(ib) = ih(b) = h(b)$. Таким образом, k – S-гомоморфизм, продолжающий h. Поэтому идеал I *arp*-полукольца S инъективен.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Произвольное arp-полукольцо S самоинъективно тогда и только тогда, когда S является полной булевой решеткой.*

Следствие [7]. *Ограниченная дистрибутивная решетка самоинъективна тогда и только тогда, когда она является полной булевой решеткой.*

Замечание. Полумодуль ${}_sM$ называется *инъективным по Бэру*, если для любого идеала I полукольца S любой S-гомоморфизм $h : I \to M$ можно продолжить до S-гомоморфизма $k : S \to M$. Если L – решетка, то понятия инъективного и инъективного по Бэру L-полумодуля не совпадают. Полная бесконечно дистрибутивная небулева решетка L не самоинъективна, но самоинъективна по Бэру. Действительно, пусть I – идеал решетки L и $h : I \to L$ – L-гомоморфизм. Определим отображение $k : L \to L$ равенством $k(f) = f\cdot\vee\{h(e) \mid e \in I\}$, $f \in L$. Ясно, что k – L-гомоморфизм. Если $f \in I$, то $k(f) = f\cdot\vee\{h(e) \mid e \in I\} = \vee\{f\cdot h(e) \mid e \in I\} = \vee\{h(fe) \mid e \in I\} = h(f)$, т. е. k продолжает h. Следовательно, полумодуль ${}_LL$ инъективен по Бэру.

Примечания

1. *Вечтомов, Е. М.* Абелево-регулярные положительные полукольца [Текст] / Е. М. Вечтомов, А. В. Михалев, В. В. Чермных // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1997. Т. 20. С. 282–309.

2. *Старостина, О. В.* Об идеалах *arp*-полуколец / О. В. Старостина // Труды международной конференции «Современные методы физико-математических наук». Т. 1. Орел: Изд-во ОГУ, 2006. С. 191–193.

3. *Фофанова, Т. С.* Инъективность полигонов над булевыми алгебрами [Текст] / Т. С. Фофанова // Сибирский математический журнал. 1972. Т. 13. № 2. С. 452–458.

4. *Скорняков, Л. А.* Элементы теории структур [Текст] / Л. А. Скорняков. М.: Наука, 1982.

5. *Ильин, С. Н.* Полукольца, над которыми любой полумодуль инъективен (проективен) [Текст] / С. Н. Ильин // Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 50–53.

6. *Гретцер, Г.* Общая теория решеток [Текст] / Г. Гретцер. М.: Мир, 1982.

7. *Корниенко, В. С.* О самоинъективных дистрибутивных структурах [Текст] / В. С. Корниенко // Сибирский математический журнал. 1979. Т. 20. № 3. С. 579–585.

С. В. Турская

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА МАТЕМАТИЧЕСКИХ УТВЕРЖДЕНИЙ В КУРСЕ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

В статье рассматривается один из вариантов методики обучения методам доказательств математических утверждений в курсе дискретной математики.

Эдвард Шейнерман [Edward R. Scheinerman. Mathematics: A Discrete Introduction, Second Edition. Thomson Brooks/Cole, USA] высказывает мнение, что основная цель изучения этой науки – научиться писать доказательства. Это умение очень важно, ибо оно учит мыслить четко и логично.

Но проблема в том, что для многих студентов ужасно тяжело писать доказательства. Это происходит потому, что в традиционном подходе студента учат доказывать, показывая ему готовые примеры доказательств теорем. Но понять готовый пример – это еще не значит научиться доказывать. Многие студенты замирают, написав слово «*доказательство*» в тетради и не знают, что делать дальше. Эдвард Шейнерман на страницах своей книги снимает завесу тайны с процесса доказательства, расшифровывая особенности математического языка и снабжая студентов ***шаблонами доказательств***.

Он вводит 25 шаблонов написания доказательств. С помощью этих шаблонов можно доказать любую теорему дискретной математики. Главное – выбрать подходящий шаблон и правильно его применить.

ТУРСКАЯ Светлана Валентиновна – студентка V курса факультета информатики ВятГГУ
© Турская С. В., 2007

Таким образом, Шейнерман описывает совершенно новый подход к преподаванию дискретной математики: вместо того, чтобы учить студентов доказывать каждую теорему в отдельности, можно научить их использовать шаблоны доказательств. По каждой теме автор дает несколько шаблонов. Основная идея такова: сначала нужно написать начало и конец доказательства, оставив между ними свободное место. Затем нужно постепенно дополнять доказательство с обеих сторон, пока (в идеале) две части не встретятся в середине. Разобрав каждый шаблон на конкретном примере, студенты в дальнейшем смогут самостоятельно доказывать теоремы. С помощью этого подхода можно научить доказывать практически всех студентов, даже тех, кто не имеет особых способностей к математике. Каждый шаблон – это своего рода алгоритм, в шаблоне описывается последовательность шагов, произведя которые студент придет к доказательству теоремы.

Покажем, как реализуется подход Шейнермана, на примере двух разделов дискретной математики: комбинаторики и алгоритмов на графах.

КОМБИНАТОРИКА

Шаблон: Доказательство эквивалентности двух множеств.

Пусть A и B – множества. Чтобы показать, что A = B, у нас есть следующий шаблон:

• Пусть $x \in A$. ... Следовательно, $x \in B$.

• Пусть $x \in B$. ... Следовательно, $x \in A$.

Следовательно, A = B.

Пример:

Утверждение: Следующие множества эквивалентны:

$E = \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ четное}\}$

$F = \{z \in \mathbf{Z} : z = a + b, \text{ где } a \text{ и } b \text{ нечетные}\}$.

Другими словами, F – это множество всех целых чисел, которые могут быть записаны как сумма двух нечетных чисел. С использованием шаблона доказательство будет выглядеть так:

Пусть $E = \{x \in \mathbf{Z} : x - \text{четное}\}$ и $F = \{z \in \mathbf{Z} : z = a + b, \text{ где } a \text{ и } b - \text{нечетные}\}$. Нам нужно доказать, что E = F.

Пусть $x \in E$. ... Следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$. ... Следовательно, $x \in E$.

Следовательно, E = F.

Ч.т.д.

Начнем с первой части, расписав определения.

Пусть $E = \{x \in \mathbf{Z} : x \text{ четное}\}$ и $F = \{z \in \mathbf{Z} : z = a + b, \text{ где } a \text{ и } b \text{ нечетные}\}$. Нам нужно доказать, что E = F.

Пусть $x \in E$. *Мы знаем, что x – четное, а значит, оно делится на 2, отсюда x = 2y, где y – некоторое целое число. ...Значит, x – сумма двух нечетных чисел.* Следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$. ... *Следовательно*, $x \in E$.

Следовательно, $E = F$.

Ч.т.д.

Мы знаем, что $x = 2y$, и мы хотим представить x как сумму двух нечетных чисел. Вот как это можно сделать: $2y + 1$ нечетно и -1 тоже нечетно, так как $-1 = 2 \times (-1) + 1$. Итак, мы можем записать

$$x = 2y = (2y + 1) + (-1).$$

Давайте включим это в доказательство.

Пусть $E = \{x \in \mathbf{Z} : x$ четное$\}$ и $F = \{z \in \mathbf{Z} : z = a + b$, где a и b нечетные$\}$. Нам нужно доказать, что $E = F$.

Пусть $x \in E$. Мы знаем, что x четное, а значит, оно делится на 2, отсюда $x = 2y$, где y – некоторое целое число. *Заметим, что 2y + 1 и –1 нечетны. Таким образом, x = 2y = (2y + 1) + (–1).* Значит, x – сумма двух нечетных чисел. Следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$. ... Следовательно, $x \in E$.

Следовательно, $E = F$.

Ч.т.д.

Теперь будем работать над второй частью доказательства. Распишем определения.

Пусть $E = \{x \in \mathbf{Z} : x$ четное$\}$ и $F = \{z \in \mathbf{Z} : z = a + b$, где a и b нечетные$\}$. Нам нужно доказать, что $E = F$.

Пусть $x \in E$. Мы знаем, что x четное, а значит, оно делится на 2, отсюда $x = 2y$, где y – некоторое целое число. Заметим, что $2y + 1$ и -1 нечетны. Таким образом, $x = 2y = (2y + 1) + (-1)$. Значит, x – сумма двух нечетных чисел. Следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$. *Значит, x можно представить в виде x = a + b, где a и b нечетные. ...Значит, x можно представить в виде x = 2c, где c – целое число.* Следовательно, $x \in E$.

Следовательно, $E = F$.

Ч.т.д.

Мы имеем $x = a + b$. Нам нужно показать, что $x = 2c$.

Пусть $E = \{x \in \mathbf{Z} : x$ четное$\}$ и $F = \{z \in \mathbf{Z} : z = a + b$, где a и b нечетные$\}$. Нам нужно доказать, что $E = F$.

Пусть $x \in E$. Мы знаем, что x четное, а значит, оно делится на 2, отсюда, $x = 2y$, где y – некоторое целое число. Заметим, что $2y + 1$ и -1 нечетны. Таким образом, $x = 2y = (2y + 1) + (-1)$. Значит, x – сумма двух нечетных чисел. Следовательно, $x \in F$.

Пусть $x \in F$. Значит, x можно представить в виде $x = a + b$, где a и b нечетные. *По определению нечетности имеем: a = 2d + 1 и b = 2e + 1, где d и e – целые числа. Значит, x = a + b = 2d + 1 + 2e + 1 = 2(d + e + 1). Так как d, e и 1 – целые числа, значит, (d + e + 1) = c тоже целое число.* Значит, x можно представить в виде $x = 2c$, где c – целое число. Следовательно, $x \in E$.

Следовательно, $E = F$.

Ч.т.д.

Шаблон: Доказательство того, что одно множество является подмножеством другого.

Чтобы показать, что $A \subseteq B$:

Пусть $x \in A$. ... Следовательно, $x \in B$. Таким образом, $A \subseteq B$.

Пример:

Задача: Пусть $A = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \mid x\}$ и $B = \{x \in \mathbf{Z} : 2 \mid x\}$. Докажите, что $A \subseteq B$.

С использованием шаблона доказательство будет выглядеть так:

Пусть $A = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \mid x\}$ и $B = \{x \in \mathbf{Z} : 2 \mid x\}$. Нам нужно доказать, что $A \subseteq B$.

Пусть $y \in A$. ... Следовательно, $y \in B$. Таким образом, $A \subseteq B$.

Ч.т.д.

Теперь посмотрим, что мы имеем и что нам нужно. Мы знаем, что $y \in A$. Нам нужно доказать, что $y \in B$. Если $y \in A$, то $4 \mid y$, следовательно, существует целое число k, такое, что $y = 4k$. С другой стороны, если $y \in B$, то $2 \mid y$, значит, существует целое число n, такое, что $y = 2n$.

Дополним доказательство.

Пусть $A = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \mid x\}$ и $B = \{x \in \mathbf{Z} : 2 \mid x\}$. Нам нужно доказать, что $A \subseteq B$.

Пусть $y \in A$. *Значит, 4/y, значит, существует целое число k, такое, что y = 4k. ...Значит, существует целое число n, такое, что y = 2n. Значит, 2/y* . Следовательно, $y \in B$. Таким образом, $A \subseteq B$.

Ч.т.д.

Теперь мы знаем, что y можно представить в виде $y = 4k$, где k – целое число. Но $y = 4k = 2*2*k = 2(2k) = 2n$, где $n = 2k$ – целое число.

Пусть $A = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \mid x\}$ и $B = \{x \in \mathbf{Z} : 2 \mid x\}$. Нам нужно доказать, что $A \subseteq B$.

Пусть $y \in A$. Значит, $4 \mid y$, значит, существует целое число k, такое, что $y = 4k$. *Преобразуем: y = 4k = 2*2*k = 2(2k) = 2n.* Значит, существует целое число n, такое, что $y = 2n$. Значит, $2 \mid y$. Следовательно, $y \in B$. Таким образом, $A \subseteq B$.

Ч.т.д.

Шаблон: Комбинаторное доказательство.
Чтобы доказать равенство вида «ЛС (левая сторона) = ПС (правая сторона)», нужно:
Поставить вопрос вида «Сколькими способами?..».
С одной стороны, докажите, что ЛС – это правильный ответ на вопрос.
С другой стороны, докажите, что ПС – это правильный ответ.
Следовательно, ЛС = ПС.

Пример:
Утверждение: Пусть A и B – конечные множества. Тогда

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|.$$

Доказательство: Представим, что мы приклеиваем ярлычки ко всем объектам из этих множеств. Мы приклеиваем ярлычки «A» ко всем объектам из множества A и ярлычки «B» – ко всем объектам из B.

Вопрос: Сколько всего ярлычков мы приклеили?

С одной стороны, ответ на вопрос – $|A| + |B|$, потому что мы приклеили $|A|$ ярлычков к элементам A и $|B|$ ярлычков – к элементам B.

С другой стороны, мы приклеили, по крайней мере, 1 ярлычок к каждому элементу из $A \cup B$, т. е. $|A \cup B|$ – это количество элементов, которые получили 1 ярлычок. Элементы $A \cap B$ получили 2 ярлычка. Таким образом, $|A \cup B| + |A \cap B|$ – количество тех элементов, которые получили 1 ярлычок, и количество тех элементов, которые получили 2 ярлычка. Так мы и получаем количество ярлычков.

И так как два этих количества, $|A| + |B|$ и $|A \cup B| + |A \cap B|$, отвечают на один и тот же вопрос, они равны.

Ч.т.д.

Обычно комбинаторное доказательство используется, чтобы показать, что равенство верно, т. е. мы придумываем вопрос и затем доказываем, что обе стороны равенства дают правильный ответ на вопрос. Если это так, то стороны равенства равны.

Шаблон: Использование включения-исключения.
Подсчет с включением-исключением:
• Разделите объекты на «хорошие» (те, которые вы хотите посчитать) и «плохие» (те, которые вам не нужно считать).
• Решите, хотите ли вы сразу посчитать «хорошие» объекты или сначала посчитать «плохие», а затем вычесть их из общего количества.
• Поставьте задачу – определить размер объединения множеств. Каждое множество описывает один способ, при котором объекты могут быть «плохими» или «хорошими».
• Используйте включение-исключение.

Пример:
Задача: Даны перестановки из {1, 2, 3, 4}:

2143	2341	2413
3142	3412	3421
4123	4312	4321

Мы рассматриваем n! наборов. «Хорошие» наборы – это перестановки. «Плохие» наборы – это те наборы, где один (или более) элементов j из {1, 2, 3, ..., n} стоят на j-й позиции в наборе.

Подсчитаем количество «плохих» наборов и вычтем его из n!, чтобы найти количество «хороших» наборов.

Определим количество «плохих» наборов подсчетом количества элементов в их объединении. Существует n вариантов, при которых набор будет «плохим»: 1-й стоит на 1-й позиции, 2-й стоит на 2-й позиции, ..., n-й стоит на n-ой позиции. Итак, мы определяем следующие множества:

B_1 = {наборы, где 1-й стоит на 1-й позиции}
B_2 = {наборы, где 2-й стоит на 2-й позиции}
...
B_n = {наборы, где n-й стоит на n-й позиции}.

Наша цель – подсчитать $|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n|$ и затем вычесть это количество из n!. Чтобы определить размер объединения, воспользуемся теоремой о включении-исключении: $|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| - |B_1 \cap B_2| - |B_1 \cap B_3| - \ldots - |B_{n-1} \cap B_n| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| + \ldots + |B_{n-2} \cap B_{n-1} \cap B_n| - \ldots \pm |B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n|$.

Подсчитаем сначала $|B_1|$. Это количество наборов с 1 на 1-й позиции; остальные n – 1 элементов могут быть где угодно. Всего таких наборов (n – 1)!. Аналогично $|B_2| = (n-1)!$. Таким образом, мы имеем:

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| - \ldots = n(n-1)! - \ldots .$$

Далее рассмотрим $|B_1 \cap B_2|$. Это те наборы, где 1-й на 1-й позиции и 2-й на 2-й, а остальные n – 2 элемента могут быть где угодно. Таких наборов (n – 2)!. Действительно, для любых $i \neq j$ имеем $|Bi \cap Bj| = (n-2)!$. Всего таких парных пересечений будет $\binom{n}{2}$, и все они имеют размер (n – 2)!. Получим:

$$|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n| = |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| - |B_1 \cap B_2| - \ldots + \ldots = n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots .$$

Далее аналогично. В итоге мы получим:

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_n| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots \pm \binom{n}{n}(n-n)!.$$

Теперь вычтем $|B_1 \cup \ldots \cup B_n|$ из n!, чтобы получить количество «хороших» наборов. Получим:

$$n! - \left[\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots + -\binom{n}{n}(n-n)!\right] =$$

$$= \binom{n}{0}(n-0)! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - . - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + -\binom{n}{n}(n-n)!$$

Или иначе:

Количество перестановок =

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k}(n-k)!.$$

Мы можем упростить ответ. Вспомним, что $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Таким образом,

Количество перестановок =

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k}(n-k)! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!}(n-k)! =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}.$$

В итоге мы можем вынести n! вперед и получим:

$$\text{Количество перестановок} = n! \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Шаблон: Доказательство того, что множество пусто.

Чтобы доказать, что множество пусто:

Предположите, что множество не пусто, и рассуждайте, пока не столкнетесь с противоречием.

Пример:

Задача: Пусть A и B – множества. Докажите, что $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

Применим шаблон:

Пусть A и B – множества. Нужно доказать, что $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

Предположим обратное: $(A - B) \cap (B - A) \ldots \varnothing$.

…

$\Rightarrow \Leftarrow$ Следовательно, $(A - B) \cap (B - A)$ не может быть непустым, и наше утверждение доказано.

Ч.т.д.

Дополним доказательство:

Пусть A и B – множества. Нужно доказать, что $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

Предположим обратное: $(A - B) \cap (B - A) \neq \varnothing$.

Если $(A - B) \cap (B - A) \neq \varnothing$, значит, существует хотя бы один элемент x, принадлежащий $(A - B) \cap (B - A)$.

…

$\Rightarrow \Leftarrow$ Следовательно, $(A - B) \cap (B - A)$ не может быть непустым, и наше утверждение доказано.

Ч.т.д.

$(A - B) \cap (B - A)$ – это пересечение множеств, значит, все элементы, принадлежащие $(A - B)$, должны принадлежать и $(B - A)$.

Пусть A и B – множества. Нужно доказать, что $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

Предположим обратное: $(A - B) \cap (B - A) \neq \varnothing$.

Если $(A - B) \cap (B - A) \neq \varnothing$, значит, существует хотя бы один элемент x, принадлежащий $(A - B) \cap (B - A)$. *Если $x \in (A - B) \cap (B - A)$, значит, $x \in (A - B)$ и $x \in (B - A)$ одновременно.*

…

$\Rightarrow \Leftarrow$ Следовательно, $(A - B) \cap (B - A)$ не может быть непустым, и наше утверждение доказано.

Ч.т.д.

$(A - B)$ – разность множеств, значит, все элементы, которые принадлежат $(A - B)$, должны принадлежать A и не принадлежать B.

Пусть A и B – множества. Нужно доказать, что $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$.

Предположим обратное: $(A - B) \cap (B - A) \neq \varnothing$.

Если $(A - B) \cap (B - A) \neq \varnothing$, значит, существует хотя бы один элемент x, принадлежащий $(A - B) \cap (B - A)$. Если $x \in (A - B) \cap (B - A)$, значит, $x \in (A - B)$, и $x \in (B - A)$ одновременно.

Так как $x \in (A - B)$, значит, $x \in A$ и $x \notin B$.

Так как $x \in (B - A)$, значит, $x \in B$ и $x \notin A$.

Но элемент не может одновременно принадлежать и не принадлежать множеству.

$\Rightarrow \Leftarrow$ Следовательно, $(A - B) \cap (B - A)$ не может быть непустым, и наше утверждение доказано.

Ч.т.д.

ГРАФЫ

Шаблон: Доказательство теорем о деревьях удалением листьев.

Нужно доказать: какую-либо теорему о деревьях.

Доказательство: Мы доказываем результат методом индукции на количество вершин T.

Базисный шаг: Докажите, что теорема истинна для всех деревьев с $n = 1$ вершинами. (Это обычно просто.)

Индуктивное предположение: Предположите, что теорема истинна для всех деревьев с $n = k$ вершинами.

Пусть T – дерево с $n = k + 1$ вершинами. Пусть v – это лист T. Пусть $T' = T - v$. Заметим, что T' – это дерево с k вершинами, и по индукции для T' теорема выполняется.

Теперь используем тот факт, что для T' теорема истинна, чтобы доказать, что теорема выполняется и для T.

Таким образом, результат доказан по индукции.

Пример:

Теорема: Пусть T – это дерево с $n \geq 1$ вершинами. Тогда T имеет $n - 1$ ребро.

Доказательство:

Базисный шаг: Докажем, что теорема истинна для всех деревьев с $n = 1$ вершинами. Если T имеет только $n = 1$ вершину, то ясно, что оно имеет $0 = n - 1$ ребер.

Индуктивное предположение: Пусть теорема выполняется для всех деревьев с $n = k$ вершинами.

Пусть T – дерево с $n = k + 1$ вершинами. Нам нужно доказать, что T имеет $n - 1 = k$ ребро.

Пусть v – это лист T. Пусть $T' = T - v$. Заметим, что T' – это дерево с k вершинами, и по индукции для T' теорема выполняется (т. е. T' имеет $k - 1$ ребро).

Так как v – это лист T, $d(v) = 1$. Это значит, что когда мы удаляем v из T, то мы удаляем точно одно ребро. Следовательно, T имеет на одно ребро больше, чем T'. Значит, T имеет $(k - 1) + 1 = k$ ребер.

Таким образом, результат доказан по индукции.

Ч.т.д.

Заключение

Практика работы с данной схемой показала, что за меньшее количество учебных часов можно изучить больше материала. К тому же повышается эффективность обучения, потому что студенты понимают схему составления доказательства.

Методика Шейнермана не только помогает достичь успехов в дискретной математике, но и развивает личность студента, учит мыслить четко, логично, учит доказывать, обосновывать свою точку зрения. А это может пригодиться не только в науке, но и в повседневной жизни.

Н. Н. Храмова

О ФОРМИРОВАНИИ ТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ УЧАЩИХСЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

В статье идёт речь о целесообразности использования целостного комплекса самостоятельных работ в рамках изучаемой темы в курсе математики средней школы, выделены основные принципы его формирования, а также виды и формы самостоятельных работ учащихся, которые необходимо в него включить.

Одним из важнейших компонентов становления личности школьников является формирование их самостоятельности. Научить человека мыслить и работать можно лишь при условии развития человека как самостоятельной личности, способной к активной и творческой самоорганизации всех видов деятельности на основе самообразования, самовоспитания, саморазвития, овладения научной организацией умственного и физического труда. Развитие самостоятельности школьников является одновременно и основным условием и результатом обучения математике. Формирование самостоятельности может быть осуществлено через организацию самостоятельной работы учащихся на уроках математики и дома.

Под самостоятельной работой школьников понимают такую работу, которая выполняется ими по заданию учителя без его непосредственного участия (но под его руководством) в специально предоставленное для этого время. Для ее выполнения учащиеся должны приложить определённые усилия, выражая в той или иной форме результаты своих действий. Трудно переоценить значение самостоятельной работы учащихся, так как без неё невозможен процесс овладения знаниями на различных этапах урока: при изучении нового материала, его усвоении, обобщении и систематизации знаний и т. д. Однако

ХРАМОВА Наталья Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент по кафедре теории и методики обучения математике Пензенского государственного педагогического университета

© Храмова Н. Н., 2007

организация и построение самостоятельных работ ставят много проблем: когда необходимо предлагать самостоятельную работу, какие формы она должна иметь; какого типа задания необходимо и можно включать в самостоятельную работу; какова последовательность этих заданий и многое другое. В учебно-методической литературе указанные проблемы частично решаются в отношении обучающих и контролирующих самостоятельных работ, которые представлены в дидактических материалах к учебникам математики. Что же касается самостоятельных работ исследовательского характера, самостоятельного знакомства учащихся с новым учебным материалом на основе учебника, работы с дополнительной литературой, лабораторных и практических работ и так далее, то в учебно-методических пособиях содержатся лишь общие рекомендации по их организации и отсутствуют конкретные методические разработки. Это негативно отражается на эффективности организации самостоятельной работы учащихся в процессе обучения математике и не позволяет полностью реализовать её развивающий потенциал.

Анализ психолого-педагогической и методической литературы, а также собственный опыт работы позволил нам выделить ряд требований, способствующих повышению эффективности самостоятельной работы учащихся. К таковым можно отнести целесообразность и педагогическую обоснованность самостоятельной работы, развивающий характер её заданий, подготовленность учащихся к их самостоятельному выполнению, оптимальный выбор объема самостоя-

тельной работы на уроке и дома, перспективное планирование комплекса самостоятельных работ по теме, включающего их различные виды и формы, дифференцированный и индивидуальный подход при формировании системы самостоятельных работ школьников, а также контроль за их выполнением. Прокомментируем некоторые из них.

Целесообразность самостоятельной работы, проводимой в классе, предполагает соответствие её частно-дидактических целей, содержания, формы, продолжительности и места в учебном процессе поставленным целям урока. Обоснованность самостоятельной работы с педагогической точки зрения состоит в выявлении взаимосвязи между видами деятельности, предлагаемыми ею, и теми личностными качествами, которые должны развиваться в этой деятельности.

Система заданий для самостоятельной работы должна способствовать развитию интеллектуальных умений учащихся, навыков самообразования и самоконтроля и других.

Успешное выполнение учащимися самостоятельной работы во многом зависит от степени подготовленности учеников к ней. Подготовка школьников к выполнению самостоятельной работы определяется по нескольким направлениям. Во-первых, достижение учениками необходимого уровня знаний и умений по данной теме. Во-вторых, чёткие инструктивные указания учителя о цели, содержании, способах выполнения и формах выражения полученных результатов самостоятельной работы.

Планируя самостоятельную работу учащихся, следует иметь в виду необходимость определения её трудоёмкости и уточнения на этой основе её номенклатуры и объёма. Центр тяжести усвоения нового материала не должен приходиться на долю самостоятельного изучения. Для этой цели выбирается материал, доступный для учащихся. Особого внимания к себе требует объём самостоятельной работы, выполняемой дома. Например, он не должен превосходить 1/3 части выполненного на уроке.

Перспективное планирование системы самостоятельных работ предполагает в рамках тематического планирования уроков математики выделение материала для самостоятельного изучения школьниками, распределение его по урокам, определение форм и объема обучающих, контролирующих, исследовательских и других видов самостоятельных работ, а также рекомендуемых методов их выполнения. Таким образом, формируется комплекс заданий для самостоятельной работы при изучении той или иной темы, названный нами тематическим пакетом самостоятельных работ. На рисунке представлена схема, где указаны наиболее важные виды самостоятельных работ, на основе которых может формироваться тематический пакет.

При указанном подходе все самостоятельные работы в рамках изучаемой темы рассматриваются не по отдельности, а оказываются взаимосвязанными и подчинёнными одной конечной цели. Кроме того, планомерный характер приобретает процесс развития умений и навыков самостоятельной работы. Предложенная методика была апробирована автором в школах города Пензы и показала положительные результаты.

А. В. Черанева

КОЛЬЦО РАЗНОСТЕЙ ПОЛУТЕЛА

В статье определено и построено кольцо разностей для произвольного полутела. Доказано его существование и единственность. Показано, как кольцо разностей применяется при изучении строения полутел.

Исторически первым примером кольца разностей явилось кольцо $\mathbf{Z}$ целых чисел – кольцо разностей полукольца всех неотрицательных целых чисел. В дальнейшем было определено и построено кольцо разностей произвольного сократимого полукольца. Голан [1] построил кольцо разностей для незероидных полуколец. Его конструкция проходит также и для любого полукольца. Задача данной работы – построить кольцо разностей для произвольного полутела. Введем необходимые определения.

Непустое множество S с двумя бинарными операциями сложения и умножения называется *полукольцом*, если выполняются следующие условия:

1) $\langle S, + \rangle$ – коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S, \cdot \rangle$ – полугруппа;

3) 0 – мультипликативный нуль: $(\forall a \in S)\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

4) умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон:

$(\forall a, b, c \in S)\ \ a(b + c) = ab + ac$ и $(a + b)c = ac + bc$.

Полутела возникли в рамках теории полуколец – это полукольца с делением, не являющиеся кольцами. Поскольку любое полутело является антикольцом (полукольцом, на котором выполняется квазитождество $a + b = 0 \Rightarrow a = 0$), то можно отбросить его нулевой элемент. Легко видеть, что полутела без нуля образуют многообразие. Далее будем рассматривать полутела без нуля, которые будем называть просто *полутелами*.

ЧЕРАНЕВА Анна Владимировна – научный сотрудник кафедры высшей математики ВятГГУ

© Черанева А. В., 2007

Полутело называется (аддитивно) *сократимым*, если для любых его элементов a, b, c выполняется квазитождество $a + c = b + c \Rightarrow a = b$. Полутело *зероидное*, если для любого его элемента a существует элемент c такой, что $a + c = c$. В определении на самом деле достаточно требовать такое равенство для одного элемента, поскольку из $a + c = c$ следует $1 + ca^{-1} = ca^{-1}$, откуда $b + bca^{-1} = bca^{-1}$. Частный случай зероидных полутел – идемпотентные. Полутело называется (аддитивно) *идемпотентным*, если для всех его элементов выполняется равенство $a + a = a$.

Конгруэнция ρ на полутеле P называется *сократимой*, если $\forall a, b, c \in P\ ((a + c)\ \rho\ (b + c) \Rightarrow a\ \rho\ b)$.

Наконец, дадим определение кольца разностей полутела. *Кольцом разностей* полутела P называется пара $\langle R, h\rangle$, где R – кольцо, $h: P \to R$ есть гомоморфизм, удовлетворяющий условию универсальности: для любого гомоморфизма $f: P \to T$, где T – кольцо, существует единственный гомоморфизм $g: R \to T$ такой, что $g \circ h = f$.

Теорема. *Для любого полутела существует единственное с точностью до изоморфизма кольцо разностей.*

Доказательство. Докажем единственность. Предположим, что $\langle R, h\rangle$ и $\langle R', h'\rangle$ – кольца разностей. По определению существуют единственные гомоморфизмы $g: R \to R'$, $g': R' \to R$, $1_{R'}: R' \to R'$, $1_R: R \to R$ такие, что $g \circ h = h'$, $g' \circ h' = h$, $1_{R'} \circ h' = h'$, $1_R \circ h = h$. Поскольку $(g \circ g') \circ h' = h' = 1_{R'} \circ h'$ и $(g' \circ g) \circ h = h = 1_R h$, то $g \circ g' = 1_{R'}$ и $g' \circ g 1_R$. Кольца R и R' изоморфны.

Существование кольца разностей доказывается следующим построением. Зададим на множестве $P \times P$ операции сложения и умножения по следующим правилам: $\forall (a, b), (c, d) \in P \times P\ (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$ и $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$. Несложно убедиться в том, что данное множество является полукольцом без нуля. Зададим на этом множестве отношение ~ по правилу $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists\, x \in P: a + d + x = b + c + x$. Проверка соответствующих аксиом показывает, что это отношение является конгруэнцией. Поэтому можно рассматривать фактор множество $R = (P \times P)/\sim$, которое, как нетрудно видеть, является кольцом с единицей. Его элементы будем записывать в виде $(a, b)_\sim = [a, b]$, где $a, b \in P$. Единицей служит элемент $[2, 1]$, нулем – элемент $[1, 1]$, а противоположным элементу $[a, b]$ – элемент $[b, a]$. Докажем для примера дистрибутивность умножения относительно сложения в R:

$$[a_1, b_1]([a_2, b_2] + [a_3, b_3]) =$$
$$= [a_1, b_1]([a_2 + a_3, b_2 + b_3]) =$$
$$= [a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3,\ b_1a_2 + b_1a_3 + a_1b_2 + a_1b_3]$$
$$[a_1, b_1][a_2, b_2] + [a_1, b_1][a_3, b_3] =$$
$$= [a_1a_2 + b_1b_2,\ b_1a_2 + a_1b_2] +$$
$$+ [a_1a_3 + b_1b_3,\ b_1a_3 + a_1b_3] =$$
$$= [a_1a_2 + a_1a_3 + b_1b_2 + b_1b_3,$$
$$b_1a_2 + b_1a_3 + a_1b_2 + a_1b_3].$$

Зададим отображение h: $P \to R$ следующим образом: $h(a) = [a + 1, 1]$. Поскольку

$$h(ab) = [ab + 1, 1] = [ab + a + b + 1 + 1,$$
$$a + b + 1 + 1] = [(a + 1)(b + 1) + 1,$$
$$(a + 1) + (b + 1)] = [a + 1, 1][b + 1, 1] = h(a)h(b)$$

и $h(a + b) = [a + b + 1, 1] = [a + b + 1 + 1, 1 + 1] =$
$= [a + 1, 1] + [b + 1, 1] = h(a) + h(b)$,

то h – гомоморфизм.

Далее пусть f: $P \to T$ – гомоморфизм из полутела P в некоторое кольцо T. Тогда отображение $g: R \to T$, заданное правилом $g: [a, b] \mapsto f(a) - f(b)$, является гомоморфизмом колец и $g \circ h = f$. Докажем, что такой g единственный. Предположим, что существует еще один гомоморфизм $g': R \to T$ такой, что $g' \circ h = f$. Заметим, что

$$g(h(a)) = g'(h(a)) = f(a).$$

Тогда

$$g([a, b]) = g([a + 1, 1]) - g([b + 1, 1]) =$$
$$= g(h(a)) - g(h(b)) = g'(h(a)) - g'(h(b)) =$$
$$= g'([a + 1, 1]) - g'([b + 1, 1]) = g'([a, b]).$$

Следствие. *Любой элемент r кольца разностей полутела P представим в виде $r = h(a) - h(b)$, где $a, b \in P$, т. е. $R = h(P) - h(P)$. Кольцо разностей содержит* 1.

Приведем пример построения кольца разностей.

Пример 1. Рассмотрим декартово произведение полуполей $\mathbf{Q}^+$ – множества положительных рациональных чисел с обычными операциями сложения и умножения и $\mathbf{Q}^\vee$ – множества положительных рациональных чисел со сложением max и обычным умножением. Тогда множество $(\mathbf{Q}^+ \times \mathbf{Q}^\vee) \times (\mathbf{Q}^+ \times \mathbf{Q}^\vee)$, на котором заданы операции сложения и умножения по правилу

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) + ((a_3, b_3), (a_4, b_4)) =$$
$$= ((a_1 + a_3, \max(b_1, b_3)), (a_2 + a_4, \max(b_2, b_4)),$$
$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \cdot ((a_3, b_3), (a_4, b_4)) =$$
$$= ((a_1a_3 + a_2a_4, \max(b_1b_3, b_2b_4)),$$
$$(a_1a_4 + a_2a_3, \max(b_1b_4, b_2b_3)))$$

является полукольцом без нуля. Отношение ~ задается правилом

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \sim ((a_3, b_3), (a_4, b_4)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists (x, y) \in (\mathbf{Q}^+ \times \mathbf{Q}^\vee): (a_1 + a_4 + x, \max(b_1, b_4, y)) =$$
$$= (a_2 + a_3 + x, \max(b_2, b_3, y)),$$

и поэтому классы эквивалентности по ~ выглядят следующим образом:

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \sim ((a_1 + t, b_3), (a_2 + t, b_4))$$

для некоторого $t \in \mathbf{Q}$ такого, что $a_1 + t > 0$ и $a_2 + t > 0$.

Решетка конгруэнций рассматриваемого полутела есть декартово произведение четырех двухэлементных цепей, а решетка идеалов кольца разностей есть декартово произведение двух двухэлементных цепей.

Пример 2. Рассмотрим полукольцо $C^+(X)$ всех неотрицательных функций и полутело $U(X)$ всех положительных функций на топологическом пространстве X. Кольцом разностей $C^+(X)$ и $U(X)$ служит кольцо всех непрерывных функций на X.

Пусть $\langle R, h\rangle$ – кольцо разностей полутела P. Хорошо известен следующий факт:

Предложение 1. *h – инъекция тогда и только тогда, когда полутело P сократимо.*

Или, что то же самое, полутело вкладывается в кольцо тогда и только тогда, когда оно сократимо. Справедлив и другой крайний случай:

Предложение 2. *h – сюръекция тогда и только тогда, когда P зероидно.*

Кольцо разностей используется при изучении сократимых конгруэнций полутела. Были доказаны следующие утверждения:

Утверждение 1 [2]. *Для любого полутела P эквивалентны следующие утверждения*:

1) к*ольцо разностей полутела P тривиально*;

2) P зероидно;

3) на P существует ровно одна сократимая конгруэнция.

Утверждение 2 [3]. *Пусть ρ – произвольная конгруэнция на полутеле P. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *конгруэнция ρ на полутеле P идеальна*;

2) *ρ обладает свойством сократимости*;

3) *P/ρ – сократимое полутело.*

Утверждение 3 [3]. *Для любого полутела P следующие условия эквивалентны:*

1) *наименьшая конгруэнция, склеивающая* 1 *и* 2, *совпадает с наибольшей* (*одноклассовой*);

2) *любая конгруэнция на P сократима*;

3) *решетка конгруэнций на P канонически изоморфна решетке идеалов кольца разностей.*

Поясним, что такое идеальная конгруэнция. Обозначим через $ConP$ решетку всех конгруэнций на полутеле P относительно включения $\subseteq$, через IdR – решетку всех идеалов кольца разностей R полутела P относительно $\subseteq$. Рассмотрим отображение δ: $ConP \to IdR$, сопоставляющее каждой конгруэнции на полутеле P идеал его кольца разностей $R(P)$ по правилу

$$\delta(\rho) = \{[a, b] \in R: a, b \in T \ \&\ a\rho b\},$$

и отображение γ: $IdR \to ConP$, ставящее в соответствие каждому идеалу I кольца R конгруэнцию на P по правилу

$$a\gamma(I)\ b \Leftrightarrow [a, b] \in I, \text{ где } a, b \in P.$$

Конгруэнции вида $((I)$ называются *идеальными*.

Примечания

1. *Golan, J. S.* The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science [Текст] / J. S. Golan // Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics. 1992. V. 54.

2. *Черанева, А. В.* О главном ядре, порожденном 2 [Текст] / А. В. Черанева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. Вып. 8. С. 120–125.

3. *Черанева, А. В.* О сократимых конгруэнциях на полутелах [Текст] / А. В. Черанева // Вестник ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. 2005. Вып. 3. С. 160–163.

ЯЗЫК

Т. Б. Агалакова

СТАНОВЛЕНИЕ ЛЕКСИКО-СЕМАНТИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИНЕСТЕТИЧЕСКИХ ПРИЛАГАТЕЛЬНЫХ В АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

В статье дается обзор основных этапов становления и развития лексико-семантического поля прилагательных, описывающих в английском языке различные ощущения (всего 76 единиц). Автором выявляются особенности и закономерности исторического развития данной группы слов.

В современной лингвистике актуальной остается проблема выявления путей и закономерностей развития лексико-семантических групп (дальше ЛСГ) слов. Объектом нашего исследования является лексико-семантическое поле (дальше – ЛСП) прилагательных, описывающих в английском языке различные ощущения (всего 76 единиц). Цель исследования – проследить этапы и особенности становления данной группы слов в ходе исторического развития языка.

Наблюдения над функционированием исследуемых единиц на разных этапах истории английского языка показали, что в древнеанглийском периоде начинается процесс фомирования ЛСП синестетических прилагательных. Зафиксированы случаи синестетического переосмысления 15 слов. В средне- и новоанглийском периодах наблюдается непрерывное увеличение количественного состава поля (с-а. период – 35, н-а. период – 70 единиц). Это связано с большим притоком заимствований и с расширением сочетаемости и смыслового объема исконно английских прилагательных. Наряду с пополнением состава поля имеет место выпадение отдельных его членов по причине их ограниченной сочетаемости, низкой частотности употребления, стилистической маркированности или влияния более поздних синонимичных прилагательных.

Структурная организация исследуемого поля также не отличается стабильностью. Наблюдается тенденция постепенного увеличения числа структурных составляющих поля – ЛСГ, подгрупп и синонимических рядов, – что связано с расширением возможностей синестетического употребления слов. В целом структура ЛСП синестетических прилагательных может быть представлена в виде следующей схемы (см. рисунок).

Постепенно в рамках исследуемого поля формируются центр и периферия. Центр поля в основной своей массе (64% слов) восходит к древнегерманскому лексическому фонду и характеризуется относительной стабильностью.

На протяжении всей истории английского языка наблюдается непрерывное расширение сфер синестетического описания. Наиболее широкая синестетическая разнонаправленность свойственна прилагательным сферы осязания. Они активно используются для характеристики всех других видов чувствительности. В д-а. периоде рассматриваемые атрибуты описывают силу звука, интенсивность вкуса, запаха, температурных ощущений, фиксируют эмоциональные реакции, вызываемые ощущениями; например:

Đeōs wyrt biþ đam gōman stīþ and wiđer-ræde… [1, 922]

Эта трава на вкус едкая и неприятная…

Celācnian myd līđum læcedomum đe myd stīđum [5, 922]

Лечить слабыми лекарствами или сильными.

В с-а. периоде появляется возможность использования «осязательных» прилагательных для описания тембра голоса, высоты звучания, меры количества света; например:

…a dulle sounde of a more grosse corde [1, 253]

…низкое звучание, издаваемое более толстыми струнами.

В н-а. периоде наблюдается рост активности употребления рассматриваемых слов для характеристики зрительных впечатлений, что дает возможность описывать степень интенсивности светоцветовых ощущений, форму, размер, а также фиксировать оценку зрительных впечатлений со стороны субъекта восприятия; например: **a soft lilac shadow, gentle colours of spring, a sharp nose.**

В д-а. периоде зафиксированы примеры синестетического использования только одного прилагательного-вкусообозначения – swēte. Swēte фиксировало положительную оценку звуковых и обонятельных ощущений; например:

þa swetestan stefne, þa fægrestan singendra [4, 264]

самый мелодичный голос, самое красивое пение.

АГАЛАКОВА Татьяна Борисовна – кандидат филологических наук, доцент по кафедре германских языков ВятГГУ

© Агалакова Т. Б., 2007

... stenc and se bið swa *wynsum* swa þær syn ealle blostman gesamnod, and of þæm ostum þæs treowes flōweð ūt swetes stences wæta [3, 48]

... запах такой приятный, как будто все цветы были собраны там, и с веток деревьев струился ароматный напиток.

В с-а. периоде появляется возможность характеристики температурных ощущений с помощью прилагательных-вкусообозначений; например:

The bittre frostes... Destruyed hath the grene [1, 929]

Сильные морозы погубили всю зелень.

Отмеченные традиции синестетического употребления прилагательных-вкусообозначений сохраняются в н-а. периоде.

Д-а. прилагательным сферы зрительного восприятия свойственна синестетическая однонаправленность: они фиксируют силу, полноту и отчетливость звучания; например:

Wit scilling scīran reorde song āhofān [2, 324]

Ясным звонким голосом песню запел.

В с-а. периоде появляется возможность характеристики высоты звучания, а также меры интенсивности осязательных и вкусовых ощущений; например:

... ofte in somer fir huge hete [1, 1021]

... летом часто стоит сильная жара.

Sapa is whit and smal wyn ... [Ibid., 856]

Сапа – белое некрепкое вино ...

Синестетическое переосмысление прилагательных зрительного восприятия в н-а. периоде дает возможность описывать тембр голоса и интенсивность обонятельных ощущений; например:

And there was always a faint, or strong smell of something...

He had a deep, resonant voice that carried clearly everywhere.

Синестетическое употребление прилагательных сферы слуха ограничено рамками современного английского периода. Рассматриваемые атрибуты характеризуют интенсивность светоцветовых и обонятельных ощущений с одновременной их оценкой со стороны коммуниканта; например:

Suddenly she felt the loud smell of varnish.

На протяжении всей истории английского языка наблюдается ярко выраженная тенденция употребления «осязательных» прилагательных в качестве «источника» синестезических переносов. Сфера слухового восприятия является самым активным «адресатом».

В д-а. и с-а. периодах наиболее частотными являются осязательно-вкусовые и осязательно-слуховые синестезии. Описание вкусовых и слуховых ощущений с помощью слов осязатель-

ной семантики восполняло недостаточность в языке лексических единиц с соответствующими значениями. В н-а. периоде на первый план выходят осязательно-слуховые и осязательно-зрительные синестезии, что свидетельствует об информативной важности в жизни человека сфер слухового и зрительного восприятия.

Таким образом, проведенное исследование позволяет прийти к выводу, что синестезический перенос – это динамичный процесс, благодаря которому решается проблема пополнения лексических средств языка, используемых для характеристики спектра человеческих ощущений во всем их многообразии.

Примечания

1. The Anglo-Saxon Dictionary, Based on the Manuscript Collection of the Late Joseph Bosworth [Text] / ed. by T. N. Toller. Oxford, 1898.

2. Codex Exoniensis [Text]: A Collection of Anglo-Saxon Poetry / ed. by B. Thorpe. London, 1842.

3. Leechdoms, Wortcunung and Starcraft of Early England [Text] / ed. by Th. O. Cockayne. London, 1864–1866. Vol. 1, 2.

4. The Old English Version of the Gospels [Text]. London, 1891.

5. The Shorter Oxford English Dictionary on Historical Principles [Text] / rev. and ed. by C. T. Onions. Oxford, 1939. Vol. 1, 2.

А. И. Бардовская, В. В. Юшкетова

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНЭСТЕМИЧЕСКИХ СЛОВОСОЧЕТАНИЙ С КОМПОНЕНТОМ-ЦВЕТООБОЗНАЧЕНИЕМ В СОВРЕМЕННОМ АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ

В статье приводятся результаты анализа ряда сочетаний слов-наименований эмоций и цветонаименований современного английского языка, который позволяет авторам сделать вывод о значимости синестетических факторов в формировании и функционировании такого рода языковых явлений.

Проблема взаимодействия органов чувств имеет давнюю историю изучения в русле целого ряда гуманитарных наук: философии, эстетики, психологии, искусствоведения, языкознания. Характерной чертой современных исследований, в центре внимания которых оказывается человек ощущающий, чувствующий, переживающий, становится «взрыв» интереса к вопросу интермодальности и полимодальности. Одним из актуальных аспектов этой проблемы является феномен синестезии, принадлежащий к числу наиболее загадочных и наименее изученных явлений, связанных с человеческим восприятием.

В нашей работе мы обратились к анализу сочетаний слов-наименований эмоций и цветонаименований современного английского языка (на материале лексикографических источников – Интернет словарей общей лексики «Сократ», «Transmagus», «Мюллера v. 24», электронного словаря «ABBY Lingvo 7.0» и текстов песен англоязычных рок-групп [1]), в ходе которого был сделан вывод о возможной значимости синестезических (а более точно, синэстемических) факторов в формировании и функционировании такого рода языковых явлений.

В первую очередь, остановимся на вопросе о том, что мы включаем в объем понятия «синестетическая метафора» (подчеркнем, что вопрос этот в лингвистике по сей день предстает дискуссионным). В классических работах С. Ульманна (см., например, [2]) предлагается разделять понятия синестетической метафоры и случаи так называемой «псевдосинестезии». По определению этого ученого, синестетическая метафора представляет собой «особый вид переноса наименования на основе ассоциации между значениями» [3]. Специфику синестетического переноса С. Ульманн определяет тем, что в данном случае «два значения соотносятся с ощущениями, расположенными на двух различных уровнях чувствительности» [4]. Синестезии же, основанные на эмоционально-сенсорном взаимодействии, рассматриваются С. Ульманном как случаи «псевдосинестезии». Он говорит о близости метафор ощущение – ощущение и ощущение – эмоция, однако настаивает на их разграничении. Аналогичной точки зрения придерживаются и ряд авторов более поздних работ (см., например, [5]).

Однако есть основания оспорить эту точку зрения. В психологии признается, что эмоции входят интегративно в состав ощущений (см., например, [6]). Существует обширный круг психологических и нейропсихологических исследований (см., например, [7]), демонстрирующих, что эмоциональные факторы занимают едва ли не ведущее положение в формировании и функционировании синестезий. Важность эмоциональной ассоциативности в синестезиях подтверждает также целый ряд лингвистических исследований, опираясь на результаты которых представляется возможным сделать вывод о том, что отличительной особенностью языковой синестезии является ее непроизвольный, естественно-эмоциональный характер: синестезии не возникают в ходе какой-либо практики или специального обучения, а проистекают из самих особенностей наших ощущений (см., например, [8]). С. В. Воронин таким образом комментирует такого рода явления: «...эмоциональный коэффициент... ста-

БАРДОВСКАЯ Анастасия Игоревна – старший преподаватель кафедры германских языков ВятГГУ
ЮШКЕТОВА Вера Витальевна – студентка V курса факультета информатики ВятГГУ
© Бардовская А. И., Юшкетова В. В., 2007

новится основой для ассоциативной связи между такими восприятиями, которые сами по себе не имеют ничего общего друг с другом» [9]. Для именования синестезии на основе сенсорно-эмоциональной межчувственной связи С. В. Ворониным [10] был введен термин «*синэстемия*», определяемый им как психофизиологическая универсалия, лежащая в основе универсалии лингвистической, область действия которой – сенсорно-эмоциональная сфера (ощущения → эмоции). Вслед за этими учеными, в объем понятия «синестетическая метафора» мы включаем как случаи переноса ощущение → ощущение, так и ощущение → эмоция.

В ходе анализа литературы мы пришли к выводу о том, что синестетический «потенциал» цвета (подчеркнем, что в первую очередь здесь имеется в виду то, как цвет предстает в человеческом восприятии) осмысливался представителями различных наук на разных этапах их развития: в *философии* (Платон, Аристотель, Дж. Локк, В. Лейбниц и др.), *эстетике* (И. В. Гете, А. Ванслов, С. М. Эйзенштейн, А. Н. Веселовский), *медицине* (Пьерон, С. Де Мендоза), *психологии* (А. Бине, Т. Рибо, Аргландер). О том, насколько значимы для нас *эмоционально-цветовые ассоциации* в частности, можно судить, понаблюдав за обыденной речью: мы говорим «почернел от горя», «покраснел от гнева», «позеленел от злости», воспринимая эти выражения не буквально, а интуитивно связывая эмоциональные состояния человека со способным выразить их цветом. Существуют психологические исследования корреляций цвета и эмоций (см. обзор [11]), демонстрирующие высокую степень согласованности и постоянство в выборе цвета, соответствующего основным эмоциям (по К. Э. Изарду, это интерес, радость, удивление, грусть, гнев, отвращение, стыд, страх, утомление). Следует, тем не менее, отметить, что проблема взаимосвязи эмоций и цвета и ее природы остается во многом дискуссионной, и вопрос о том, какие факторы здесь играют ведущую роль, остается пока что без ответа.

Обращаясь к непосредственному анализу собранного языкового материала, мы стремились ответить на вопросы о том, какие цветонаименования в английском языке наиболее часто используются для описания эмоциональных состояний, какие эмоции чаще всего бывают «окрашены», каковы их соответствия в русском языке, и сопоставить исследованные языковые данные с данными о цвето-эмоциональных соответствиях, предоставляемыми другими науками.

Проклассифицировать исследованный материал мы решили по присутствующей в рассмотренных словосочетаниях цветономинации. Таким образом, собранные словосочетания были разделены на восемь групп, а именно словосочетания с цветономинацией *black* (черный), *white* (белый), *blue* (синий, голубой), *red* (красный), *green* (зеленый), *pink* (розовый), *grey* (серый) и словосочетания *с компонентом-описанием свойств цвета* – *bright* (яркий), *light* (светлый), *dim* (тусклый), *pale* (бледный), *dark* (темный). Проиллюстрируем ход нашего анализа, рассмотрев оказавшиеся частотными в исследованном материале и представившиеся нам наиболее интересными цвето-эмоциональные номинации с компонентами *black, white* и *green*.

По сведениям психологов и культурологов, *черный цвет* в первую очередь ассоциируется с грустью, гневом, негативными эмоциями. Символика этого цвета – несчастье, горе, траур, гибель. Согласно данным исследования цветоэмоциональных значений у взрослых А. М. Эткинда [12], наиболее часто испытуемые соотносили черный цвет со страхом и гневом (43 и 38 случаев соответственно). В исследовании вербальных ассоциаций на наименования эмоций Н. А. Багдасаровой [13] цветономинация *черный* наиболее часто возникала на стимул ГОРЕ.

Следует, тем не менее, обратить внимание на то, что черное может принимать противоположное значение и символизировать нечто сокровенное и страстно желанное. Например, у арабов выражение «чернота сердца» означает любовь. О неоднозначности восприятия черного свидетельствуют и исследования синестезии. Так, Е. А. Елина [14] отмечает, что в отношении черного ожидаются более частотные «минусовые» эмоциональные оценки: черный – цвет холодный (7), трагический (4), строгий (3), но он может оцениваться и как приятный, спокойный.

Однако собранный нами языковой материал демонстрирует однозначно негативную эмоциональную оценку черного. Лексикографические источники фиксируют такие значения слова *black*, как «мрачный, унылый, безнадежный», например *black look* (досл. «черный взгляд, вид») – «сердитый, злой». Образные выражения и фразеологизмы *black as ink* – «черный, как сажа, мрачный, безрадостный», *black as sin (thunder, thundercloud)* – «мрачнее тучи» также обладают отрицательной коннотацией. В переводческом аспекте интересной особенностью такого рода сочетаний является то, что цветономинация *black* в них может соответствовать русским *зеленый* и *багровый*: *black dog* – «тоска зеленая, дурное настроение, уныние»; *black in the face* (досл. «с черным лицом») – «багровый от раздражения или напряжения, побагровевший от гнева, злости, усилий». Об однозначности эмоционального вектора цветономинации *black* позволяют судить собранные синестетические сочетания, компонентами которых являются номинации сильных отрицательных эмоций и аффективных состояний –

black with rage (ярость), *black despair* (отчаяние), *jealous black* (ревность). В текстах песен такого рода синестетические номинации включаются в развернутые синестетические единства, привлекающие номинации других зрительных образов и контрастных цветов и эмоционально-психических состояний: «Into the heart of *dark insanity // As black as hate* but even *white...*» (Edguy, Kingdom of Madness, Paradise, 1997).

Белый цвет противоположен черному. Во многих культурах он символизирует чистоту, незапятнанность, невинность, добродетель, радость, искренность. Но также он может получить и противоположное значение – пустоты, бестелесности, ледяного молчания, смерти. Интересно определение белого, приводимое в «Слепом музыканте» В. Г. Короленко: «*Белый цвет – цвет холодного снега, цвет высочайших облаков, которые плывут в недосягаемом холоде поднебесных высот, – цвет величавых и бесплодных горных вершин... Это – эмблема бесстрастия и холодной, высокой святости, эмблема будущей бесплотной жизни*».

В работе А. И. Бардовской [15] отмечается, что в англоязычном художественном тексте белый цвет, синестетически осмысливаясь как холодный, более часто выводит на его негативную эмоциональную оценку. Согласно исследованию Н. А. Багдасаровой [16], ассоциация «белый» наиболее частотна на стимулы-номинации отрицательных эмоций – СТРАХ (14) и ГНЕВ (9).

Как показывает наш анализ, в английском языке цветономинация *white* соотносится с негативными эмоциями, например, *to turn white* – «побледнеть, побелеть (от страха, ужаса, гнева)». В синестетических единствах в данном случае встречаем номинации отрицательных эмоционально-аффективных состояний – *white fury* (ярость), *white heat* (неистовство, бешенство, ярость), *white with rage* (гнев). Эмоциональный вектор синестетических сочетаний с компонентом *white* прослеживается особенно ярко в сложных единствах, включающих в себя номинации, соотносимые с разными по чувственному материалу образами и представлениями. Так, в примере *White hot anger, white hot anger // Tearing me up, ripping my heart // Burning...* (Raven, Architect of Fear, White Hot Anger, 1991) помимо «цветной эмоции» (белой злости) обнаруживаем температурный (hot) и болевой образ (tearing up, ripping heart, burning).

Зеленый цвет у многих народов символизирует юность, надежду, веселье, хотя порой – и незрелость, недостаточное совершенство. Зеленый цвет действует успокаивающе, однако может производить и угнетающее впечатление (не случайно тоску называют «зеленой»). По данным исследования А. М. Эткинда [17], зеленый с равной частотой соотносится с эмоциями интереса и удивления (по 26), однако недалеко от этих показателей располагаются случаи сопряжения зеленого и неприятного эмоционального состояния – стыда (19). В эксперименте Н. А. Багдасаровой [18] испытуемые наиболее часто ассоциировали зеленый со стимулом ГОРЕ. Е. А. Елиной [19] приводятся такие данные синестетического осмысления зеленого цвета: он активен, радостен, звучен, но, вместе с тем, может быть беспокоен, грустен, резок. А. И. Бардовская [20] отмечает случаи оценки зеленого в художественном тексте как плавного, мягкого и манящего, но также и ядовито-холодного, леденящего душу.

Отличительной особенностью собранных нами синэстемических номинаций с компонентом *green* явилось их однообразие: словосочетание *green envy* (зависть) – наиболее частотно в исследованном материале (4). Таким образом, есть основания говорить о том, что в текстах современных англоязычных рок-групп актуализируется отрицательная оценка зеленого, например: ... *Green with envy and coloured with lies // The universe inside you slowly dies* (Sheavy, Republic, Hangman, 2005).

Итак, в результате проведенного исследования мы пришли к следующим выводам. Символика цвета, его эмоциональная окраска не всегда совпадает с эмоциональным значением в области лингвистики. Например, если в символике и психологии черный и белый цвета противопоставлены друг другу, то в поле лингвистики им свойственно соответствовать негативным эмоциям.

Мы обратили внимание на то, что в английском языке ряд цветонаименований настолько сильно связан с определенными эмоциями, что они сами по себе означают эмоции, т. е. являются частью эмотивной лексики (например, *blue* – «синий» и «печальный», *green* – «зеленый» и «ревнивый»). Вторая особенность связана с переводом, т. е. не всегда окраска в русском языке соответствует английской. Кроме того, при переводе ряда выражений с английского языка на русский цветономинация теряется и в дальнейшем не упоминается.

Отличительной особенностью цвето-эмоциональных синестетических единств в текстах современных англоязычных рок-групп является частое объединение нескольких простых синестетических номинаций с разными цветонаименованиями, например: *jealous black and envy green*; *all darken blue // jealous heats are red, so dark red...* Если рассматривать «окрашенные эмоции», то здесь преобладают негативные эмоции, такие, как страх, ярость, ненависть, зависть. Скорее всего, причина в том, что такие эмоции «односторонние», часто примитивные, и их приходит-

ся окрашивать, чтобы хоть как-то выделить их. В противовес им радость и любовь – многогранны, их вряд ли можно описать каким-то одним цветом.

Примечания

1. *DarkLyrics // darklyrics.com; Lyrics SU //* www.mp3.lyric.su/; MF-B // www.mf-b.ru/lyrics/; Top Lyrics // top-lyrics.elizov.com/lyrics/ [Electronic recource]

2. *Ульман, С.* Семантические универсалии [Текст] / С. Ульман // Новое в зарубежной лингвистике. М.: Прогресс, 1970. Вып. V. С. 250–299.

3. *Ullmann, S.* The Principles of Semantics [Text] / S. Ullmann. Glasgow, 1959. P. 277.

4. *Ullmann S.* Указ. соч.

5. *Агалакова, Т. Б.* Становление лексико-семантического поля синестетических прилагательных в английском языке [Текст] : дис. ... канд. филол. наук / Т. Б. Агалакова. Киров, 2003. 190 с.; *Вайсман, Н. Н.* Лингвистическая природа синестезии – результата взаимодействия сенсорных прилагательных при метафоризации [Текст] / Н. Н. Вайсман. Алма-Ата, 1982. 10 с.; *Ивакина, Е. В.* Проявление языковой синестезии в процессе наименования акустических явлений [Текст] / Е. В. Ивакина // Филологические этюды. Саратов, 2001. Вып. 4. С. 170–173; *Капанова, А. А.* Синестетическое использование имен прилагательных в современном французском языке [Текст] : дис. ... канд. филол. наук / А. А. Капанова. М., 1984. 188 с.; *Кундик, О. И.* Специфика синестезийных словосочетаний в русском и английском языках [Текст] : дис. ... канд. филол. наук / О. И. Кундик. Саратов, 1997. 164 с.; *Мерзлякова, А. Х.* Вторичные функции перцептивных прилагательных (на материале английского, русского и французского языков) [Текст] / А. Х. Мерзлякова. Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 2003. 198 с.; *Степанян, Т. Р.* Синестезические метафоры русского языка (прилагательные чувственного восприятия) [Текст] : дис. ... канд. филол. наук / Т. Р. Степанян. М., 1997; *Усик, Е. Г.* Роль синестезии в семантическом разнообразии прилагательных в немецком языке [Текст] / Е. Г. Усик // Романо-германская филология. Саратов, 2000. Вып. 1. С. 109–111.

6. *Дерябин, В. С.* Чувства, влечения, эмоции [Текст] / В. С. Дерябин. Л., 1974. 258 с.

7. *Величковский, Б. М.* Психология восприятия [Текст] / Б. М. Величковский, В. П. Зинченко, А. Р. Лурия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. 246 с.; *Натадзе, Р. Г.* К вопросу о психологической природе интермодальной общности ощущений [Текст] / Р. Г. Натадзе // Вопросы психологии. М.: Педагогика. 1979. № 6. С. 49–57; *Рубинштейн, С. Л.* Основы общей психологии [Текст] / С. Л. Рубинштейн. СПб.: Питер Ком, 1998. 688 с.; *Узнадзе, Д. Н.* Психологические исследования [Текст] / Д. Н. Узнадзе. М.: Наука, 1966. 450 с.; *Шиффман, Х. Р.* Ощущение и восприятие [Текст] / Х. Р. Шиффман. СПб.: Питер, 2003. 928 с.; *Cytowic, R. E.* Synesthesia: Phenomenology and Neuropsychology [Electronic recource] / R. E. Cytowic // http://psyche.cs.monash.edu.au; *Lyons, A. D.* Synaesthesia – A Cognitive Model of Cross Modal Association [Electronic recource] / A. D. Lyons // http://www.tstex.com; McSharry McGrath, M. Tangled Wires: Conceptualizing Neurological and Cultural Explanations of Synesthesia [Electronic recource] / M. McGrath // http://serendip.brynmawr.edu/bb

8. *Андрианов, М. С.* Эмоциональная составляющая политической культуры (на примере анализа цветовосприятия школьниками образов политических деятелей) [Электронный ресурс] / М. С. Андрианов // http://www.politstudies.ru/fulltext/1997/2/10.htm; *Горелов, И. Н.* Синестезия и мотивированные знаки подъязыков искусствоведения [Текст] / И. Н. Горелов // Проблемы мотивированности языкового знака. Калининград, 1976. С. 74–81; *Елина, Е. А.* Действие эстетической синестезии в искусствоведческих текстах [Текст] / Е. А. Елина // Предложение и слово: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002б. С. 102–110; *Журавлев, А. П.* Цветная музыка стиха [Текст] / А. П. Журавлев // Психология художественного творчества: хрестоматия. Минск: Харвест, 2003б. С. 166–180; *Колодкина, Е. Н.* Полимодальная образность в психологической структуре слова [Текст] / Е. Н. Колодкина // Актуальные проблемы психолингвистики: слово и текст. Тверь: Твер. гос. ун-т, 1996. С. 9–17; *Прокофьева, Л. П.* Цвето-графемная ассоциативность носителей русского и английского языков [Текст] / Л. П. Прокофьева // Предложение и слово: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2002. С. 747–755; *Сабанадзе, М. Я.* Синестезия в подъязыке музыковедения: (на материале английского языка) [Текст] : автореф. дис. ... канд. филол. наук / М. Я. Сабанадзе. Л., 1987. 21 с.; *Уорф, Б. Л.* Отношение норм поведения и мышления к языку [Текст] / Б. Л. Уорф // Зарубежная лингвистика. М.: Прогресс, 1999. Вып. 1. С. 58–92; *Шидо, Г. А.* Психолингвистическое описание лексических единиц семантического поля ощущения (на материале русского и немецкого языков) [Текст] : автореф. дис. ... канд. филол. наук / Г. А. Шидо. Саратов, 1989. 16 с.; *Brown, R.* Words and Things [Text] / R. Brown. Glencoe, Illinois, 1958. 398 p.; *Kronasser, H.* Handbuch der Semasiologie [Text] / H. Kronasser. Heidelberg, 1952. 204 s.

9. *Воронин, С. В.* Основы фоносемантики [Текст] / С. В. Воронин. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 82.

10. *Воронин, С. В.* Указ. соч.

11. *Базыма, Б. А.* Цвет и психика [Электронный ресурс] / *Б. А. Базыма* // psyfactor.org

12. *Базыма, Б. А.* Указ. соч.

13. *Багдасарова, Н. А.* Лексическое выражение эмоций в контексте разных культур [Текст] : автореф. дис. ... канд. филол. наук / Н. А. Багдасарова. М., 2004.

14. *Елина, Е. А.* Указ. соч.

15. *Бардовская, А. И.* Средства номинации синестетических соощущений (на материале английских и русских художественных текстов) [Текст] : автореф. дис. ... канд. филол. наук / А. И. Бардовская. Тверь, 2005. 19 с.

16. *Багдасарова, Н. А.* Указ. соч.

17. *Базыма, Б. А.* Указ. соч.

18. *Багдасарова, Н. А.* Указ. соч.

19. *Елина, Е. А.* Указ. соч.

20. *Бардовская, А. И.* Указ. соч.

Е. В. Кипрская

МАНИПУЛЯТИВНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ МАСС-МЕДИА: ВИДЫ МАНИПУЛЯЦИИ, СЕМАНТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ЕЕ ВЫРАЖЕНИЯ

На рубеже XX–XXI вв. появилось большое количество исследований в области психологии, лингвистики, политологии, социологии, посвященных вопросу о возникновении и восприятии информации, а также процессу обмена информацией между людьми. Масс-медиальная коммуникация подразумевает под собой направленное воздействие на человека посредством различных видов масс-медиа для формирования и изменения его мнений, оценок, поведения и убеждений (рис. 1).

Рис. 1

Манипуляция сознанием, наряду с идеологией, пропагандой, стереотипом, а также информационным и психологическим воздействием, относится к элементам языковой коммуникации.

Слово «манипулирование», или «манипуляция», ведет свое происхождение от латинского слова «manipulare» и в своем первоначальном значении означало ‘управлять’ в позитивном смысле: управлять со знанием дела, оказывать помощь и т. д. В современной литературе под манипулированием понимается искусство управлять поведением и мышлением людей с помощью целевого воздействия на общественное сознание. В табл. 1 приводятся наиболее часто встречаемые дефиниции данного термина, а также производных, близких по значению понятий.

В свете вышеизложенного под манипуляцией нами понимается сознательное и целенаправленное дискурсивное воздействие на потенциальный объект (человек) для достижения изменений во мнениях, оценках, поведении и убеждениях, выгодных манипуляторам. Манипуляция рассматривается как один из компонентов системы психологического воздействия, направленной на создание в сознании людей ложных представлений (Д. В. Ольшанский).

Манипуляция сознанием присутствует во всех сферах общественной жизни. В духовной сфере пропагандируются духовные ценности через приоритеты воспитания, через образование, искусство и литературу. В политической сфере пропагандируются имиджи и привлекательные, с точки зрения манипулятора (в данном случае, политической системы), носители политических идей посредством PR-средств, политической рекламы и средств массовой информации.

Многие источники трактуют понятие «манипуляция» в широком и узком смыслах (С. Г. Кара-Мурза, Д. В. Ольшанский, М. Г. Делягин). В широком смысле это «влияние на сознание и поведение человека или социальных групп, которое характеризуется различной степенью осознанности и наличием совокупного манипулятора» [Мейсан 2:www.carnot.fr]. Нам более интересным представляется термин «манипуляция», используемый более узко. В этом случае принято выделять следующие виды манипуляций: информационную войну, пропаганду, психологическую войну, психотронику, социологическую пропаганду и психохирургию (рис. 2). Мы считаем целесообразным рассмотреть наиболее широко распространенные виды манипуляций: психологическую войну и пропаганду.

Рис. 2

Понятие «психологическая война» является широким и обобщенным. Часто его трактуют как «относительно конкретно-целенаправленное и

КИПРСКАЯ Екатерина Викторовна – кандидат филологических наук, доцент по кафедре германских языков ВятГГУ
© Кипрская Е. В., 2007

планомерное использование политическими оппонентами психологических и других косвенных средств (пропагандистских, дипломатических, экономических, политических и т. д.) для воздействия на мнения, настроения, чувства и, в итоге, на поведение противника с целью заставить его действовать в нужным им направлениях» [4; 342]. В недалеком прошлом термин «психологическая война» трактовался узко: в основном как различные идеологические акции стран запада против СССР. Такая же методика использовалась и у идеологического противника: считалось, что СССР использует все возможные средства для подрыва западной демократии. Конечная цель любой психологической войны – это стремление повернуть сознание масс от чувства удовлетворения к прямому неудовольствию и, как следствие, к определенным деструктивным действиям (Г. Г. Почепцов). Как справедливо отмечает Г. Г. Почепцов, «в сегодняшнем мире на наших глазах в результате новой роли информационной составляющей можно легко сбросить правительство во многих странах мира» [5; 41].

Под пропагандой нами, вслед за Д. В. Ольшанским, понимается:

– во-первых, «политически мотивированная особая деятельность по распространению в массах идеологии и политики»;

– во-вторых, «систематически осуществляемые усилия повлиять на сознание индивидов, групп, масс, общества для достижения определенного намеченного результата в плане политического действия»;

– в-третьих, «средство формирования массового политического сознания и общественного мнения» [4; 421].

В западной традиции, по мнению многих авторов (Г. Г. Дилигенский, С. Г. Кара-Мурза, Г. Г. Почепцов), преобладает негативное отношение к термину «пропаганда», поскольку она всегда ассоциируется с процессом манипулирования людьми. Большинство западных исследователей трактуют термин «пропаганда» как своеобразный антипод термину «информация». Р. Фаулер определял пропаганду как «искусство принуждения людей делать то, что бы они ни делали, если бы располагали всей относящейся к ситуации информации» [6; 171]. К основным видам пропаганды можно отнести следующие (рис. 3).

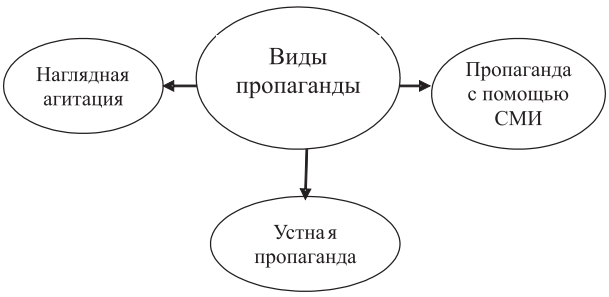


Рис. 3

В современном мире функции политической пропаганды могут выполнять политическая реклама, а также новейшие технологии по созданию имиджа, методики нейролингвистического программирования и т. д.

Как в психологической войне, так и в пропаганде происходит перенос теоретического сознания в сферу обыденного сознания, в котором обращаются не к логике, разуму или фактам, а к моментам, которые не могут считаться рациональными (С. Г. Кара-Мурза, Г. Г. Почепцов). Самый распространенный способ подобного манипулирования – внедрение стереотипов (Г. Г. Дилигенский, С. Г. Кара-Мурза). Термин «стереотип» введен У. Липпманом в 1922 г. для обозначения «распространенных в общественном мнении предвзятых представлений о разных национально-этнических, социально-политических и профессиональных группах» [4; 476].

Таблица 1

Различные трактовки термина «манипуляция»

Термин	Источник	Дефиниция
Манипуляция	Сайт; Е. Л. Доценко	«Это вид психологического воздействия, используемый для достижения одностороннего выигрыша посредством скрытого побуждения другого к совершению определенных действий»
	Сайт; В. М. Герасимов	«Манипулирование общественным мнением – один из специальных методов социально-психологического контроля»
	Политико-психологический словарь, Д. В. Ольшанский	«Манипулирование в политике – процесс воздействия на общественное мнение и политическое поведение для их направления в нужную властным или общественным структурам сторону»

Таблица 2

Основные лингвистические средства манипуляции

Средство манипуляции	Примеры
Клише	«Мировой империализм», «исламская угроза», «масонский заговор»
Лозунги	«Родина-мать зовет»
Эпитеты	«Деструктивный»
Политические мифологемы	Миф о «русском медведе»
Политические эвфемизмы	«Миротворческая операция»
Метафоры	«Гнездо мирового терроризма»

Посредством СМИ массам постоянно декларируются, а порой и навязываются стандартные подходы к различным политическим явлениям в стране и за рубежом и их осмысление. С помощью стереотипа у людей формируются определенные нормы, ценности, образцы поведения, выгодные правящей элите, стоящей за каналами СМИ. Среди способов «насаждения» стереотипов нас интересуют те, которые имеют отношение к лингвистике:

1) многократное, настойчивое повторение одних и тех же фраз;

2) утверждение и упрощение;

3) эвфемизация языка СМИ;

4) использование элементов уголовно-арготической лексики.

Особое значение имеют собственно лингвистические средства манипуляции. В ходе манипуляции происходит поиск наиболее подходящих слов, в которые необходимо облечь какую-либо примитивную модель (С. Г. Кара-Мурза). В табл. 2 мы перечислили встретившиеся нам в литературе лингвистические средства манипуляции, проиллюстрировав их примерами.

Проанализировав все вышеизложенное, мы вправе утверждать:

– основными способами психологического воздействия на аудиторию являются утверждение и повторение, упрощение, стереотипизация;

– самый распространенный способ психологического манипулирования – внедрение стереотипов, с помощью которых происходит формирование норм, ценностей, образцов поведения, выгодных правящей элите, стоящей за каналами СМИ;

– способами «насаждения» коммуникативных стереотипов являются многократное, настойчивое повторение одних и тех же фраз; утверждение и упрощение; эвфемизация языка СМИ; использование элементов уголовно-арготической лексики;

– среди лингвистических средств манипуляции выделяют: клише, лозунги, эпитеты, политические мифологемы, политические эвфемизмы, метафоры.

Примечания

1. *Дилигенский, Г. Г.* Социально-политическая психология. [Текст] / Г. Г. Дилигенский. М.: Новая школа, 1996. 352 с.

2. *Мейсан, Т.* 11 сентября 2001 г.: чудовищная махинация [Электронный ресурс] / Т. Мейсан // www.carnot.fr

3. *Кара-Мурза, С. Г.* Манипуляция сознанием [Текст] / С. Г. Кара-Мурза. М.: Прогресс, 2000. 289 с.

4. *Ольшанский, Д. В.* Политическая психология [Текст] / Д. В. Ольшанский. СПб.: Питер, 2002. 576 с.

5. *Почепцов, Г. Г.* Теория коммуникации [Текст] / Г. Г. Почепцов. М.: «Рефл-бук»; Киев: Веклер, 2001. 651 с.

6. *Fowler, R.* Language in the News: Discourse and Ideology in the press [Text] / R. Fowler. N. Y.: Rutledge, 1991. P. 254.

Н. С. Кожина

КОММУНИКАТИВНЫЕ СТРАТЕГИИ И ТАКТИКИ РЕЧЕВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В статье описываются различные классификации коммуникативных стратегий и тактик речевого воздействия. Анализируются наиболее актуальные подходы к данной проблеме, и оценивается их значимость с позиции создания единой общепринятой типологии стратегий дискурса.

Большое количество работ в нашей стране и за рубежом посвящено феномену воздействующей речи. Основной проблемой речевого воздействия (далее – РВ) является эффективность коммуникации. В связи с этим особую важность приобретает вопрос о коммуникативных стратегиях, выбор которых обусловлен интенцией продуцента персуазивного сообщения.

Стратегии РВ представляют собой «тип или линию поведения одного из коммуникантов в конкретной ситуации общения, которые соотносятся с планом достижения преимущественно глобальных (а иногда и локальных) коммуникативных целей в рамках всего сценария функционально-семантической репрезентации интерактив-

КОЖИНА Наталья Сергеевна – ассистент кафедры германских языков ВятГГУ

© Кожина Н. С., 2007

ного типа» [11: 19]. Хотя понятие коммуникативных стратегий в современной лингвистике обнаруживает весьма широкую вариативность [8: 138], мы считаем целесообразным принять дефиницию стратегии как комплекса речевых действий, направленных на реализацию определенного намерения [5].

Исследовательская группа факультета психологии Йельского университета провела обширную работу в сфере РВ. Авторы считают, что изучение способов влияния на мнение индивида посредством символов дает возможность проанализировать и понять роль высших психических процессов в обработке многочисленных воздействий, которым ежедневно подвергается человек [19: 2]. РВ освещается в работе с позиции нескольких ключевых факторов, одним из которых являются стратегии управления поведением индивида. Примечательно, что, подразделяя стратегии РВ на рациональные и эмоциональные, исследователи отдают приоритет последним, опираясь на результаты эксперимента [Op.cit.: 57–58]. Эмоциональные стратегии реализуются путем создания у реципиентов эмоционального напряжения. При этом задействуются, главным образом, негативные эмоции, такие, как страх, агрессия, ощущение угрозы, чувство вины. После создания отрицательного эмоционального настроя инициатор РВ предлагает выход из создавшейся дискомфортной ситуации в виде определенного курса действий, плана или программы, что в целом соответствует его коммуникативной интенции [Op.cit.: 62].

Эмоциональные стратегии РВ анализируются многими учеными. В работе [14] обсуждается оценочное и эмоциональное воздействие, ориентированное на общественные объективно установленные морально-правовые отношения или на межличностные субъективно-эмоциональные отношения. Примерами стратегий этого типа являются порицание, похвала, угроза, обвинение, оскорбление. Автор также выделяет следующие стратегии РВ: а) социальных актов; б) волеизъявления; в) разъяснения/информирования. Под стратегией социальных актов понимается такой способ воздействия, при котором не происходит передача информации, но имеют место определенные социальные акты, например клятва, приветствие, молитва и др. Волеизъявления включают речевые действия, направленные на выполнение объектом воли говорящего, то есть это такие речевые акты, как просьбы, приказы, советы, отказы. К типу «разъяснение и информирование» относятся объяснения, доклады, сообщения.

Хотя данная типология стратегий РВ вызывает ряд вопросов по части терминологии и критериев классификации, можно предположить, что в ее основу был положен тип речевых действий, взятый в аспекте иллокуции. Очевидно, что в реальной коммуникативной ситуации трудно выделить вышеперечисленные типы в чистом виде. Мы считаем, что оценка и эмоции в большей или меньшей степени присутствуют во всех остальных типах.

Подход к стратегиям РВ, обозначенный в работе И. А. Стернина, носит прикладной характер и представляется более ориентированным на бытовую повседневную коммуникацию [13: 64–66]. Согласно мнению исследователя, существует восемь основных стратегий воздействия на индивида, которые включают доказывание, убеждение, уговаривание, клянченье, внушение, приказ, просьбу, принуждение. Большинство из приведенных стратегий РВ (по крайней мере, шесть из восьми) опираются на эмоциональный компонент. Лишь в случаях доказывания и убеждения используется рациональная аргументация. Автор объясняет это тем, что в силу разных причин всего два процента людей способны воспринимать рассуждения, построенные по законам логики [Op.cit.: 64].

В условиях современного демократически развивающегося общества одной из основных сфер применения стратегий РВ является политический дискурс. В. А. Даулетова отмечает, что наиболее часто политиками используются такие коммуникативные манипуляционные техники, как: а) эвфемизмы и дисфемизмы, приводящие к семантической неопределённости, которая выполняет функцию «вовлечения в сюжетную интригу»; б) непрототипные вопросы, которые делятся на риторические вопросы с прямой и косвенной адресацией; в) аргументация, осуществляемая посредством текстовых реминисценций, представленных в виде афоризмов, стихов и паремий, или с помощью аналогий с личным опытом адресата [3: 8–9].

По мнению автора, политический дискурс – благодатная почва для применения техник нейро-лингвистического программирования, к которым можно отнести следующие: 1) умышленное использование пресуппозиций через вводные слова («очевидно», «ясно», «конечно»), модальные операторы («требуется», «должен»), конструкции с «если»; 2) перегрузку сознания реципиента информацией или воздействие на разные каналы получения и переработки информации; 3) метафоризацию [Op. cit.].

Еще одной сферой широкого применения стратегий РВ является реклама. В. Н. Степанов считает *убеждение и внушение* основными коммуникативными стратегиями рекламного дискурса. Убеждение базируется на схеме мышления, принятой в логике: понятие – суждение – умозаключение. Эта стратегия, по мнению автора, осуществляется при помощи теоретической аргумен-

тации, эмпирической аргументации и видимости логичности, контекстуальной аргументации, включающей аргументы к традиции, к авторитету, к интуиции, к вере, к здравому смыслу [12].

Под внушением понимается сознательное, неаргументированное воздействие на людей, целью которого является изменение их отношения к чему-либо. Внушающее речевое воздействие реализуется в виде: а) предметно ориентированного взаимодействия в процессе совместной деятельности; б) личностно ориентированного общения; в) социально ориентированного общения, предполагающего изменение в социально-психологической или социальной структуре общества или стимуляцию прямых социальных действия через воздействие на психику членов социума [Op. cit.].

Помимо внушения и убеждения, ряд исследователей описывают такие стратегии РВ, как *заражение и подражание* [4; 9]. Заражение представляет собой процесс передачи эмоционального состояния от одного индивида к другому на психофизиологическом уровне контакта дополнительно к собственно смысловому воздействию. Психическое подражание – это следование некоему примеру, самостоятельное копирование действий, воспринятых у других. Так, у подростков и взрослых подражание выступает элементом научения в некоторых видах деятельности либо служит цели идентификации с референтной личностью/группой [2]. Поскольку подражание по своей сути является деятельностью, мы склонны считать его не одной из стратегий РВ, а следствием или результатом этого процесса.

С опорой на уже упомянутый подход Л. Л. Федоровой [14], Е. В. Шелестюк настаивает на необходимости включения в данную классификацию *волеизъявления*, так как далеко не все способы РВ можно свести к убеждению, внушению и заражению [15]. Например, угроза, просьба, похвала, порицание, трудно вписываются в вышеперечисленные стратегии в их традиционном понимании.

В соответствии с классификацией В. И. Карасика стратегии РВ подразделяются на группы, в основе которых лежит: а) авторитет или власть коммуниканта, обладающего институционально более высоким статусом; б) манипуляция (маскируемая власть); в) логическое убеждение, аргументация; г) физическая или психическая сила [6]. Очевидно, что эти компоненты обладают определенной универсальностью, поскольку, как видно из приведенных выше работ, в той или иной мере они присутствуют в подходах других исследователей. Следует отметить, что в этих работах коммуникативные стратегии рассматриваются с позиции однонаправленности РВ, то есть объект РВ пассивен и воспринимает воздействие со стороны субъекта.

В последние годы все большее распространение получает идея о близости РВ и речевого взаимодействия. В этой связи примечательно, что А. Ж. Аубакирова определяет коммуникативную стратегию как «часть коммуникативного поведения или *коммуникативного взаимодействия* (курсив мой. – *Н. К.*), в которой серия различных вербальных и невербальных средств используется для достижения определенной коммуникативной цели» [1]. В соответствии с этой тенденцией разрабатываются стратегии, основанные на идентификации коммуникантов. Идентификация – это степень схожести, общности участников коммуникативного процесса [18]. Выделяются три основные типа идентификации: материальная, идентификация идей и формальная.

Материальная идентификация формируется у людей, обладающих одинаковыми материальными ценностями или имеющих схожие вкусы. Идентификация идей имеет место, когда люди разделяют идеи, убеждения, взгляды, чувства друг друга. Идентификация на формальном уровне складывается в результате участия людей в организации и/или проведении совместных мероприятий. По утверждению К. Берка, идентификация коммуникантов возрастает пропорционально интенсификации их общения. При этом происходит взаимовлияние, осуществляется коррекция картины мира участников коммуникативного процесса, значительно улучшается их взаимопонимание, что в целом способствует повышению эффективности РВ [Op. cit.].

Э. Борман также признает важность идентификации в регуляции деятельности [17]. Предложенный им подход к коммуникации основан на исследованиях Р. Бейлза, который обнаружил, что РВ оптимизируется при помощи фантазийных тем, являющихся своего рода фрагментами реальности, которые воссоздаются в виде историй посредством символического взаимодействия [16; 17]. Фантазийная тема состоит из действующих лиц, сюжета, сцены и санкционирующего агента. Действующие лица играют типичные коммуникативные роли и могут олицетворять героев, подлецов и других известных типажей. Сюжет – это развитие истории. Сцена представляет собой место действия, ситуацию, социокультурное окружение. Наконец, санкционирующий агент – это источник или общепризнанный авторитет, наделяющий фантазийную тему правдоподобием и уместностью.

В результате идентификация коммуникантов тем выше, чем больше у них общих фантазийных тем. В современном обществе можно часто наблюдать, как продуценты персуазивных сообщений используют в дискурсе преобладающие у реципиентов фантазийные темы, являющиеся неотъемлемой частью РВ. В целом идентифика-

ционные стратегии имеют когнитивную основу и способствуют формированию риторического восприятия, структурирующего реальность в сознании и формирующего представление индивида о тех объектах, которые не подлежат его непосредственному наблюдению.

Когнитивным по своей сути является также подход к стратегиям РВ, предлагаемый Г. Г. Почепцовым, который анализирует РВ в контексте резонансных технологий. Стратегии резонансной коммуникации строятся на активизации уже имеющихся у получателя информации представлений и обусловлены инерционностью человеческого мышления и поведения [10: 110]. Применение резонансной технологии снижает контроль со стороны получателя информации, что существенно уменьшает его сопротивление вводимой информации [Op. cit.: 113]. Автор отмечает, что достижение желаемого коммуникативного эффекта происходит за счет воздействия: 1) на имеющиеся у реципиента когнитивные схемы; 2) принятые в обществе коммуникативные схемы; 3) собственно резонансные схемы [Op. cit.: 114].

Применение стратегий, связанных с *когнитивными схемами*, включает использование слов-триггеров, актуализирующих в сознании реципиента определенные сценарии и фреймы и автоматически вызывающих весь присущий этим структурам объем информации. Опора на *общественные схемы коммуникации* подразумевает использование таких каналов коммуникации, которые выступают в роли мини-СМИ для определенной группы населения. Например, наличие лидеров мнений, политически активных и живо интересующихся происходящим, позволяет проводить воздействие с меньшими интеллектуальными и материальными затратами, поскольку члены этой группы передают полученные данные остальным в виде информации или советов. Стратегии *собственно резонансного воздействия* тесно связаны с деятельностью СМИ и реализуются поэтапно в такой последовательности: а) утрирование уже зафиксированного стереотипа; б) перевод его из вербальной в визуальную или событийную формы; в) усиление предлагаемого сообщения признаками достоверности [Op. cit.: 114–115]. Представленный подход направлен на анализ различных способов убеждения адресата и опирается на комплекс перлокутивных реакций, когнитивных значений и категориальную структуру, существующие в сознании реципиента.

Обобщая и систематизируя множество разнообразных подходов, О. С. Иссерс строит типологию коммуникативных стратегий, которая базируется на наиболее значимой для говорящего иерархии мотивов и целей и включает вспомогательные стратегии, оптимизирующие ведение диалога. Так, основной стратегией признается семантическая (когнитивная), примером которой является дискредитация третьего лица или подчинение партнера. Вспомогательные стратегии подразделяются: а) на прагматические (построение имиджа, формирование эмоционального настроя); б) диалоговые (контроль над темой, контроль над инициативой); в) риторические (привлечение внимания, драматизация) [5: 108].

Несмотря на многообразие существующих мнений по поводу стратегий РВ, проблема создания единой общепринятой классификации все еще находится в стадии разработки. В. И. Карасик считает, что типология стратегий дискурса должна включать соответствующие социальному институту мотивы и цели [7: 84]. Таким образом, решение этой проблемы требует консолидации усилий нескольких гуманитарных дисциплин, в частности психологии, прагмалингвистики и социолингвистики.

Примечания

1. *Аубакирова, А. Ж.* Речевые тактики в газетных текстах [Электронный ресурс] / А. Ж. Аубакирова // http://www.rusnauka.com/NIO/Philologia/aubakirova.doc.htm

2. *Головин, С. Ю.* Словарь психолога-практика [Текст] / С. Ю. Головин. 2-е изд. Минск: Харвест, 2003. 976 с.

3. *Даулетова, В. А.* Вербальные средства создания автоимиджа [Текст] : автореф. дис. ... канд. филол. наук / В. А. Даулетова. Волгоград, 2004. 22 с.

4. *Желтухина, М. Р.* Тропологическая суггестивность масс-медиального дискурса: о проблеме речевого воздействия тропов в языке СМИ [Текст] : монография / М. Р. Желтухина. М.: Ин-т языкознания РАН; Волгоград: Изд-во ВФ МУПК, 2003. 656 с.: ил.

5. *Иссерс, О. С.* Коммуникативные стратегии и тактики русской речи [Текст] / О. С. Иссерс. Омск: Изд-во Омск. гос. ун-та, 1999. 285 с.

6. *Карасик, В. И.* Социальный статус человека в лингвистическом аспекте [Текст] / В. И. Карасик // «Я», «субъект», «индивид» в парадигмах современного языкознания: сб. научно-аналитических обзоров. М.: Ин-т языкознания РАН, 1992. С. 47–85.

7. *Карасик, В. И.* Языковой круг: личность, концепты, дискурс [Текст] / В. И. Карасик. Волгоград: Перемена, 2002. 477 с.

8. *Макаров, М. Л.* Интерпретативный анализ дискурса в малой группе [Текст] / М. Л. Макаров. Тверь: Твер. гос. ун-т, 1998. 200 с.

9. *Панкратов, В. Н.* Психотехнология управления людьми [Текст] : практическое руководство / В. Н. Панкратов. М.: Изд-во Института психотерапии, 2001. 336 с.

10. *Почепцов, Г. Г.* Психологические войны [Текст] / Г. Г. Почепцов. М.: Рефл-бук; Ваклер, 2002. 528 с.

11. *Романов, А. А.* Системный анализ регулятивных средств диалогического общения [Текст] / А. А. Романов. М.: Ин-т языкознания АН СССР, 1988. 182 с.

12. *Степанов, В. Н.* Речевое воздействие в рекламе [Текст] : учеб.-практ. пособие / В. Н. Степанов. Ярославль: Междунар. ун-т бизнеса и новых технологий, 2004. 41 с.

13. *Стернин, И. А.* Введение в речевое воздействие [Текст] / И. А. Стернин. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2001. 252 с.

14. *Федорова, Л. Л.* Типология речевого воздействия и его место в структуре общения [Текст] / Л. Л. Федорова // Вопросы языкознания. 1991. № 6. С. 46–50.

15. *Шелестюк, Е. В.* Способы, типы, приемы и инструменты речевого воздействия [Электронный ресурс] / Е. В. Шелестюк // http://www.ence.ru/page2/st_rech_5.html

16. *Bales, R. F.* Personality and interpersonal behavior [Text] / R. F. Bales. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1970. 305 p.

17. *Bormann, E.* The force of fantasy: restoring the American dream [Text] / E. Bormann. Carbondale: Southern Illinois UP, 1985. 205 p.

18. *Burke, K.* Language as symbolic action [Text] / K. Burke. Berkely: University of California Press, 1966. 253 p.

19. *Hovland, C. I.* Communication and persuasion: psychological studies of opinion change [Text] / C. I. Hovland, I. L. Janis, H. H. Kelley. New Haven and London: Yale UP, 1953. 315 p.

Е. Н. Колодкина

МЕТАФОРА, МЕТОНИМИЯ И «МЕТАФОРО-МЕТОНИМИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД» В ТРАКТОВКЕ РЕНАТЫ БАРТШ

В статье рассматривается философская интерпретация метафоры и метонимии на основе категорий сходства и смежности как их концептуальной базы, предложенная Р. Бартш. Обсуждается роль метафоры и метонимии в формировании новых концептов и их лингвистической манифестации.

История исследования метафоры и метонимии насчитывает тысячелетия. Данные языковые явления то выдвигались в число центральных лингвистических проблем своего времени, то уходили на периферию, однако никогда полностью не исчезали с научного горизонта. Настоящий же этап развития языкознания можно охарактеризовать как «когнитивный метафорический бум», связанный с изменением парадигмы научного знания в лингвистике, а именно с заменой системно-структурного подхода когнитивным и появлением когнитивной теории метафоры, занимающей центральное место в современной семантике. Издание ставшей интеллектуальным бестселлером книги лингвиста Г. Лакоффа, написанной совместно с философом М. Джонсоном, «Метафоры, которыми мы живем» [8], сравнивается с «пушечным выстрелом», послужившим сигналом к началу революции в теории метафоры [3]. Полностью концепция когнитивной метафоры, получившая широкую известность за пределами лингвистики, изложена в серии книг Г. Лакоффа [6, 7, 9, 10]. В них обосновывается точка зрения, согласно которой метафора относится не к уровню языковой техники, но к уровню мышления и деятельности, поскольку «наша обыденная концептуальная система, в терминах которой мы одновременно думаем и действуем, фундаментально метафорична по своей природе» [8: 3]. Переплетение метафор, лежащее в основе мыслительной деятельности, формирует когнитивную карту, сеть концептов, организованных таким образом, чтобы укоренить абстрактные концепты в физическом опыте человека, в его отношениях с внешним миром.

Следует указать, что существенное влияние на формирование взглядов Г. Лакоффа на метафору оказали лекции американского лингвиста русского происхождения Романа Якобсона, прослушанные Г. Лакоффом в Гарвардском университете в середине 60-х гг. прошлого века. Американские ученые считают Р. Якобсона классиком американской структурной лингвистики. Российские лингвисты указывают на вклад Р. Якобсона в литературоведение, антропологию, структурную лингвистику, неврологию, историю русской культуры. Основы еще одного направления в науке – нейролингвистики – заложены в главах, посвященных афазии, в монографии «Основные принципы языка» [4]. Р. Якобсон объясняет нарушения речи на основе данных неврологии о структуре мозга. Это исследование обеспечило физиологическое обоснование его учения о метафоре (оси комбинации) и метонимии (оси селекции) [5]. В основе концепции Р. Якобсона лежит противопоставление метафоры и метонимии как двух способов упорядочения языковых единиц. Рассматривая лингвистические особенности афазии, ученый особое внимание уделяет крайним проявлениям афазии, а именно селективной афазии – нарушению способности заменять одни слова другими словами – и аграматизму – нарушению способности составлять фразы и предложения. Р. Якобсон называет селективную афазию «нарушением по сходству «(similarity disorder)», а аграматизм – «нарушением по смежности (contiguity disorder)». В более широком плане в основе метафоры, по Р. Якобсону, лежат принципы выбора и замещения, действующие на основе сходства, в основе же метонимии – принципы комбинирования и контекста, действующие на основе смежности. В соответствии с процедурами структурализма, определявшего развитие лингвистики в XX в., Р. Якобсон соотносит метафору с парадигматикой, поскольку метафора позволяет осуществ-

КОЛОДКИНА Елена Николаевна – кандидат филологических наук, доцент, профессор Технологического университета Южного Тайваня (Southern Taiwan University of Technology)
© Колодкина Е. Н., 2007

лять альтернативную концептуализацию одних и тех же явлений, а метонимию – с синтагматикой, поскольку она объединяет явления, смежные друг с другом. Более того, Р. Якобсон соотносит метафору и метонимию с различными направлениями в искусстве, например романтизмом и реализмом, экспрессионизмом и кубизмом соответственно. Он обращается даже к отдельным видам искусства, рассматривая, в частности, искусство кино как типично метонимическое искусство. По мнению Р. Дирвена [3], концепция Р. Якобсона о метафоре и метонимии является связующим звеном между прошлым и настоящим, между лингвистическими традициями XIX в. и их возрождением в конце XX столетия.

Разработка положений, эксплицитно выраженных или имплицитно намеченных в концепции Р. Якобсона, происходит в разных направлениях. Так, ряд лингвистов в своих исследованиях исходит из того, что наличие двух противоположных полюсов предполагает существование континуума, на котором метафора и метонимия могут встретиться, и исследует этот континуум (см., напр.: [11]). Другие ученые обращаются к детальной разработке положений Р. Якобсона, зачастую лишь тезисно изложенных в его краткой работе (см., напр.: [2]).

На наш взгляд, наибольший вклад в развитие концепции Р. Якобсона внесла Рената Бартш [1]. Специализируясь в области философии языка, она осуществила философскую интерпретацию предложенной Р. Якобсоном оппозиции метафоры и метонимии и категорий сходства и смежности как их концептуальной базы. Р. Бартш в первую очередь интересуется проблемой формирования концептов, созданием новых концептов и их лингвистической манифестацией. Данный автор исходит из того, что существует сильное взаимодействие и взаимозависимость между концептами и их языковым выражением. По Р. Бартш, репрезентация концептов происходит через стабилизированный набор примеров или ситуаций, предназначенных для их языкового выражения. Лингвистически закодированный концепт, который еще не стабилизировался, является квазиконцептом. Стабилизация концепта обозначает, что сходство в наборе примеров для формирования концепта более не уменьшается при прибавлении новых примеров. Для того чтобы поддерживать стабильность увеличивающегося набора репрезентаций, новый пример использования выражения, который не соответствует данному набору, должен рассматриваться как начальный пример нового набора, метафорически или метонимически связанного со старым набором. Этот пример далее может превратиться в новый концепт, однако он будет представлен старым выражением.

Р. Бартш считает рассмотрение метафоры и метонимии, предложенное Г. Лакоффом, как видения одного объекта через другой, как способ репрезентации знания в языковой форме, а именно как концептуальный перенос из области-источника в область цели, недостаточным и вводит краеугольное для своей концепции понятие «перспектива». Изменение перспективы делает возможным отображение одной ментальной области через другую путем выбора подходящих соотносящихся элементов в двух концептуальных областях. Именно перспектива позволяет осуществить выбор тех сходных элементов, по которым концепты, объединенные одной перспективой, отличаются от других концептов, относящихся к той же перспективе. При формировании новых концептов перспектива первоначально задается деятельностью, желаниями, пристрастиями, активирующими ряд нейронных полей, особенно сенсорных и двигательных. Для формирования перспективы также важен учет существующих в социуме культурных норм и ранее полученных знаний.

Опираясь на понятие перспективы и изменения перспективы, Р. Бартш указывает на принципиальную разницу между двумя парами способов расширения лингвистических категорий, а именно расширением и сужением значений, с одной стороны, и метафорой и метонимией, – с другой. Расширение и сужение рассматриваются как концептуальные процессы, не требующие изменения перспективы. Настоящие же концептуальные инновации, напротив, требуют изменения перспективы на основе контекстуальных изменений, вызванных заинтересованностью или особым отношением к чему или кому-либо, и могут быть сформулированы в форме вопроса. Так, говоря о льве, мы формулируем вопрос «Что это за животное?», а когда мы называем Джона львом, мы спрашиваем: «Что это за поведение?». Исходя из новой перспективы, между новыми и старыми примерами использования языковых выражений возникает либо сходство (метафора), либо физическая или воображаемая смежность (метонимия).

Р. Бартш предлагает трактовать термин «перспектива» не только в обыденном смысле как «способ урегулирования ситуаций», но в терминологическом смысле как концепт второго, более высокого уровня для различных концептов, входящих в него. Так, для концептов *испытывать боль*, *чувствовать себя больным*, *быть здоровым* перспективой является *здоровье*. Так, концепт *лев* соотносится с перспективой «что это за животное?», а после изменения перспективы соответствует перспективе «поведение в неблагоприятной или опасной ситуации», которая позволяет увидеть как поведение животного, так и поведение человека. Таким образом, понятие перспективы объясняет, какие элементы области-источника накладывают-

ся на черты области-цели и какие элементы обеих областей нерелевантны для процесса переноса. Р. Бартш считает, что все переносы подчинены общему, основному принципу стабильности, в соответствии с которым как ранее существующие категории, так и вновь созданные должны оставаться стабильными, по крайней мере, для взрослых носителей языка. Для детей, напротив, характерно расширение категорий. Так, например, для ребенка расширение категории *собака* идет из области животного мира в такие области, как *мамино меховое пальто* (перенос со шкуры собаки) или пуговицы ее платья (перенос с глаз собаки). Важно, что в отличие от категорий детей категории взрослых имеют тенденцию оставаться стабильными. Р. Бартш особо подчеркивает, что любое расширение происходит только при наличии стабильности категории.

Концептуально, что принципы сходства и смежности связаны с различными типами сущностей: сходство объясняет идентичность свойств объектов и ситуаций, в то время как смежность объясняет идентичность отдельных личностей и событий. Таким образом, принцип смежности лежит в основе создания исторических концептов, особенно событийных и индивидуальных.

Традиционно метафорические концепты делятся на две группы: традиционные метафоры, например *John is a wolf,* и креативные метафоры, как, например, поэтическое видение белых цветущих кустов боярышника на склоне холма как потока цвета слоновой кости, струящегося вниз. По мнению Р. Бартш, такая трактовка не учитывает основополагающего принципа перспективы. В метафоре *John is a wolf* это перспектива социального поведения. Все физические свойства, такие, как наличие рта, зубов, глаз, в расчет не принимаются, учитывается лишь перспектива социального поведения. Этот же самый принцип действует и для креативных метафор. В примере с цветущим боярышником писатель нарушает естественную природу перспективы и обращается к перспективе внешнего вида, задавая вопрос «Как это выглядит?», и, таким образом, трансформирует образ падающей воды в образ цветущего боярышника. Читатель сможет увидеть образ так, как его увидел писатель.

В метонимии также происходит изменение перспективы, обычно от части к целому, от причины к результатам, или наоборот. Изменение перспективы можно выразить вопросом «О какой части какого объекта идет речь?» или «О ком идет речь?» как, например, в выражении, употребляемом в больничном обиходе, *печень с третьего этажа* происходит изменение перспективы по направление к пациенту.

Р. Бартш признает, что в ряде случаев неясно, имеем ли мы дело с метафорой или метонимией. Более того, подобные примеры можно рассматривать и как метафору, и как метонимию. Р. Бартш вводит термин «метафоро-метонимический переход (metaphor-metonymy switch)». Она приводит пример с использованием слов, описывающих температурные ощущения, для характеристики цвета или человека. По мнению Р. Бартш, при переносе температурного ощущения холода к холодному цвету или холодному человеку наблюдается как метафорический, так и метонимический перенос. Здесь существуют метонимические отношения «причина→результат», связывающие ощущения холода и окостенелости с эмоциональным состоянием, их сопровождающим. Холодные цвета, такие, как сиреневый, голубой и зеленый, вызывают аналогичное эмоциональное состояние. Таким образом, по Р. Бартш, метонимические отношения, связывающие причину и результат, переносят термин *холодный* от обозначения состояния эмоциональной холодности, окостенелости к цвету, который вызывает их. С другой стороны, возможно рассматривать анализируемый перенос от температуры к цвету и как метафорический на основе сходства, определяемого в терминах относительной идентичности. Мы называем температурные ощущения и цвет *холодными,* потому что существует сходство между низкой температурой и определенным цветом тела человека как причиной эмоционального состояния холода, окостенелости. Подобным образом, перенос термина *холодный* от эмоций к человеку, их испытывающему, также может быть объяснен через метонимию: людей называют *холодными*, потому что они кажутся эмоционально холодными, окостенелыми и отдаленными и/или потому, что их поведение вызывает чувство эмоциональной холодности и отдаленности. В первом случае мы имеем дело с метонимическим переносом от эмоционального состояния человека к человеку в целом, т. е. перенос по модели «часть→целое». Во втором случае перенос идет от чувства эмоциональной холодности и отдаленности как результата поведения человека, как причины, которую перспектива далее переносит от поведения человека к собственно человеку и, в таком случае, может рассматриваться в рамках моделей «часть→целое» или «причина→результат». Объяснение в терминах метафорического переноса возможно на основе сходства между температурным холодом, вызывающим ощущение холода, окостенелости и отдаленности и соответствующей социальной обстановкой, вызывающей чувство холода, окостенелости и отдаленности. Это сходство основывается на частичной идентичности результатов воздействия как холодной физической среды, так и социального окружения, вызывающих телесное чувство холода и окостенелости, и эмоционального чувства холодности, окостенелости и отдаленности, соответственно. Таким образом, если

сходство в перспективе возникает благодаря относительной идентичности, мы можем говорить о метафоре, в основе которой лежат отношения идентичности. Мы можем также говорить о серии метонимических переносов в рамках отношений идентичности в двух направлениях: в прямом и обратном, как в вышеприведенном примере со словом *холодный*.

Итак, по Р. Бартш, принципиальное различие между метафорой и метонимией как двумя способами создания новых концептов из старых концептов состоит в том, что они формируются при изменении перспективы либо на основе сходства, т. е. идентичности одного или более элементов сопоставляемых предметов и ситуаций, либо смежности, которая появляется в результате особого рода отношений смежности. Если же идентичность элемента относительна, т. е. он может рассматриваться также и в рамках отношений смежности, присущих предмету или ситуации, то создание нового концепта, на которой переходит термин, может трактоваться и/или как метафора, и/или как серия метонимий.

Примечания

1. *Bartsh, R.* Generating polysemy: Metaphor and metonymy. In R. Dirven and R. Pörings (eds.) Metaphor and metonymy in comparison and contrast [Text] / R. Bartsh. Berlin; New York: Mouton de Gruyter, 2003. P. 49–75.

2. *Dirven, R.* Metonymy and metaphor: Different mental strategies of conceptualization [Text] / R. Dirven. Leuvense Bijdragen, 1993. P. 1–28.

3. *Dirven, R.* Introduction. In R. Dirven and R. Pörings (eds.) Metaphor and metonymy in comparison and contrast [Text] / R. Dirven. Berlin; New York: Mouton de Gruyter, 2003. P. 1–38.

4. *Jakobson, R.* Fundamentals of Language [Text] / R. Jakobson, M. Halle. The Hague/Paris: Mouton, 1956.

5. *Jakobson, R.* The metaphoric and the metonymic poles. Fundamentals of Language [Text] / in R. Jakobson and M. Halle (eds.). Vol. 3. The Hague/Paris: Mouton, 1956. P. 90–96.

6. *Lakoff, G.* The contemporary theory of metaphor. *In Metaphor and Thought* (2nd edn) [Text] / G. Lakoff; ed. A. Ortony. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. P. 1–16.

7. *Lakoff, G.* How unconscious metaphorical thought shapes dreams. In *Cognitive Science and the Unconscious* [Text] / G. Lakoff; ed. D. J. Stein. Washington, DC: American Psychiatric Press, 1997. P. 89–119.

8. *Lakoff, G. Metaphors We Live By* [Text] / G. Lakoff, M. Johnson. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1980.

9. *Lakoff, G. Philosophy in the Flesh* [Text] / G. Lakoff, M. Johnson. New York: Basic Books, 1999.

10. *Lakoff, G. More than Cool Reason: A Field Guide to Poetic Metaphor* [Text] / G. Lakoff, M. Turner. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1989.

11. *Warren, B.* Aspects of referential metonymy. In K.-U. Panther and G. Radden (eds.). Metonymy in Language and Thought [Text] / B. Warren. Amsterdam/ Philadelphia: John Benjamins, 1999. P. 121–135.

Н. К. Немчанинова, А. А. Свицова

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕВОДА И ПОНИМАНИЯ АНГЛИЙСКИХ ПОСЛОВИЦ

Чтобы в совершенстве владеть языком, надо знать культуру страны изучаемого языка, её фольклор. Пословицы являются неотъемлемой составной частью культурных традиций народа. Но в то же время, сравнение пословиц и поговорок разных народов показывает, как много общего имеют эти народы. Это способствует их лучшему взаимопониманию и сближению.

Многовековой опыт общения народов, говорящих и пишущих на различных языках, свидетельствует о том, что хороший переводчик должен не только знать отдельный смысл каждого слова и понимать смысл переводимого текста, но и владеть всем фразеологическим богатством обоих языков. Трудности перевода иноязычных пословиц возникали всегда.

Учитывая все особенности того или иного языка, переводить то, что является частью культуры одного народа, на другой язык очень сложно.

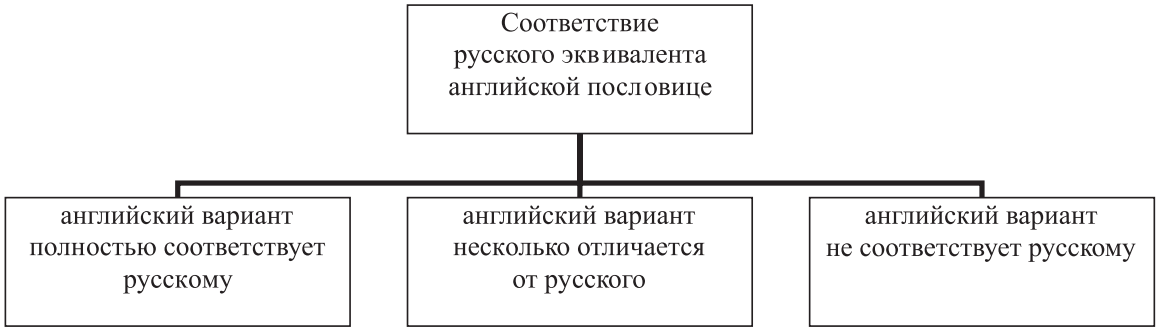
Многие английские пословицы и поговорки легко переводятся на русский язык: *Friends are thieves of time/Друзья – воры твоего времени*; другие же нуждаются в объяснении, так как, наоборот, не имеют ничего общего с нашими русскими выражениями, хотя иногда можно догадаться, что же англичане хотят сказать. Рассмотрим английскую пословицу *Jack is no judge of Jill's beauty*. Дословный перевод этой пословицы звучит так: *Джеку не судить о красоте Джил*. Хотя смысл пословицы и понятен, для русского человека эта пословица кажется чем-то новым. Поскольку в пословице содержатся английские имена собственные, лучше в качестве эквивалента подобрать такой, где были бы русские имена собственные. Например, такой: *Каков Ананья, такова у него и Маланья*. Этот вариант – для носителя русского языка, но если перевести ее опять на английский язык, то получится пословица, которой, во-первых, не поймет англичанин, а во-вторых, полученный вариант пословицы будет отличен от первоначального. Другим словарным эквивалентом этой пословицы (без использования имен) является пословица *Любовь слепа*. Дословный перевод этой пословицы на английский язык также будет отличным от первоначального.

НЕМЧАНИНОВА Наталья – студентка V курса факультета информатики ВятГГУ

СВИЦОВА Анна Альбертовна – кандидат филологических наук, доцент по кафедре германских языков ВятГГУ

© Немчанинова Н. К., Свицова А. А., 2007

Пословица и её эквивалент	Соответствие русского эквивалента английской пословице
A friend in need is a friend indeed Друзья познаются в беде	**91 %**
Books and friends should be few but good Книги и друзья должны быть редкими	**79 %**
Lend your money and loose your friend Хочешь потерять друга – одолжи ему денег	**78 %**
Better lose a jest than a friend Шуткой врага не задобришь, а друга оттолкнешь	**42 %**
A man is known by the company he keeps С кем хлеб-соль водишь, на того и походишь	**67 %**
Love is blind Кто полюбит, тот видит только одни достоинства	**74 %**
Love will find a way Гони любовь в дверь, она влетит в окно	**58 %**
Love me, love my dog Меня любишь, так и собаку мою не бей	**71 %**
Love cannot be forced Сердцу не прикажешь	**88 %**
True love never run smooth Путь истинной любви никогда не бывает гладким	**80 %**



Мы пришли к выводу, что пословицы можно разделить на следующие категории (см. рисунок) и лучше переводить не дословно, «слово в слово», а подбором эквивалентов. Эквивалентов у пословицы может быть много, и выбирать наиболее адекватный следует исходя из контекста.

Нами был проведен эксперимент, целью которого было установить, насколько испытуемые (студенты IV курса факультета информатики Вятского государственного гуманитарного университета, изучающие английский язык как вторую специальность) понимают разницу между дословным переводом пословицы и эквивалентом. Испытуемым были предложены карточки с 10 английскими пословицами с лингвокультурными концептами «Дружба» и «Любовь» и их словарными русскими эквивалентами.

Задачей испытуемых было определить, на сколько процентов русский эквивалент соответствует английской пословице (от 0 до 100%). Результаты анкеты представлены в таблице (см. таблицу).

Пословицы, которым максимально, по мнению испытуемых, соответствуют русские эквиваленты: *A friend in need is a friend indeed* (91%), *Love cannot be forced* (88%), *True love never run smooth* (80%). Пословицы, которым минимально соответствуют русские эквиваленты: *Better lose a jest than a friend* (42%), *Love will find a way* (58%), *A man is known by the company he keeps* (67%).

Проанализировав анкеты, можно сделать вывод, что разница между эквивалентом и дословным переводом не всегда понятна студентам, изучающим английский язык. Кроме того, не у всех пословиц (в силу различий русской и английской культуры) есть полный эквивалент, поэтому, как мы считаем, для адекватного перевода необходимо изучать свою культуру и культуру народа, язык которого вы изучаете. Пословицы и поговорки являются сокровищницей народной мудрости и отражают дух народа, они представляют незаменимый материал для исследования культуры.

Примечания

1. *Райдаут, Р.* Толковый словарь английских пословиц [Текст] / Р. Райдаут, К. Уиттинг. СПб.: Лань, 1997. 256 с.

2. *Митина, И. Е.* Английские пословицы и их русские аналоги. Русские пословицы и их английские аналоги [Текст] / И. Е. Митина. СПб.: КАРО, 2003. 334 с.

3. *Модестов, В. П.* Английские пословицы и поговорки, их русские соответствия [Текст] / В. П. Модестов. М: Худож. лит., 2000. 468 с.

4. *Буковская, М. В.* Словарь употребительных английских пословиц [Текст] / М. В. Буковская, С. И. Вяльцева, З. И. Дубянская. М.: Русский язык, 1988. 240 с.

А. А. Свицова

ЛИНГВОКУЛЬТУРНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ КОНЦЕПТА

Наиболее перспективными, продуктивными при решении задач лингвокультурологического характера нам представляются научные изыскания, в поле зрения которых оказываются устойчивые, клишированные, имеющие высокий индекс употребления речевые высказывания.

Основным способом диахронического и синхронического опредмечивания культурного пространства этносов, столь необходимого человеку для понимания зарождения, принципов и форм функционирования и перспектив дальнейшего развития цивилизации, является изучение различных семиотических систем, в том числе и вербальной, наиболее полно сохранивших нам для научного анализа в виде текстов «алфавит человеческих идей» [15] того или иного народа, той или иной этнической общности.

Речевые высказывания являют собой результат рефлексии, глубинной проработки тем или иным (микро) социумом наиболее актуальных для него понятий, и – как следствие – рельефно показывающие самобытность, оригинальность его языкомышления и речевых поступков [12], такими, безусловно, являются пословицы.

Лингвокультурология, как определяет ее В. Н. Телия, это дисциплина, исследующая «прежде всего живые коммуникативные процессы и связь используемых в них языковых выражений с синхронно действующим менталитетом народа» [21: 218].

Цель лингвокультурологии – изучение обыденной картины мира. Лингвокультурология стремится к экспликации культурно-национальной значимости единиц, которая достигается на основе соотнесения их с концептами общечеловеческой или национальной культуры [21: 30]. Лингвокультурология, как и любая научная дисциплина, обладает своим категориальным аппаратом – системой базовых терминов. Одной из ее насущных задач является изучение человека в языке, и, по мнению А. А. Залевской, человек должен быть изучен «как функционирующий в реальных условиях языка и культуры» [9: 42].

Одним из ключевых понятий лингвистики и лингвокультурологии, соотносимым с определенной совокупностью выраженных в языке ментальных представлений человека об объектах и явлениях окружающего мира, а также с совокупностью представлений о самом человеке, является термин «концепт». В лингвистической литературе термин «концепт» трактуется по-разному, исходя из того релевантного признака, который является основой дефиниции. Так, одни ученые под концептом понимают некоторые подстановки значений, скрытые в тексте «заместители» множества предметов, облегчающие общение и тесно связанные с человеком и его национальным, культурным, профессиональным, возрастным и прочим опытом [2].

Другая точка зрения базируется на том, что концепт относится к первичному культурному социопсихическому образованию в коллективном сознании, опредмеченному в той или иной языковой форме [16]. Концепт рассматривается как совокупность его «внешней», категориальной отнесенности и внутренней, смысловой структуры, имеющей строгую логическую организацию. В основе концепта лежит исходная, прототипическая модель основного значения слова (т. е. инвариант всех значений слова), в связи с этим можно говорить о центральной и периферийной зонах концепта, причем последняя способна к дивергенции, т. е. вызывает удаление новых производных значений от центрального. «Внешняя» и «внутренняя» стороны выходят на его центральный, базисный элемент. Для внутренней структуры он служит основой прототипического значения всех словоупотреблений данного слова, для внешней – моделью категоризации всех его значений. Структура концепта может быть цепочечной, радиальной и смешанной.

Лингвокогнитивный подход к концепту относит концепты к моделям сознания, которые существуют в сознании личности и также являются единицами информационной структуры, которые отражают знание и опыт человека. Компонентами являются представления и понятия о предметах и явлениях окружающего мира и отношения между ними [13]. Рассматривая природу и структуру концепта с позиций психолингвистики, А. А. Залевская и В. А. Пищальникова особо подчеркивают сложную структуру концепта, отражение в нем как рационального, так и эмоционального способов освоения мира, сочетание как абстрактных, так и конкретных компонентов [8, 18]. По А. Вежбицкой, концепт – это объект из мира «Идеальное», имеющий имя и отражающий определенные культурно обусловленные представления человека о мире «Действительность» [3].

Ю. С. Степанов и С. Х. Ляпин стоят на позициях лингвокультурологического подхода к пониманию концепта. Ю. С. Степанов предлагает различать термины «понятие» и «концепт», относя первый к логике и философии, а второй – к одной отрасли логики (математической логи-

СВИЦОВА Анна Альбертовна – кандидат филологических наук, доцент по кафедре германских языков ВятГГУ

© Свицова А. А., 2007

ке), а в последнее время также к культурологии [20]. Концепт трактуется им как основная ячейка культуры в ментальном мире человека, в которой, с одной стороны, заложено содержание понятия, а с другой – все то, что делает его фактом культуры: этимология, краткая история данного концепта, современные ассоциации, оценки, переживания. «Концепт – это как бы сгусток культуры в сознании человека; то, в виде чего культура входит в ментальный мир человека. И, с другой стороны, концепт – это то, посредством чего человек – рядовой, обычный человек, не "творец культурных ценностей" – сам входит в культуру, а в некоторых случаях и влияет на нее» [20: 43]. Все концепты, в свою очередь, опираются на некоторые предельные базовые инварианты человеческой жизни: групповая общность, телесность (экзистенциальные моменты, связанные с личной историей и физиологией человека), иерархия групп и отношения означивания. В концепт входит как все то, что определяет значение и смысл понятия, так и то, что делает его фактом культуры: этимология, история, применение в научных дисциплинах, сопутствующие социальные оценки. Концепт переживается, это целостный «пучок» представлений, понятий, знаний, ассоциаций, интенций, воспоминаний.

По Ю. С. Степанову, структура концепта трехслойна: основной, актуальный признак – это наиболее общий, всеохватывающий уровень концепта; дополнительный, или несколько дополнительных, пассивных признаков, являющихся уже не актуальными, историческими; внутренняя форма, обычно вовсе не осознаваемая, запечатленная во внешней, словесной форме. Как нам представляется, различие между лингвокогнитивным и лингвокультурными подходами заключается в том, что при лингвокогнитивном подходе акцент делается на то, что концепт – это единица сознания, которая связана с ментальным лексиконом человека. В лингвокультурологии концепт – это «константа культуры» [20], то, в виде чего культура входит в ментальный мир человека, одновременно являясь средством, с помощью которого сам человек входит в культуру.

Все это позволяет охарактеризовать концепт как сложную культурно значимую оперативную единицу сознания, имеющую различные формы репрезентации в языке, а «интеграция лингвокультурного и лингвокогнитивного подходов может сделать исследования в этой области наиболее полными и глубокими и способствовать созданию концептуально-культурологического направления» [17: 8].

Вслед за Ю. С. Степановым мы определяем концепт как этнически, культурно обусловленное, сложное структурно-смысловое, как правило, лексически и/или фразеологически вербализованное образование, базирующееся на понятийной основе, включающее в себя, помимо понятия, образ и оценку и функционально замещающее человеку в процессе рефлексии и коммуникации множество однопорядковых предметов (в широком смысле слова), вызывающих пристрастное отношение к ним человека, это «сгусток культуры в сознании человека; то, в виде чего культура входит в ментальный мир человека, и одновременно это то, посредством чего человек сам входит в культуру и влияет на нее» [20: 47].

Таким образом, содержание концепта многомерно и многопланово. В связи с этим, как отмечает В. И. Карасик, целесообразно противопоставлять 1) объективное потенциальное содержание или концепт, 2) содержательный минимум, представленный в словарной дефиниции и являющийся частичной и субъективной актуализацией концепта, 3) конкретизацию содержательного минимума (которая, в свою очередь, включает тематизацию, прагматизацию, сюда же относятся статусно-ролевые, ситуативные, этноспецифические обертоны языковых реалий) [11]. Похожую точку зрения на разную степень экспликации содержания концепта можно обнаружить и у А. Вежбицкой, когда она вводит термины «концепт-минимум» и «концепт-максимум» в зависимости от того, владеет ли рядовой носитель языка смыслом слова полностью или нет [4].

Паремиологический фонд отдельного языка «инвентаризует» набор моделей ситуаций и отношений, возникающих в обществе его носителей [19]. Представление о каждой такой модели опирается на отдельный концепт, демонстрирующий существование в конкретной этнической культуре определенной ценности. В. И. Карасик считает необходимым объединять концепты, раскрывающие ценностные приоритеты соответствующей культуры, в системы или, называя их по-другому, в лингвокультурные доминанты и указывает, что они могут быть «измерены», а их этнокультурная специфика может быть выявлена путем сопоставления ценностных суждений, вытекающих из стереотипов поведения, зафиксированных в значениях слов, устойчивых выражений, прецедентных текстов, какими, безусловно, являются пословицы [11].

В разных лингвокультурах фокусировка и членение концептуального пространства осуществляется по-разному. При совпадении этого членения у людей из разных культур будет больше предпосылок для адекватной коммуникации, нежели при несовпадении. Наиболее эффективным путем выделения национально-специфичных концептов из языков является их межъязыковое сопоставление. Д. О. Добровольский считает, что концепт небезразличен к своей языковой манифестации, и поэтому, если в языке существует

ряд идиом, по-разному выражающих один и тот же концепт, есть основания считать, что этот концепт нетождественен сам себе, а это разные концептуальные варианты и соответственно это разные семантические структуры [7].

При сопоставлении американской и русской концептосфер обращает на себя внимание то, что концепты русской культуры, относящиеся к духовной и эмоциональной сторонам жизни, часто не имеют американских аналогов (например, концепты «душа», «судьба», «тоска»). В то же время концепты американской культуры, не переводимые на русский язык, в большинстве своем отражают прагматический и активистский характер американской культуры [14]. В. И. Карасик утверждает, что различие между представлением тех или иных концептов в разных языках «выражается большей частью не в наличии или отсутствии определенных признаков, а в частотности этих признаков и их специфической комбинаторике» [10: 15].

В рамках когнитивного подхода под фразеологизмами, и пословицами в том числе, понимаются хранящиеся в памяти «в виде свернутых до ядерных прототипов когнитивные микроструктуры», которые содержат три компонента [5: 8–9]: план содержания – хранящийся в памяти образ, составляющий внутреннюю форму (образную мотивацию) фразеологизма; план выражения – соответствующая комбинация слов – «акустически-графический “след” фразеологизма в сознании»; собственно концептуальный компонент, относящий когнитивную микроструктуру фразеологизма к определенной понятийной области. Поскольку пословица как когнитивная микроструктура связана с большей когнитивной структурой (концептом), то именно пословица является ступенькой в процессе вербализации концепта, представляет собой реализацию определенной его части, которая связана с определенным представлением или образом, создаваемым данной пословицей. Н. Ф. Алефиренко указывает, что фразеологизмы «накладываются» на протоязыковую структуру мысли и представляют собой материал для интерпретации определенной части когнитивной структуры [1: 73].

Кроме того, связь когнитивной микроструктуры пословицы с большей когнитивной структурой концепта проявляется также в том, что рекуррентность пословицы в речи происходит согласно определенному устоявшемуся способу дискурсивной деятельности говорящего и реципиента «по известным данному культурному сообществу эталонам и стандартным схемам» [1: 75]. Устойчивость является еще одним свойством когнитивной микроструктуры пословицы. Важно разграничить, что подразумевается под устойчивостью: постоянная воспроизводимость в речи в неизменном виде, узнаваемость или фиксация в словарях. Пословицы, по мнению И. Мельчука [22], обладают прагматической устойчивостью, которая соотносится с концептуальной репрезентацией фразеологической единицы. К данному типу фразеологической устойчивости относятся также речевые стереотипы, высказывания (в том числе и цитаты) [22: 28–29].

Примечания

1. *Алефиренко, Н. В.* Провербиальное порождение культурных концептов и их фразеологическая репрезентация [Текст] / Н. В. Алефиренко // Филологические науки. 2002. № 5. С. 72–82.

2. *Аскольдов, С. А.* Концепт и слово [Текст] / С. А. Аскольдов // Русская словесность. От теории словесности к структуре текста: антология. М., 1980. 340 с.

3. *Вежбицкая, А.* Язык. Культура. Познание [Текст] / А. Вежбицкая. М.: Русские словари, 1996. 416 с.

4. *Вежбицкая, А.* Понимание культур через посредство ключевых слов [Текст] / А. Вежбицкая. М.: Наука, 2001. 288 с.

5. *Добровольский, Д. О.* Фразеология в ассоциативном словаре [Текст] / Д. О. Добровольский, Ю. Н. Караулов // Известия РАН. Серия литературы и языка. 1992. Т. 52. № 6. С. 3–4.

6. *Добровольский, Д. О.* Ассоциативный фразеологический словарь русского языка [Текст] / Д. О. Добровольский, Ю. Н. Караулов. М.: Помовский и партнеры, 1994. 116 с.

7. *Добровольский, Д. О.* Образная составляющая в семантике идиом [Текст] / Д. О. Добровольский // Вопросы языкознания. 1996. № 1. С. 71–94.

8. *Залевская, А. А.* Психолингвистические проблемы семантики слова [Текст] / А. А. Залевская. Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1982. 80 с.

9. *Залевская, А. А.* Национально-культурная специфика картины мира и различные подходы к ее исследованию [Текст] / А. А. Залевская // Языковое сознание и образ мира. М.: ИЯ РАН, 2000. С. 39–55.

10. *Карасик, В. И.* Культурные доминанты в языке [Текст] / В. И. Карасик // Языковая личность: культурные концепты: сб. науч. тр. ВГПУ, ПМПУ. Волгоград – Архангельск: Перемена, 1996. С. 12–18.

11. *Карасик, В. И.* Языковой круг: личность, концепты, дискурс [Текст] / В. И. Карасик. Волгоград: Перемена, 2002. 330 с.

12. *Колшанский, Г. В.* Объективная картина мира в познании и языке [Текст] / Г. В. Колшанский. М.: Наука, 1990. 108 с.

13. *Кубрякова, Е. С.* Концепт [Текст] / Е. С. Кубрякова // Е. С. Кубрякова, В. З. Демьянков, Ю. Г. Панкратц, Л. Г. Лузина. Краткий словарь когнитивных терминов. М., 1996. С. 90–94.

14. *Леонтович, О. А.* Россия и США: Введение в межкультурную коммуникацию [Текст] / О. А. Леонтович. Волгоград: Перемена, 2003. 399 с.

15. *Локк, Дж.* Сочинения: в 3 т. [Текст] / Дж. Локк; ред. И. С. Нарский, А. Л. Субботин. Т. 1. М.: Мысль, 1985. 432 с.

16. *Ляпин, С. Х.* Концептология: к становлению подхода [Текст] / С. Х. Ляпин // Концепты. Научные труды центра концепта. Вып. 1. Архангельск, 1997. С. 11–35.

17. *Нерознак, В. П.* Теория словесности: старая и новая парадигмы [Текст] / В. П. Нерознак // Семиотика и информатика: сб. науч. ст. М.: 1998. Вып. 36. С. 5–8.

18. *Пищальникова, В. А.* Национальная специфика картины мира и ее репрезентация в языке [Текст] / В. А. Пищальникова // Языковое сознание: содержание и функционирование. XIII междунар. симпозиум по психолингвистике и теории коммуникации: тез. докл. М.: ИЯ РАН, 2000. С. 189–190.

19. *Савенкова, Л. Б.* Русские паремии как функционирующая система [Текст] : автореф. дис. ... д-ра филол. наук / Л. Б. Савенкова. Ростов н/Д, 2002. 46 с.

20. *Степанов, Ю. С.* Константы мировой культуры [Текст] / Ю. С. Степанов, С. Г. Проскурин. М.: Наука, 1993. 158 с.

21. *Телия, В. Н.* Русская фразеология. Семантические, прагматические и лингвокультурные аспекты [Текст] / В. Н. Телия. М.: Языки русской культуры, 1996. 284 с.

22. *Mel'cuk, Ig.* Collocations and lexical functions [Text] / Ig. Mel'cuk // Phraseology: Theory, Analysis and Applications. Oxford: Oxford University Press, 1998. P. 23–41.

А. М. Шиляева, Т. А. Бухтоярова

РЕФОРМЫ СПЕЛЛИНГА АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА – ОТ ЗАРИ СТАНДАРТИЗАЦИИ ДО НАШИХ ДНЕЙ

В статье дается обзор тенденций реформирования спеллинга английского языка, начиная от стандартизации XVI в. до революционных веяний современности.

Английский язык, на котором в XXI в. говорит более 300 миллионов человек, представляет собой продукт длительного исторического развития, в процессе которого язык подвергался всевозможным изменениям. Рассмотрение данных изменений в диахронии дает возможность представить общую картину развития английского языка во всех его сферах: произношении, лексике и грамматике. Именно произношение, а точнее спеллинг как отражение фонетики на письме, и тенденции его реформирования являются предметом данной статьи.

Проблема нормы английского языка начала занимать умы ученых в ранненовоанглийском периоде, а именно в XVI в., когда Джордж Путтенгэм в книге «Искусство английской поэзии» указал на необходимость считать образцовым язык двора, Лондона и его ближайших окрестностей, а значит, и следовать ему, употреблять его повсеместно. На тот момент в речи и письменности на территории страны употреблялись разнообразные диалекты. Однако это указание оказалось недостаточно решающим, так как в самом национальном языке существовало множество вариантов. В связи с тем, что в конце XVI – начале XVII в. английский язык начинают преподавать в школах Англии, вопросы языка все шире обсуждались в кругах образованных людей. В это же время развивается деятельность орфоэпистов, которые пытались описать правила произношения.

Широко известно, что именно в английском языке существуют огромные различия между написанием и произношением большинства слов. Это связано с существенным влиянием французских традиций написания слов, тысячами заимствованных после Норманнского нашествия в 1066 г., а также изобретением печатного станка. По сведениям английского автора Билла Брайсона, до XV в. из-за распространения диалектов жители одной части Англии часто не могли понять представителей другой, и вместе с тем можно было с точностью определить, в какой области были написаны те или иные манускрипты или письма, судя по их орфографии. Однако уже к 1500 г. ситуация начала меняться. Английский книгопечатник, богач и эрудит Уильям Кэкстон основал издательство в Вестминстере и начал публикацию множества книг – исторической, философской, художественной литературы как английских, так и зарубежных авторов, переводы которых часто выполнял сам Кэкстон. Таким образом, готовя рукописи к публикации, редактируя их, иногда внося значительные поправки, он первым закрепил устную речь в письме. Написание многих слов Кэкстона было принято за стандарт и остается неизменным и в наши дни. В книгах Кэкстона отражены черты лондонского диалекта, который стал впоследствии образцовой формой речи и письма по всей Англии и распространился на другие территории.

Фиксация произношения в печатных работах настоятельно потребовала единого подхода к написанию английских слов. Парадоксально, но в то же время книгопечатание гарантировало английскому языку наследие одной из самых непоследовательных систем орфографии в мире. Это связано с тем парадоксальным фактом, что время фиксации спеллинга совпало с мощными фонетическими изменениями в языке. Если бы Кэкстон появился поколением позже, в английском языке было бы меньше таких нелогично написанных слов, как aisle, bread, eight, enough [2: 47–48].

Орфографическая норма была закреплена для преподавания в школах в конце XVI в. Орфоэписты, предшественники фонетистов на донауч-

ШИЛЯЕВА Анна Михайловна – старший преподаватель кафедры германских языков ВятГГУ
БУХТОЯРОВА Тамара Александровна – студентка V курса факультета информатики ВятГГУ
© Шиляева А. М., Бухтоярова Т. А., 2007

ном уровне, пытались описать современное им произношение с точки зрения соотношения буквы и звука и дать те или иные рекомендации. К наиболее серьезным орфоэпистам XVI в., как указывает О. Есперсен, относятся Харт и Уильям Буллокар; в XVII в. следует назвать имена А. Гилла, Ч. Батлера, Ч. Купера; в XVIII в. – Дж. Джоунза; в XIX в. – Дж. Уокера. Стремясь описать орфоэпию языка – правила чтения, соотношение написания и произношения, – некоторые авторы предлагали и некоторые изменения в орфографии.

Образование национального английского языка завершилось в ранненовоанглийский период (примерно до середины XVII в.), когда язык в целом приобрел свой современный характер. Этому во многом способствовал Великий Сдвиг гласных, представляющий собой коренное изменение среднеанглийских гласных звуков, многие из которых в конце концов превратились в дифтонги. Благодаря влиянию скандинавского завоевания и процессам Великого Сдвига гласных во многих положениях в слове исчезает редуцированный – е, в частности в конце слова. Для орфографии это имело особые последствия, возникло так называемое «немое» е, функцией которого стало обозначение долготы предшествующего гласного. В целом большинство фонетических изменений новоанглийского периода не отразилось в орфографии, вследствие чего в английском языке образовался значительный разрыв между произношением и правописанием. В XVII в. в некоторых словах, преимущественно книжных, т. е. известных говорящим более по зрительному образу, чем по слуховому, произношение было изменено в соответствии с написанием или приспособлено к нему. Эти фонетические изменения были возможны только в тех словах, в которых слуховой образ был не настолько привычен и устойчив, чтобы успешно сопротивляться влиянию зрительного образа (например, французские слова faut, vaut в английском языке стали писаться и произноситься с «l»).

Вследствие разрыва между орфографией и произношением и большого количества заимствований из античных языков в английском языке появилась целая категория слов, существующих как бы преимущественно для глаза (eye-words), произношение которых колеблется, причем число вариантов может доходить до 5–6. Характерным примером является медицинский термин phthisis («туберкулез») греческого происхождения. Другим примером может служить слово contumely («пренебрежение») латинского происхождения, имеющее 4 различных варианта произношения [1: 212].

В XIX–XX вв. вопрос о принятии реформ в языке становился все более и более актуальным, в частности реформ правописания, т. е. изменения орфографии тех или иных слов. Естественными мотивами к принятию таких решений служат упрощение языка, удобство и экономия в написании и произношении, а также стремление как можно сильнее сократить разрыв между написанием и произношением.

Одним из самых значительных ученых-лингвистов, предложивших спеллинговую реформу, был Ной Вебстер, американский лексикограф, переводчик Библии, писатель, учитель, редактор. В своем словаре (1821) Вебстер использовал упрощенное написание ряда слов, некоторые из которых существуют и сейчас (musick – music, publick – public, phantasy – fantasy, plough – plow и некоторые другие). Эти изменения зафиксированы преимущественно в американских словарях и применяются при обучении детей в школах, а редакционными издательствами эти изменения приняты как традиционные. Другими американскими учеными предложены ставшие уже достаточно привычными формы слов centre, theatre, color, свойственные американскому варианту английского языка и традиционно отвергаемые на территории Британии. Идеи Вебстера продолжили свое развитие и уже в начале XX в. были приняты в употребление некоторые слова, подвергнутые упрощениям, такие, как interne – intern, mediaeval – medieval, tyre – tire, programme – program, dialogue – dialog.

Безусловно, некоторые идеи реформирования заслуживают внимания в силу своей прагматичности, однако критики заслуживают те реформы, которые предлагают редуцировать непроизносимые буквы, как, например, в слове knight. Если орфография данного слова подвергнется упрощению, то в английском языке появится слово nite, о значении которого нужно будет догадываться исключительно по контексту, так как оно может быть легко перепутано как с knight, так и с night. Такие реформы требуют тщательного, детального рассмотрения и принятия обдуманных, а не спонтанных решений.

Примечания

1. *Иванова, И. П.* История английского языка [Текст] : учебное пособие для институтов и факультетов иностранных языков / И. П. Иванова, Л. П. Чахоян. М., Высш. шк., 2003. 352 с.

2. *Bryson, Bill.* The Mother Tongue: English and How It Got That Way [Text] / Bill Bryson. London, 1991. 270 p.

НОВОСТИ

Н. А. Бушмелева

МЕЖВУЗОВСКАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ВУЗОВСКОМ ОБРАЗОВАНИИ»

В рамках межвузовской научно-практической конференции «Использование современных технологий в вузовском образовании», прошедшей в Вятском государственном университете 11–12 октября 2006 г., было проведено открытое занятие по геометрии со студентами II курса специальности «Прикладная математика и информатика» факультета информатики. Это интегрированное занятие, объединяющее 3 учебные дисциплины: геометрию, программирование и информационные технологии.

Цель проведения открытого занятия состояла в демонстрации возможностей использования различных информационных технологий (электронного процессора, системы программирования, средств презентационной графики) при изучении классической дисциплины.

Конспект этого занятия представлен ниже.

Геометрические сплайны

На занятиях по геометрии мы уже убедились, что в практической жизни и деятельности кривые встречаются достаточно часто, и подробно рассмотрели классические виды кривых: эллипс, гиперболу, параболу и их свойства. А сегодняшнее занятие будет посвящено кривым, без которых немыслима никакая современная графическая система, даже всем известный стандартный графический редактор Paint.

Задание: изобразить в графическом редакторе кривые различной формы и убедиться: для того, чтобы создать нужную форму, надо знать принципы построения произвольных кривых, а также их аналитического описания.

Практически невозможно дать точное описание произвольной кривой, но можно подобрать функцию, аппроксимирующую имеющуюся кривую, то есть такую функцию, которая бы задавала другую кривую, но проходящую через заданные точки имеющейся кривой и максимально близкую к ней. (Заметим, что таких функций может быть и несколько.)

Функции, используемые для аппроксимации произвольных гладких кривых, называются ***математическими сплайнами***.

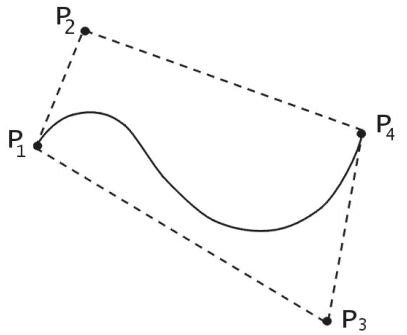
Термин «сплайн» происходит от английского spline, что означает гибкую полоску стали, которую применяли чертежники для проведения плавных кривых, например, для построения обводов или самолетов.

Свойства таких функций:

1) функция должна проходить через все заданные точки;

2) функция должна иметь непрерывную вторую производную на всей области определения.

Кроме этого значения искомой функции должны сравнительно легко вычисляться.



Разумнее искать описание кривой в параметрическом виде. Преимущества параметрического описания – легко описываются кривые и поверхности, отвечающие неоднозначным функциям. Описание можно сделать таким образом, что формула не будет существенно изменяться при поворотах и масштабировании.

Одним из способов задания сплайновой кривой является указание координат ключевых точек. Его придумал француз Пьер Безье. Он предложил разбить кривую на части, каждую из которых задавать четырьмя контрольными точками. Такие серии по четыре контрольные точки в разной мере определяют направление этой кривой. При этом совершенно необязательно условие прохождения кривой через все контрольные точки.

P_1, P_4 – начальная и конечная точки.

P_2, P_3 – ключевые точки, определяющие направление кривой.

БУШМЕЛЕВА Наталья Александровна – кандидат педагогических наук, доцент, зам. декана факультета информатики ВятГГУ

© Бушмелева Н. А., 2007

Возможен случай $P_2 = P_3$.

Такие кривые получили название сплайнов Безье. Рассмотрим их подробнее.

Квадратичная кривая Безье

Заданы три контрольные точки P_0, P_1 и P_2. Применим процедуру деления отрезков, используя параметр t – число от 0 до 1 (например, t = 0,75):

1) Вычислим точку $P_1^{(1)}$ на отрезке P_0P_1 по следующей формуле:

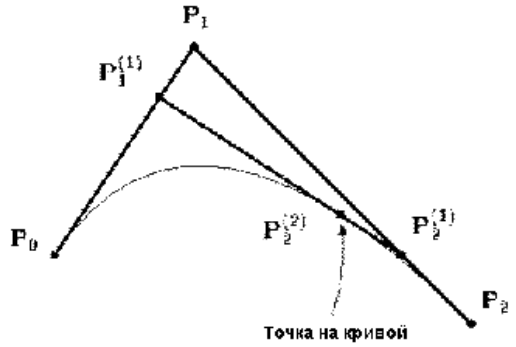
$$P_1^{(1)} = (1 - t) \cdot P_0 + t \cdot P_1.$$

2) Вычислим точку $P_2^{(1)}$ на отрезке P_1P_2 по формуле:

$$P_2^{(1)} = (1 - t) \cdot P_1 + t \cdot P_2.$$

3) Вычислим точку $P_2^{(2)}$ на отрезке $P_1^{(1)}P_2^{(1)}$ по формуле:

$$P_2^{(2)} = (1 - t) \cdot P_1^{(1)} + t \cdot P_2^{(1)}.$$



4) Обозначим $P(t) = P_2^{(2)}$.

Рассмотрим эту процедуру с точки зрения использования параметров. Каждая из точек $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ и $P_2^{(2)}$ зависит от параметра t, и $P_2^{(2)}$ принимает значение, соответствующее значению параметра t. Таким образом, P(t) является функциональным представлением кривой Безье.

Запишем это алгебраически:

$$P(t) = P_2^{(2)}(t) = (1 - t) \cdot P_1^{(1)}(t) + t \cdot P_2^{(1)}(t),$$

где $P_1^{(1)} = (1 - t) \cdot P_0 + t \cdot P_1$

$P_2^{(1)} = (1 - t) \cdot P_1 + t \cdot P_2$.

(Заметим, что мы обозначили $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ как функции от t.)

Подставив эти два выражения в первоначальное, получим

$$\begin{aligned} P(t) &= (1 - t) \cdot ((1 - t) \cdot P_0 + t \cdot P_1) + \\ &+ t \cdot ((1 - t) \cdot P_1 + t \cdot P_2) = \\ &= (1 - t) \cdot ((1 - t) \cdot P_0 + t \cdot P_1] + \\ &+ t \cdot ((1 - t) \cdot P_1 + t \cdot P_2) = \\ &= (1 - t)^2 \cdot P_0 + (1 - t) \cdot t \cdot P_1 + \\ &+ t \cdot (1 - t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2 = \\ &= (1 - t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot t \cdot (1 - t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2. \end{aligned}$$

Это квадратичный полином (или линейная комбинация квадратичных полиномов), следовательно, это параболическая кривая. Она и получила название квадратичной кривой Безье.

Свойства квадратичной кривой

1) $P(0) = P_0$ и $P(1) = P_2$, кривая проходит через контрольные точки P_0 и P_2.

2) Кривая P(t) является непрерывной, и все ее производные также непрерывны (это следует из свойств полиномов).

3) Продифференцируем P(t) по t и получим:

4) $P'(t) = -2(1 - t)P_0 + (-2t + 2(1 - t))P_1 + 2tP_2 = 2((1 - t)(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_1))$.

Таким образом, $P(0) = 2(P_1 - P_0)$, при t = 0 и $P(1) = 2(P_2 - P_1)$, при t = 1. Это означает, что наклон кривой при t = 0 такой же, как и у вектора $2(P_1 - P_0)$, а наклон кривой при t = 1 такой же, как и у вектора $2(P_2 - P_1)$.

5) Функции $(1 - t)^2$, $2t(1 - t)$ и t^2 являются полиномами Бернштейна 2-й степени. Сами функции и их сумма неотрицательны: $(1 - t)^2 + 2t(1 - t) + t^2 = 1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2 + t^2 = 1$.

6) Кривая лежит внутри треугольника $P_0P_1P_2$.

P(t) является аффинной комбинацией точек P_0, P_1 и P_2. Таким образом, P(t) будет лежать в выпуклой области контрольных точек при всех $0 \le t \le 1$, а выпуклая область треугольника и есть сам треугольник.

7) Если точки P_0, P_1, P_2 коллинеарны, то кривая есть прямая линия. Если точки коллинеарны, то выпуклой областью является прямая, и, следовательно, квадратичная кривая будет прямой линией.

Вывод:

1. Геометрический метод построения квадратичной кривой Безье

$$P(t) = P_2^{(2)}(t)$$

$$P_i^{(j)}(t) = \begin{cases} (1-t) \cdot P_{i-1}^{(j-1)}(t) + t \cdot P_i^{(j-1)}(t), & j > 0 \\ P_1, & j = 0. \end{cases}$$

2. Аналитический метод построения квадратичной кривой Безье

$$P(t) = (1 - t)^2 \cdot P_0 + 2 \cdot t \cdot (1 - t) \cdot P_1 + t^2 \cdot P_2.$$

Кубическая кривая Безье

Заданы четыре контрольные точки P_0, P_1, P_2, P_3.

Процесс получения координат точки кривой такой же, как и в предыдущем случае, добавился лишь один уровень.

Для конкретного значения $t \in [0, 1]$ получим

$P_1^{(1)}(t) = t \cdot P_1 + (1 - t) \cdot P_0$

$P_2^{(1)}(t) = t \cdot P_2 + (1 - t) \cdot P_1$

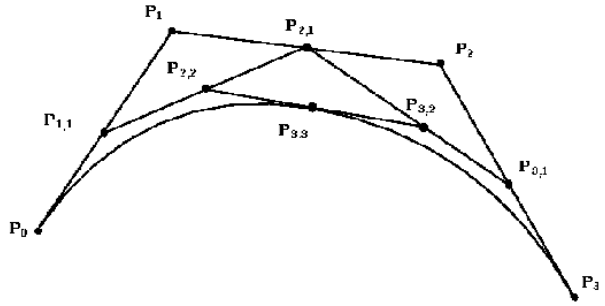
$P_3^{(1)}(t) = t \cdot P_3 + (1 - t) \cdot P_2$

$P_2^{(2)}(t) = t \cdot P_2^{(1)}(t) + (1 - t) \cdot P_1^{(1)}(t)$

$P_3^{(2)}(t) = t \cdot P_3^{(1)}(t) + (1 - t) \cdot P_2^{(1)}(t)$

$P_3^{(3)}(t) = t \cdot P_3^{(2)}(t) + (1 - t) \cdot P_2^{(2)}(t)$.

Обозначим $P_3^{(3)}(t)$ как P(t)



Задание: Получить формулы аналитического представления точек кривой Безье.

Кубическая кривая Безье имеет свойства, схожие со свойствами квадратичной кривой.

Задание: сформулировать их самостоятельно.

Вывод:

1. Геометрический метод построения квадратичной кривой Безье.

Задав точки P_0, P_1, P_2, P_3 и выбрав значение t из [0,1], сгенерировать точку P(t) на кривой Безье:

$$P(t) = P_3^{(3)}(t), \text{ где}$$

$$P_i^{(j)}(t) = \begin{cases} (1-t)\cdot P_{i-1}^{(j-1)}(t) + t\cdot P_i^{(j-1)}(t), & j > 0 \\ P_i, & j = 0 \end{cases} \quad \text{при } t \in [0,1].$$

2. Аналитический метод построения квадратичной кривой Безье

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} P_i B_{i,3}(t), \text{ где } \begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3 \\ B_1(t) &= 3\cdot t\cdot(1-t)^2 \\ B_2(t) &= 3\cdot t^2\cdot(1-t) \\ B_3(t) &= t^3 \end{aligned}$$

полиномы Бернштейна третьей степени, а $t \in [0,1]$.

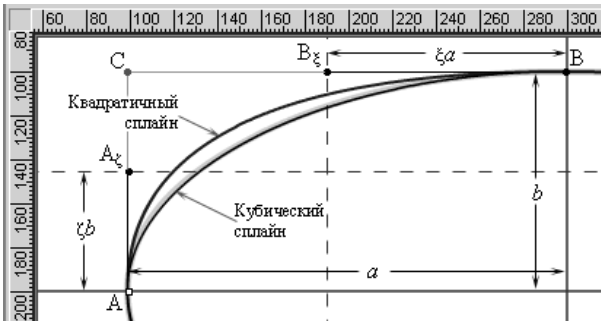
Кубические сплайны находят самое большое применение в практике, так как третья степень – наименьшая из степеней, позволяющих описать форму любой сложности, и при стыковке различных сплайнов можно обеспечить непрерывную первую производную (кривая или поверхность будет без изломов в местах стыка).

Можно для аппроксимации использовать и квадратичные кривые. Они гораздо проще, чем *кубические сплайны*, но тогда для аппроксимации произвольных линий таких кривых понадобилось бы больше.

Так, например, для построения эллипса с хорошей точностью достаточно четырех *кубических сплайнов*, а *квадратичных* надо как минимум 10–12 (см. рисунок).

На рисунке эллипс – светло-серая кривая – практически невозможно отличить от *кубического сплайна* (тонкая черная кривая), построенного по точкам A, A_ζ, B_ξ и B. Контрольные точки A_ζ и B_ξ подбирались так, чтобы в точках A и B совпадали радиусы кривизны *сплайна* и исходной кривой (эллипса).

Квадратичный сплайн (*кривая Безье* второго *порядка*, построенная по точкам A, C и B), как видно на рисунке, в точках A и B касается исходной кривой, но в промежутке между этими точками существенно от нее отклоняется.



Задание для практической работы

1. Написать программу построения кривой Безье на экране компьютера. При этом необходимо предусмотреть работу программы в следующих режимах:

– построение кубической кривой по заданным параметрам;

– аппроксимация заданной кривой с кубической путем подбора параметров.

2. Проверить точность аппроксимации в рамках реализованного алгоритма.

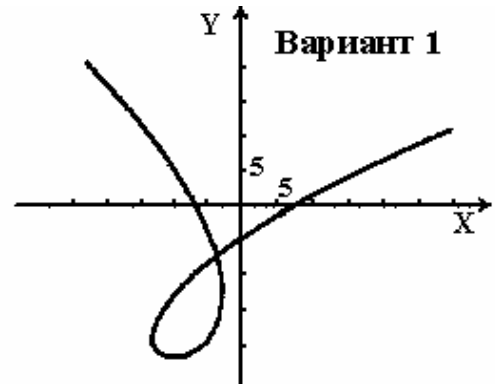
Исходными данными на выполнение работы являются метод аппроксимации и вид кривой (см. варианты заданий). Необходимо аппроксимировать заданную кривую с помощью кубической.

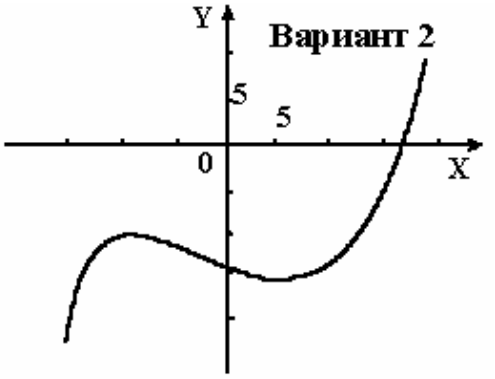
Результаты работы: значения параметров построенной кубической кривой, графики промежуточных результатов и график конечного результата.

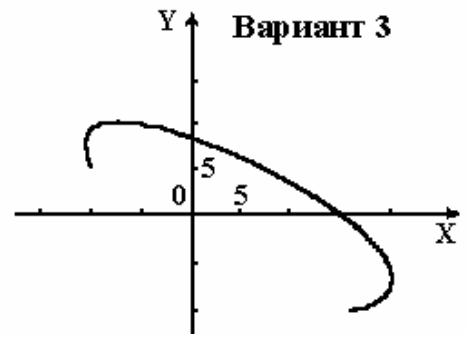
Историческая справка

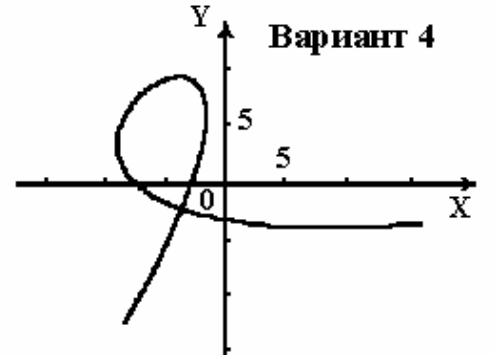
Пьер Этьен Безье родился 1.09.1910 г. в Париже в семье потомственных инженеров. Окончил колледж точных наук и год спустя получил степень инженера-электрика.

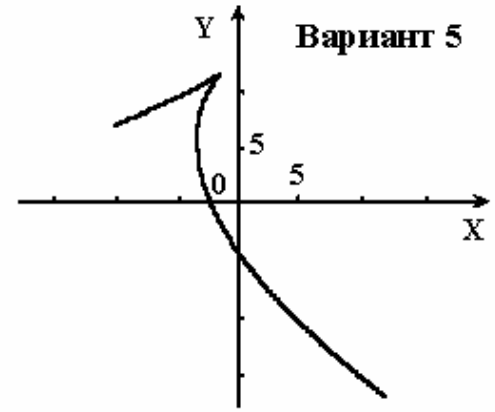
Варианты заданий:

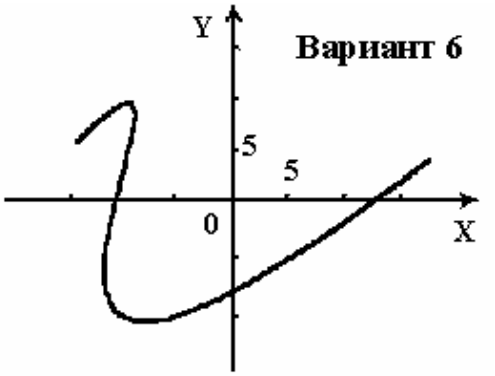


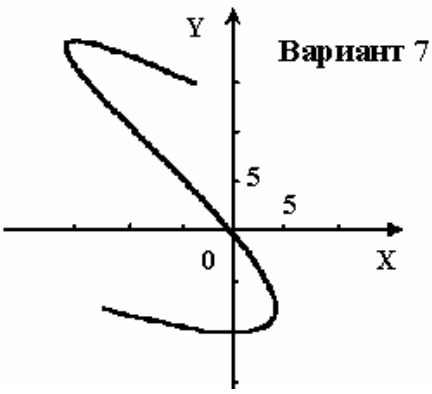


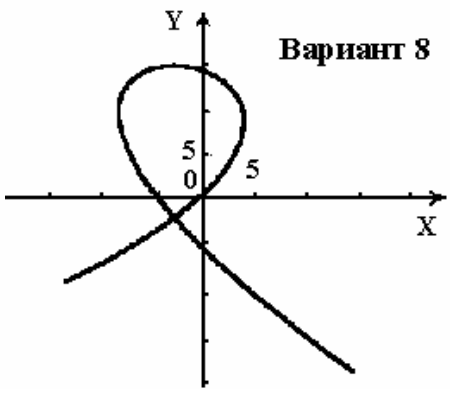




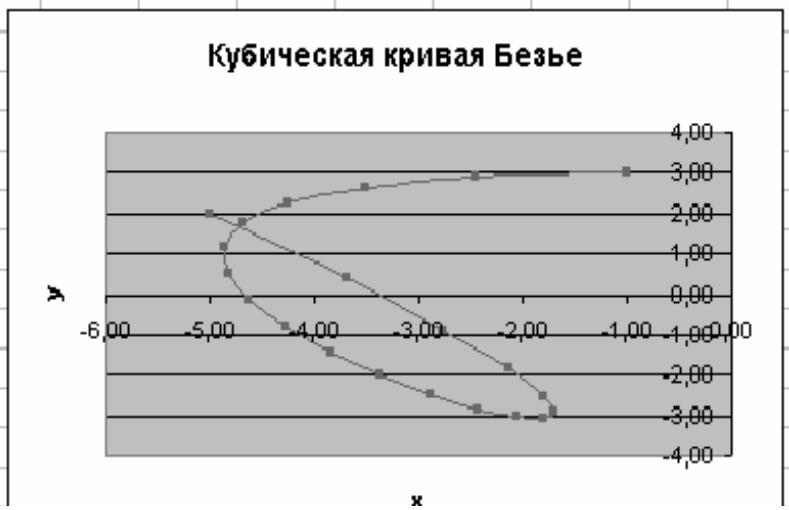








	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	t	x	y			x0	y0					
2	0	-5,00	2,00			-5	2					
3	0,05	-3,70	0,38			x1	y1					
4	0,1	-2,76	-0,89			5	-10					
5	0,15	-2,14	-1,84			x2	y2					
6	0,2	-1,80	-2,50			-12	3					
7	0,25	-1,70	-2,91			x3	y3					
8	0,3	-1,81	-3,08			-1	3					
9	0,35	-2,06	-3,04									
10	0,4	-2,44	-2,83									
11	0,45	-2,89	-2,48									
12	0,5	-3,38	-2,00									
13	0,55	-3,85	-1,43									
14	0,6	-4,28	-0,81									
15	0,65	-4,62	-0,15									
16	0,7	-4,83	0,52									
17	0,75	-4,86	1,16									
18	0,8	-4,68	1,74									
19	0,85	-4,25	2,25									
20	0,9	-3,52	2,65									
21	0,95	-2,45	2,91									



В возрасте 23 лет Безье поступил на службу в компанию «Рено», где и проработал почти всю свою жизнь. Начинал он почти с самых низов – простым техником, потом постепенно поднялся, участвуя в разработке и проектировании поточных линий автомобильного производства.

В начале 70-х гг. он вычерчивал на компьютере новые корпуса будущих машин – и именно тогда предложил руководству свои уравнения, описывающие его «кривые». Принцип построения площадей, основанный на кривых Безье, тут же подхватили другие автомобильные фирмы, а также и другие инженеры из самых разных сфер.

К 80 годам Пьер Безье стал профессором и членом многих инженерных академий в разных странах, написал несколько книг и массу статей. А в свободное время занимался математикой со своими одиннадцатью внуками.

Умер в 1999 г.

Замечание

Для выполнения первого задания можно воспользоваться средствами табличного процессора MS Excel. Необходимо задать координаты контрольных точек. Для каждого значения параметра $t \in [0, 1]$ вычислить значения координат точек кривой (в данном случае их 20) и построить кривую. Изменяя значения координат контрольных точек, подобрать параметры сплайновой кривой, наиболее точно представляющей заданную кривую.

Примечания

1. *Фокс, А.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве [Текст] / А. Фокс, М. Пратт. М.: Мир, 1982. 304 с.

2. *Никулин, Е. А.* Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики [Текст] / Е. А. Никулин. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 560 с.

3. *Порев, В. Н.* Компьютерная графика [Текст] / В. Н. Порев. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 432 с.

Е. В. Котельников

КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИСКУССТВЕННОМУ ИНТЕЛЛЕКТУ КИИ-2006

С 25 по 28 сентября 2006 г. в городе Обнинске проходила Десятая национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2006.

Место проведения конференции выбрано не случайно. Молодой калужский город, празднующий в 2006 году 50-летие, является первым российским наукоградом. В Обнинске была запущена первая в мире атомная электростанция. Сегодня в городе действуют 12 научно-исследовательских институтов.

Десятая конференция, как и все предыдущие, проходила под эгидой Российской ассоциации по искусственному интеллекту (РАИИ). В конференции принимали участие ученые из 26 городов России, Украины и Белоруссии, а также из Германии. Программным комитетом КИИ-2006 получено 249 докладов. После рецензирования отобраны 90 докладов, в том числе два из Кирова.

Программа конференции оказалась достаточно насыщенной. За три дня прочитано четыре пленарных доклада, прошли заседания девяти секций, проведена выставка программных средств.

Названия секций отражают актуальные области в современном искусственном интеллекте:

– «Инженерия знаний и онтологии».

– «Прикладные, инструментальные и обучающие системы».

– «Интеллектуальный анализ данных и машинное обучение».

– «Правдоподобные рассуждения и неклассические логики».

– «Нечеткие модели и мягкие вычисления».

– «Естественный язык».

– «Интернет и многоагентные системы».

– «Модели поведения и образного мышления».

– «Интеллектуальные системы поддержки принятия решений».

Конференция открылась пленарным докладом «Возможен ли прорыв в исследованиях по искусственному интеллекту в ближайшие годы?» Э. В. Попова, автора известных исследований в области понимания естественного языка и разработки экспертных систем. В докладе констатировался застой в отечественной и зарубежной науке об искусственном интеллекте, указывалось на отсутствие свежих идей и новых перспективных направлений, критиковалась деятельность некоторых ученых, бесконечно эксплуатирующих устаревшие теории и наработки. Автор доклада предложил в будущем сделать упор на моделирование процессов восприятия, обосновав тем, что эти процессы во многом определяют мышление.

Затем начали работу секции. На секции «Модели поведения и образного мышления» в докладе И. Б. Фоминых (Москва) «Эмоции как аппарат оценок поведения интеллектуальных систем» была предложена так называемая алгебра эмоций. В этой алгебре вводятся переменные e_i – простейшие эмоции субъекта i, определяемые как скорость изменения целевой функции L_i субъекта:

$$e_i = \frac{dL_i}{dt} .$$

Простейшие эмоции могут быть положительными («удовольствие» e_i^+) или отрицательными («страдание» e_i^-).

Пусть, например, состояние субъекта i связано с состоянием субъекта j, а c_{ji} – оценка субъектом j эмоции, переживаемой субъектом i. Тогда величина

$$e_{ji} = c_{ji} \cdot e_i$$

может быть интерпретирована как оценка субъектом j эмоции, переживаемой субъектом i.

При этом знак эмоции e_{ji} получается путем перемножения знаков переменных в правой части выражения. Возможны четыре случая.

1) $e_{ji}^+ = c_{ji}^+ \cdot e_i^+$.

Субъект i испытывает удовольствие, а субъект j относится к субъекту i положительно, и потому радуется его удовольствию. Такую эмоцию можно назвать «сорадость», «радоваться за другого».

2) $e_{ji}^- = c_{ji}^- \cdot e_i^+$.

Субъект i по-прежнему испытывает удовольствие, но субъект j относится к нему отрицательно, поэтому испытывает страдание. Такую эмоцию можно назвать «зависть», «досада».

3) $e_{ji}^- = c_{ji}^+ \cdot e_i^-$.

В данном случае эмоция является «сочувствием».

4) $e_{ji}^+ = c_{ji}^- \cdot e_i^-$.

Такая эмоция может быть названа «злорадством».

Предложенная алгебра эмоций может применяться при построении оптимального поведения сложных интеллектуальных систем, а также при моделировании межагентных отношений в многоагентных системах.

На этой же секции прозвучали два доклада, объединенные общим подходом – использованием голографических методов для имитации процессов, происходящих в человеческом мозге. В первом докладе Л. Ю. Жиляковой (Ростов-на-Дону) «Проблемы моделирования созна-

КОТЕЛЬНИКОВ Евгений Вячеславович – кандидат технических наук, старший преподаватель, зав. кафедрой информатики и методики обучения информатике ВятГГУ

© Котельников Е. В., 2007

ния и голографическая память» рассматривается подход к построению памяти на голографических принципах. Данный подход обосновывается сходством функциональных особенностей человеческой памяти и голографической записи. В частности, информация о запечатленном образе предмета хранится на голографической пленке распределённо, то есть любой фрагмент пленки содержит информацию обо всем изображении. Если исходную пленку разрезать пополам, каждая половина при направлении на него лазерного луча восстановит целое исходное изображение. Качество ухудшится, но никакая часть изображения не исчезнет полностью.

Такие же свойства присущи и мозгу. При повреждении он способен восстанавливать всю запомненную информацию.

Во втором докладе А. М. Алексеева и А. В. Павлова (Санкт-Петербург) «Интеграция логического и образного мышления методом Фурье-голографии: реализация немонотонных рассуждений» предлагается совместное использование аппарата Фурье-голографии и нечеткой логики для реализации логических правил вывода и моделирования образного мышления.

Секция «Интернет и многоагентные системы» открылась докладом И. В. Котенко и М. В. Степашкина (Санкт-Петербург) «Модели действий хакеров-злоумышленников при реализации распределенных многошаговых атак». Одной из перспективных областей искусственного интеллекта является использование многоагентных систем в различных приложениях. Такие системы характеризуются реализацией совместных действий множества автономных агентов, вид которых зависит от предметной области. В докладе предлагается с помощью многоагентной системы моделировать распределенные атаки на компьютерные сети, вскрывая тем самым существующие пробелы в обеспечении безопасности.

Подход учитывает первоначальное положение злоумышленников, уровень их знаний и умений, разнообразие целей, конфигурацию компьютерной сети и применяемые в ней политики безопасности. Подход был реализован в системе анализа защищенности, которая может использоваться как на этапе проектирования компьютерной сети, так и на этапе её эксплуатации.

Следующим был доклад Ю. Ю. Воеводина и Л. Г. Комарцовой (Калуга) «Нейросетевые методы эффективного поиска релевантной информации в сети Интернет». В докладе описывалась метапоисковая система, обучающаяся с помощью нейронной сети. Метапоисковые системы обычно не имеют собственных индексных баз и перенаправляют запросы пользователя обычным поисковым машинам (таким, как Rambler, Google и т. д.). Основное требование к этим системам – объединить достоинства поисковых машин и в итоге получить информацию, релевантность которой выше, чем если бы использовалась одна поисковая машина.

Эксперименты на разработанной системе ставились с использованием поисковых машин Яндекс, Рамблер, Google, Mail.ru, Yahoo, Апорт, MSN, Altavista. Обучение заключается в том, что пользователь, оценивая результаты запросов, настраивает метапоисковую систему «под себя». Оценки пользователя после каждого запроса, а также некоторые другие параметры (количество символов запроса, время обработки) подаются на нейронную сеть, которая обучается распределять известные поисковые машины в зависимости от их полезности данному пользователю. После такого обучения метапоисковая система будет отдавать предпочтение тем поисковым машинам, которые чаще других находят релевантные документы.

В ходе экспериментов, для которых привлекались восемь независимых пользователей, наибольшей эффективностью отличались Яндекс и Google, а наименьшей – MSN и Yahoo.

Следует отметить, что для обучения нейронной сети использовался другой популярный подход в искусственном интеллекте – генетические алгоритмы.

Следующий день конференции начался пленарным докладом ведущего российского специалиста в области инженерии знаний Т. А. Гавриловой «Формирование прикладных онтологий». Онтология – это формальное описание терминов предметной области и отношений между ними. Онтологии строят, чтобы совместно использовать общее понимание структуры информации, анализировать и повторно применять знания в предметной области. Формы представления онтологий могут быть разные – фреймы, семантические сети, таксономии и др. Пример онтологии приведен на рис. 1.

В докладе рассматривались виды и примеры онтологий, области, в которых онтологии нашли применение, программные инструменты для создания онтологий. Отмечалось, что онтологии широко используются для представления знаний, особенно в Интернете. Проблемой является то, что российские вузы практически не готовят специалистов по построению онтологий (инженеров по знаниям).

Особый интерес вызвала выставка программных средств. Сначала авторы делали доклад, представляя свой продукт, затем следовала демонстрация возможностей программы.

Первым был «Археологический портал знаний» коллектива авторов из Новосибирска (www.sati.archaeology.nsc.ru/classarch2/). Информационную основу портала составляют онтоло-

гии, что позволяет обеспечить единообразное представление знаний и данных из области археологии, их связанность. На отдельной странице портала находится граф, визуализирующий онтологию археологической науки, позволяющий быстро найти требуемое понятие и отследить его связи с другими понятиями.

Следующий доклад «Сегментно-целостная структура канала речевого управления программными системами» коллектива авторов из Донецка был интересен тем, что для распознавания речевых команд использовались совместно два подхода – нейросетевой и на основе нечеткой логики. Нейронная сеть реализовала сегментную

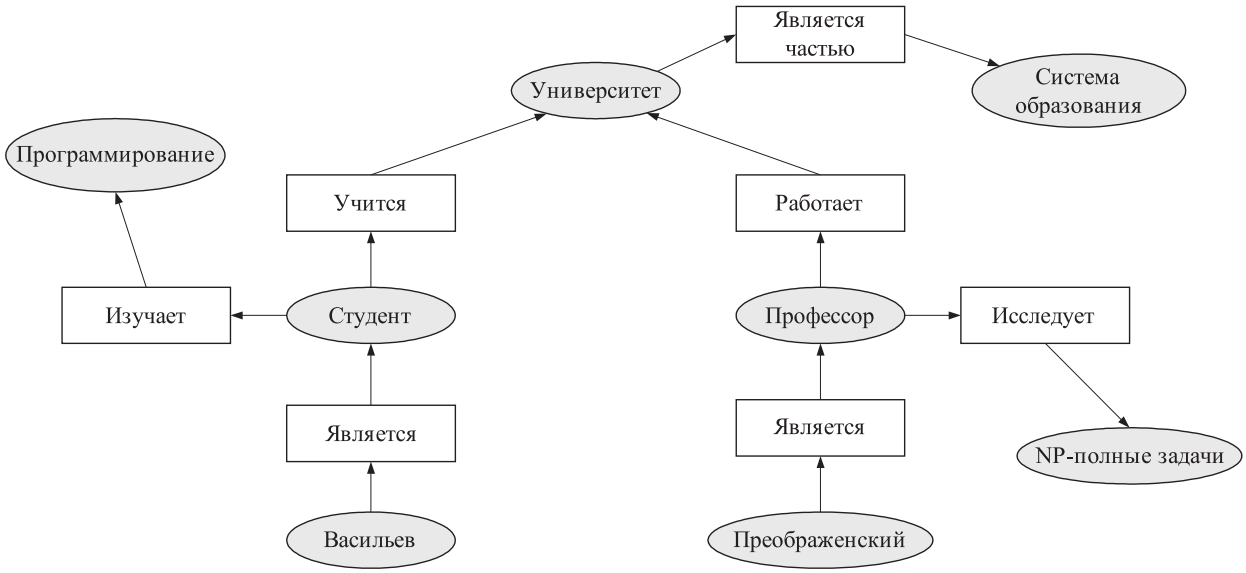


Рис. 1. Часть онтологии образовательного процесса университета

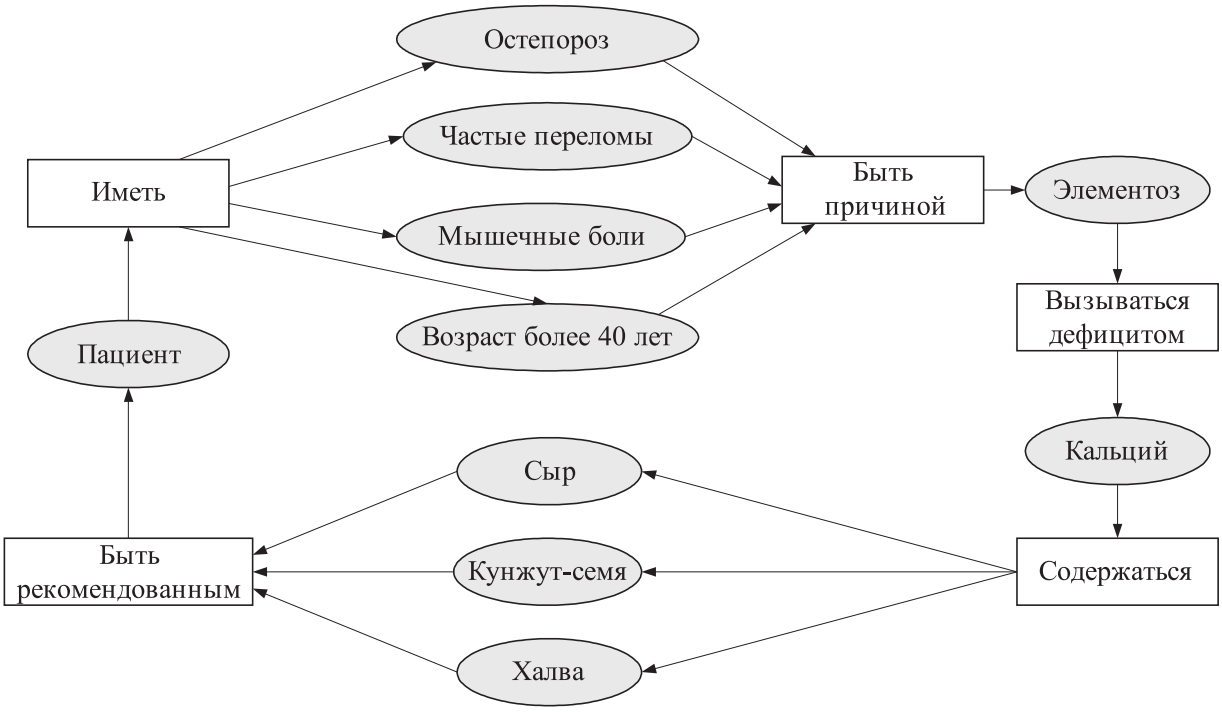


Рис. 2. Часть онтологии нутриентного баланса

модель распознавания, когда анализируются отдельные фонемы слова. Нечеткая логика применялась для целостной модели, в которой каждое слово целиком сопоставлялось с известными шаблонами. Тестирование проводилось с использованием словаря из 105 команд, система интегрировалась с MS Word. Точность распознавания составила более 90%.

Доклад «Экспертная система поддержки диагностики, профилактики и лечения элементозов на основе коррекции питания» был представлен учеными из Новосибирска. Под элементозами понимается группа заболеваний, связанная с нарушением в организме баланса нутриентов – микроэлементов, витаминов и аминокислот. Система предназначена для оказания помощи лечащему врачу при постановке диагноза и выдаче для него рекомендаций. Для представления знаний и данных была построена онтология предметной области, часть которой приведена на рис. 2.

Ещё один программный продукт был представлен группой киевских исследователей. Это система поддержки принятия решений «Спор» для автоматизированного планирования и сопровождения мер противодействия чрезвычайным ситуациям. При возникновении чрезвычайной ситуации требуется оперативное оптимальное реагирование, которое осложнено тем, что решения приходится принимать очень быстро, в условиях неполной информации, с учетом множества факторов. Кроме того, чаще всего чрезвычайная ситуация является причиной нескольких косвенно связанных с ней чрезвычайных ситуаций, которые также необходимо учитывать.

Система «Спор» позволяет своевременно определить целесообразные технологии противодействия чрезвычайным ситуациям при помощи автоматизированного планирования и проектирования. Система реализована в среде логического программирования Visual Prolog.

Программа на основе известных ресурсов региона и описания возникшей чрезвычайной ситуации выбирает оптимальную последовательность применения технологий противодействия. На электронной карте региона в реальном масштабе времени отображаются разработанный план и текущая ситуация (подобные системы используются военными при проведении масштабных операций, примером может служить последняя война в Ираке). Демонстрация системы оказалась весьма наглядной и эффектной, была промоделирована чрезвычайная ситуация, и система разработала и отобразила план действий, который можно было оперативно корректировать.

После конференции можно сделать ряд выводов в отношении текущего состояния и перспектив развития области искусственного интеллекта.

Во-первых, 30-летнее соперничество двух основных течений в искусственном интеллекте – «символьного», основанного на знаниях (яркие примеры – экспертные системы и системы поддержки принятия решений, онтологии) и «биологического», основанного на примерах, «подсмотренных» у природы (нейронные сети и генетические алгоритмы), не привело к победе одного из них, да и, видимо, не приведет.

Во-вторых, исследователями уже осознано, что не существует единой технологии или методики, которые бы решили любую задачу из области искусственного интеллекта, т. е. задачу слабо или неформализуемую, не имеющую известного алгоритма решения, которую, однако, с успехом решает человеческий интеллект. А раз так, то методы из разных направлений объединяются, чтобы решать общую задачу. Процесс этот, начатый не так давно, уже имеет хорошие результаты и в дальнейшем будет только развиваться.

В-третьих, большинство известных методов искусственного интеллекта имеет развитую теорию и многократно проверенную реализацию. Повсеместному распространению этих технологий в сферы бизнеса, промышленности, транспорта мешает отсутствие мировых стандартов на эти методики. Следовательно, одной из важнейших и ближайших целей всего сообщества ученых, работающих в этой области, является создание некоего комитета по разработке и принятию стандартов по искусственному интеллекту.

Наконец, все больше внимания уделяется таким сложнейшим и таинственным процессам, как сознание, понимание и восприятие. Все 50 лет развития искусственного интеллекта (термин «Artificial Intelligence» впервые был употреблен на семинаре в Дартмутском колледже в 1956 году) исследователи пытались смоделировать их, однако на сегодняшний день прогресс здесь невелик. Возможно, углубление именно в эти процессы позволит искусственному интеллекту шагнуть в будущем на новую высоту.

М. В. Петухова

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

(по материалам научно-методической конференции и заседания УМО)

В декабре в Московском государственном университете экономики, статистики и информатики (МЭСИ) прошло очередное расширенное заседание УМО по образованию в областях «Статистика и антикризисное управление», «Прикладная информатика», «Математические методы в экономике». Также состоялась научно-методическая конференция «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению "Прикладная информатика" на основе инновационных технологий и e-learning», в рамках которой работали две секции: «Содержание и методика преподавания дисциплин по направлению ВПО "Прикладная информатика"» и «Инновационные технологии образования. E-learning в обучении IT-специалистов».

На заседании УМО, в частности учебно-методического совета (УМС) по специальности «Прикладная информатика», главной темой были государственные образовательные стандарты (ГОС) третьего поколения. Общие тенденции в этом направлении достаточно полно выразил в своем выступлении председатель УМС по специальности «Прикладная информатика (по областям)» Ю. Ф. Тельнов. Основные положения его доклада приведены далее [1, 2].

Прежде всего, были сформулированы **принципы разработки ГОС** третьего поколения:

• переход на двухступенчатую систему высшего профессионального образования (ВПО);

• реализация компетентностного подхода в определении содержания образовательной программы;

• применение модульного подхода к построению учебного плана, реализующего специализацию подготовки специалистов в конкретных областях.

Двухступенчатая система ВПО предполагает на первой ступени подготовку бакалавров (4 года обучения), а на второй – специалистов (1 год) или магистров (2 года).

Компетентностный подход в образовании отличается от традиционного квалификационного подхода тем, что отражает требования не только к содержанию образования, но и к поведенческой составляющей. Такой подход характеризуется следующим:

• компетенции определяют способности индивида применять знания, умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области;

• компетенция определяет набор видов деятельности, которые должен осуществлять профессионал в конкретной области на определенном уровне;

• компетентность – это реализация компетенции у конкретного субъекта деятельности, которая зависит от личностных характеристик.

В общем случае выделяют три **категории компетенций**: когнитивная (применение теоретических знаний и опыта), функциональная (реализация практических умений и навыков) и личностно-этическая (проявление поведенческих способностей в конкретной ситуации, наличие личностных и профессиональных ценностей).

В выступлении был представлен обзор основных профессиональных **компетенций прикладного информатика**:

• способность определять стратегию применения информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) в различных областях деятельности;

• владение знанием специфики предметной области;

• умение ставить и решать с помощью ИКТ прикладные задачи из различных предметных областей;

• способность формулировать требования к информационной системе, проектировать бизнес-процессы, процессы управления информацией и знаниями;

• умение проектировать, внедрять, сопровождать и управлять информационной системой и др.

Отмечалась также важность таких личностно-этических компетенций, как умение работать в команде; коммуникативность; применение знаний нормативно-правовых актов в области ИКТ; способность проводить IT-консалтинг и обучение.

Были выделены несколько **уровней компетенций**, характеризующихся глубиной знаний и поведенческими целями и задачами:

1. Осознание. Студенты определяют понятия и их характеристики. Способы достижения уровня: лекции, обсуждение.

2. Грамотность («сильное знание»). Студенты могут сравнивать и различать, объяснять, описывать взаимосвязи объектов. Способы достижения уровня: лекции, дискуссии, работа с источниками, командная работа и проекты, лабораторные работы.

3. Концептуальность, использование умений. Использование изученного, способность передать

ПЕТУХОВА Мария Владиславовна – кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой информационных технологий и ТСО ВятГГУ

© Петухова М. В., 2007

идею теоретических положений и т. п. Способы достижения уровня: длительные лабораторные и проекты, презентации, включающие объяснение.

4. Детальное понимание, способность применения. Поиск корректных решений, проектирование и реализация ИС, применение общих принципов. Способы достижения уровня: командно-ориентированные лабораторные работы.

5. Продвинутый уровень. Разработка, установка, конструирование и адаптация ИС, генерация новых решений, оценка относительного значения и т. п. Способы достижения уровня: применение существующих знаний для генерации новых знаний, решение реальных задач.

Предполагается **дифференциация компетенций** по различным профессиям:

• специалист по поддержке (эксплуатации) ИС, IT-менеджер, технолог – бакалавр;

• системный аналитик, проектировщик – бакалавр, специалист;

• консультант по ИС, специалист по внедрению ИС – специалист, бакалавр;

• менеджер проектов – магистр;

• эксперт в области прикладного программного обеспечения – магистр.

В выступлении также говорилось о **новом макете ГОС** третьего поколения, рекомендованном Советом при Минобрнауки РФ от 2.10.06. Основные его положения:

• отсутствие деления на федеральный, национально-региональный и вузовский компоненты;

• соотношение базисной и вариативной частей – до 50%, самостоятельное формирование магистерских программ и специализаций;

• соединение образовательных программ различного уровня (бакалавра, магистра, специалиста) в одном стандарте;

• компетентностная форма требований к подготовке;

• дисциплины (дидактические единицы) не указываются, а устанавливаются требования к знаниям, умениям, навыкам (возможно, по циклам);

• максимальный объем учебной работы в неделю – 45 часов (вместо 54);

• при установлении компетенций выпускников необходимо привлечение к разработке ГОС работодателей и выпускников вузов.

На пленарном заседании учебно-методического объединения выступил председатель Совета УМО, ректор МЭСИ В. П. Тихомиров. Основная тема – **электронное обучение**. Был дан обзор состояния e-learning в различных странах. В частности, Россия в 2006 г. находится по этим позициям на 52-м месте в мире, а среди стран Восточной Европы – на 11-м. Тема открытых информационных образовательных ресурсов прозвучала и в выступлении Н. В. Комлевой (МЭСИ), которая кратко осветила историю их создания и современное состояние в мире и России (где таких ресурсов пока очень мало). Главная цель создания открытых образовательных ресурсов (т. е. бесплатных, доступных для всех) – повысить качество образования во всех вузах и на всех уровнях образования.

Про **взаимодействие IT-индустрии и сферы образования** при подготовке кадров говорил директор фирмы «1С» Б. Г. Нуралиев. То, что УМО постоянно сотрудничает с «1С», еще раз подтверждает лидирующее положение ее на российском рынке, востребованность специалистов, умеющих на высоком уровне работать с продуктами этой фирмы. Выступающий приводил данные, свидетельствующие о потребности в IT-специалистах: общее их число в России – более миллиона, потребность на следующий год – еще 175 тыс., из них в фирмах IT-индустрии занято 300 тыс., в 2007 г. надо еще 100 тыс., на обычных предприятиях занято 750 тыс. IT-специалистов, надо еще 75 тыс. Говорилось и о том, что на сегодняшний момент в рамках специальности «Прикладная информатика» студенты получают недостаточную подготовку по вопросам стандартизации, управления проектами, экономической составляющей, однако было отмечено, что в новом ГОС эти пожелания в основном учтены.

В процессе работы **конференции** «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению "Прикладная информатика" на основе инновационных технологий и e-learning», и, в частности, секции «Содержание и методика преподавания дисциплин по направлению ВПО "Прикладная информатика"», выделились следующие основные направления, на которые сейчас важно обращать внимание вузам, обучающим студентов по указанной специальности.

1. Прежде всего, опять же **компетентностный подход**, то есть обучение студентов не отдельным дисциплинам, а системе компетенций. Эта тема звучала во многих выступлениях, наиболее подробно ее осветила председатель НМС УМО по направлению «Прикладная информатика» А. Е. Саутина [3]. Она представила иерархию системы компетенций прикладных информатиков.

2. Вопросы изучения применения функциональных и технических **стандартов** в информационных системах (ИС). В частности, А. В. Бойченко (Институт системного программирования РАН) [4] говорил о роли и месте дисциплины «Открытые ИС», большая часть содержания которой связана со стандартизацией всех сторон информационных технологий (ИТ) и ИС. Эти же вопросы рекомендовалось изучать и в рамках других дисциплин, например «Проектирование ИС».

3. Управление **IT-сервисами**, **проектами**, **IT-консалтинг**. Отмечалось, что сейчас это одно из востребованных направлений и специалисты

по ИТ и ИС обязательно должны владеть соответствующими знаниями и умениями. Кстати, по данным IBM, значимость сервисов вообще в экономике стран мира стремительно возрастает, в частности, в России эта сфера сейчас занимает более 80%, в то время как на долю промышленности и сельского хозяйства остается менее 20%. Понятие «IT-консалтинг» сравнительно новое, и трудно однозначно его определить. Профессор В. В. Качала (Мурманская академия экономики и управления) [5] «в первом приближении» очертил сферу деятельности IT-консалтинга:

• системный анализ предметной области, включающий построение различных моделей;

• анализ и формализация требований к системе автоматизации управления предприятием;

• разработка и согласование системного проекта (в том числе документированные требования к будущей системе);

• контроль за разработкой технического проекта;

• контроль за построением, внедрением, сопровождением и развитием системы;

• обучение заказчика.

Иными словами, прежде всего IT-консультант должен обладать знаниями по вопросам теории систем, системного анализа, методик решения проблем (например, путем реорганизации, бизнес-реинжиниринга объектов предметной области), проектирования ИС, управления проектами.

Этой же темы касалось выступление профессора Г. Н. Калянова (ГУ-ВШЭ) [6], описывающее магистерскую программу «Стратегическое управление ИС», призванную как раз формировать основные знания и умения по IT-консалтингу.

4. **Информационная безопасность.** Эти вопросы становятся все более актуальными для подготовки студентов, работа которых будет связана с ИТ и ИС. В частности, Н. И. Баяндин (МЭСИ) [7] говорил о подготовке специалистов для информационно-аналитической деятельности в конкурентной разведке.

5. Отмечались вопросы **единой терминологии** предметной области. Даже такие основные термины, как «информационная технология» и «информационная система», не имеют четких определений, а значит, не всегда однозначно понимаются преподавателями и студентами. Шла речь о необходимости создания единого глоссария для всей совокупности дисциплин по ИТ и ИС.

6. Немало говорилось о **методах** обучения. Участники конференции делились опытом по организации изучения дисциплин, связанных с проектированием и разработкой ИС. Например, М. Д. Папкова (Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет) рассказала о курсовых работах в виде ролевой игры, когда студенты в группе распределяют роли и проходят этапы от исследования предметной области и составления технического задания до создания, отладки и внедрения небольшой ИС. Вообще, тема групповых проектов студентов звучала во многих выступлениях.

По результатам заседания УМО и конференции можно сделать общий вывод: специалисты в области прикладной информатики сейчас востребованы в России и важно при их подготовке учитывать основные тенденции развития IT-индустрии, повышать качество образования. Особое внимание следует уделять вопросам разработки, стандартизации ИС, управления проектами и IT-сервисами, развитию системного и компетентностного подходов, обучению работе с современными ИС. Важное значение приобретают также групповые методы работы студентов, которые позволяют формировать личностно-этические компетенции будущего специалиста.

Примечания

1. *Тельнов, Ю. Ф.* О разработке Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения по направлению «Прикладная информатика» [Текст] / Ю. Ф. Тельнов // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО: научно-практический журнал. 2006. № 1.

2. *Тельнов, Ю. Ф.* Разработка Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения по направлению «Прикладная информатика» на основе компетентностного подхода [Текст] / Ю. Ф. Тельнов // Сборник научных трудов 2-й Российской научно-методической конференции «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению "Прикладная информатика" на основе инновационных технологий и e-learning». М., 2006.

3. *Саутина, А. Е.* Структуризация необходимых компетенций в области прикладной информатики подхода [Текст] / А. Е. Саутина // Сборник научных трудов 2-й Российской научно-методической конференции «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению "Прикладная информатика" на основе инновационных технологий и e-learning». М., 2006.

4. *Бойченко, А. В.* Роль и место дисциплины «Открытые информационные системы» при подготовке специалистов по прикладной информатике [Текст] / А. В. Бойченко, В. К. Кондратьев // Сборник научных трудов 2-й Российской научно-методической конференции «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению "Прикладная информатика" на основе инновационных технологий и e-learning». М., 2006.

5. *Качала, В. В.* Подготовка специалистов по IT-консалтингу [Текст] / В. В. Качала // Сборник научных трудов 2-й Российской научно-методической конференции «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению "Прикладная информатика" на основе инновационных технологий и e-learning». М., 2006.

6. *Васильев, Р. Б.* Магистерская программа «Стратегическое управление информационными системами» [Текст] / Р. Б. Васильев, Г. Н. Калянов, Г. А. Лёвочкина // Сборник научных трудов 2-й Российской научно-методической конференции «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению “Прикладная информатика” на основе инновационных технологий и e-learning». М., 2006.

7. *Баяндин, Н. И.* Подготовка специалистов для информационно-аналитической деятельности [Текст] / Н. И. Баяндин // Сборник научных трудов 2-й Российской научно-методической конференции «Совершенствование подготовки IT-специалистов по направлению “Прикладная информатика” на основе инновационных технологий и e-learning». М., 2006.

Вестник

Вятского государственного гуманитарного университета

Информатика. Математика. Язык

Научный журнал № 4

Подписано в печать 09.01.2007 г.
Формат 60x84 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Mysl.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 30,5. Тираж 300 экз. Заказ № 738.

Издательский центр ВятГГУ
610002, г. Киров, ул. Ленина, 111
(8332) 673-674