ВЕСТНИК

ВЯТСКОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ВЫПУСК 3

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ФИЗИКА

1997

Вестник Вятского педагогического университета
Серия естественных наук. Выпуск 3
Научный журнал. Выходит с 1996 г.

Редакторы: **Т.Н.Котельникова, Г.Д.Папырина**
Технический редактор: **В.И.Варанкина**

Адрес редакции:
610002, г.Киров, ул.Ленина, 111, т. 67-88-60

Подписано в печать 15.09.97. Формат 60×84 1/16
Бумага газетная. Усл. п. л. 2,8
Тираж 100 экз. Заказ 267
Отпечатано на ротапринте отдела ТСО ВГПУ

ISBN 5-900185-47-8

Содержание

Пространства первичных идеалов полуколец непрерывных функций

В.И.Варанкина, Е.М.Вечтомов, М.Н.Смирнова

Пусть S – топологическое полукольцо с $1 \neq 0$. Рассматривается S-*тихоновское* пространство X, т.е. такое хаусдорфово топологическое пространство X, что для любых его точки x и замкнутого множества $A \not\ni x$ существует непрерывная функция $X \to S$, равная 1 в точке x и обращающаяся в 0 на A. Множество $C(X,S)$ всех непрерывных S-значных функций на X является полукольцом относительно поточечно заданных операций.

Для полукольца T с 1 напомним следующие понятия. Собственный идеал P в T называется *первичным* (*простым* или вполне первичным), если для любых $a, b \in T$ включение $aTb \subseteq P$ $(ab \in P)$ влечет $a \in P$ или $b \in P$. Через $Spec\, T$ $(Max\, T)$ обозначается пространство всех первичных (максимальных) идеалов полукольца T, рассматриваемое со *спектральной* топологией. Базу топологии подпространства $\mathcal{P} \subseteq Spec\, T$ образуют множества $D(a) = \{P \in \mathcal{P} : a \notin P\}$ по различным $a \in T$. Если T – топологическое полукольцо, то $tSpec\ T$ – это подпространство в $Spec\ T$, состоящее из всевозможных замкнутых первичных идеалов в T. Полукольцо $C(X,S)$, рассматриваемое с топологией поточечной сходимости, становится топологическим полукольцом, обозначаемым $C_p(X,S)$. В работе исследуются условия, при которых пространство $Max\ C(X,S)$, $Spec\, C(X,S)$ или $tSpec\, C_p(X,S)$ канонически гомеоморфно тихоновскому произведению X на соответствующее пространство $Max\ S$, $Spec\ S$ или $tSpec\ S$.

Сначала проанализируем общую ситуацию. Пусть $\mathcal{P}$ – подпространство в $Spec\ S$. Для любых $x \in X$ и $m \in \mathcal{P}$ положим $P_{x,m} = \{f \in C(X,S) : f(x) \in m\}$. Получаем первичный идеал полукольца $C(X,S)$ и инъективное отображение $\varphi : X \times \mathcal{P} \to Spec\ C(X,S)$, $\varphi((x,m)) = P_{x,m}$. Будем рассматривать φ как биекцию пространства $X \times \mathcal{P}$ на $\widetilde{\mathcal{P}} = \{P_{x,m} : x \in X$ и $m \in \mathcal{P}\} \subseteq Spec\ C(X,S)$.

Лемма 1. *Отображение* $\varphi^{-1} : \widetilde{\mathcal{P}} \to X \times \mathcal{P}$ *непрерывно.*

Вторая часть доказательства предложения 3.3 [1], носящая общий характер, служит доказательством леммы 1.

Назовем S $\mathcal{P}$-*полукольцом*, если для любого $a \in S$ множество $\cup\{m \in \mathcal{P} : a \notin m\}$ замкнуто в S. Любое полукольцо S с дискретной топологией является $\mathcal{P}$-полукольцом для всякого $\mathcal{P} \subseteq Spec\ S$.

Лемма 2. *Если S есть $\mathcal{P}$-полукольцо, то φ непрерывно.*

См. доказательство предложения 3.1 из [1].

Замечание 1. Итак, для $\mathcal{P}$-полукольца S пространства $\widetilde{\mathcal{P}}$ и $X \times \mathcal{P}$ канонически гомеоморфны. При этом компактность (хаусдорфовость) пространства $\widetilde{\mathcal{P}}$ равносильна одновременной компактности (хаусдорфовости) пространств X и $\mathcal{P}$. Пространства $Spec\, T$ и $Max\, T$ компактны для любого полукольца T с 1. Поэтому, если мы хотим получить, скажем, формулу $Max\ C(X,S) \approx X \times Max\ S$, то должны считать пространство X компактным.

Говорят, что S обладает *свойством Гельфанда*, если множество всех его обратимых элементов открыто, и на нем операция взятия обратного элемента непрерывна. Напомним, что нульмерный компакт – это компактное хаусдорфово пространство, открыто-замкнутые множества в котором образуют базу топологии.

Лемма 3. *Если S обладает свойством Гельфанда и X – нульмерный компакт, то максимальные идеалы в $C(X,S)$ – это в точности идеалы $P_{x,m}$ по различным $x \in X$ и $m \in Max\ S$.*

Доказательство. Стандартно доказывается (см., например, теорему 24 [2]), что любой собственный идеал такого полукольца $C(X,S)$ содержится в некотором идеале вида $P_{x,m}$ при $m \in Max\ S$. Значит, каждый максимальный идеал в $C(X,S)$ имеет вид $P_{x,m}$. Возьмем теперь идеал $P_{x,m}$, $m \in Max\ S$. Он содержится в некотором максимальном идеале M полукольца $C(X,S)$. По доказанному $M \subseteq P_{y,n}$ для подходящих $y \in X$ и $n \in Max\ S$. Но тогда $P_{x,m} \in P_{y,n}$, что возможно только при $y = x$ и $m = n$. Следовательно, $P_{x,m} = M$ – максимальный идеал.

Полукольцо T называется *гармоническим*, если пространство $Max\ T$ хаусдорфово.

Теорема 1. *Пусть X – нульмерный компакт, а S – топологическое полукольцо со свойством Гельфанда, причем S гармоническое или является $Max\ S$-полукольцом. Тогда пространство $Max\ C(X,S)$ гомеоморфно тихоновскому произведению $X \times Max\ S$ посредством φ^{-1}.*

Доказательство. Лемма 3 влечет сюръективность отображения $\varphi : X \times Max\ S \to Max\ C(X,S)$. По лемме 1 отображение φ^{-1} непрерывно. Если S есть $Max\ S$-полукольцо, то в силу леммы 2 получаем гомеоморфизм φ. Если же S гармоническое, то φ^{-1}, являясь непрерывной биекцией компактного пространства $Max\ C(X,S)$ на компактное хаусдорфово пространство $X \times Max\ S$, есть гомеоморфизм.

Теорема 1 обобщает и уточняет отмеченную выше теорему Капланского из [2] и один результат Пирса [3, лемма 3.2.1], а также дополняет теорему 3.1 [1].

Следствие. *Пусть X – нульмерный компакт и S обладает свойством Гельфанда. Тогда гармоничность S влечет гармоничность $C(X,S)$; если S есть $Max\ S$-полукольцо, то верно и обратное.*

Пример. Случай кольца $\mathbf{Z}$ целых чисел с дискретной топологией рассмотрен Пирсом [3]. Возьмем $\mathbf{Z}$ с p-адической топологией – получим топологическое кольцо $\mathbf{Z}_\tau$, не обладающее свойством Гельфанда. Можно показать, что для любого бесконечного нульмерного компакта X в кольце $C(X,\mathbf{Z}_\tau)$ существуют максимальные идеалы, отличные от идеалов вида $P_{x,m}$.

Теорема 2. *Пусть X – нульмерный компакт и S – полукольцо с дискретной топологией. Тогда φ^{-1} осуществляет гомеоморфизм*

$$Spec\ C(X,S) \approx X \times Spec\ S.$$

Доказательство. Положим $\mathcal{P} = Spec\ S$. В силу лемм 1 и 2 достаточно показать, что $\widetilde{\mathcal{P}} = Spec\ C(X,S)$. Возьмем произвольный первичный идеал P полукольца $C(X,S)$. По лемме 3 $P \subseteq P_{x,m}$ для некоторых $x \in X$ и $m \in Max\ S \subseteq Spec\ S$. Рассмотрим канонический эпиморфизм $\pi_x : C(X,S) \to S$, $\pi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in C(X,S)$. Для каждой $f \in C(X,S)$ определим характеристическую функцию $e_f \in C(X,S)$ множества $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ и характеристическую функцию $e'_f \in C(X,S)$ множества $\{x \in X : f(x) = 0\}$. Пусть $f \in \pi_x^{-1}(0)$. Тогда $e_f \cdot C(X,S) \cdot e'_f = 0$ и $e'_f \notin P_{x,m}$. Поэтому $e_f \in P$ и $f = ef \in P$. Значит, $\pi_x^{-1}(0) \subseteq P$.

Покажем, что $P = P_{x,q}$ для $q = \pi_x(P) \subseteq Spec\ S$. Пусть $f \in P_{x,q}$, т.е. $f(x) = a \in q$. Существует $g \in P$, для которой $g(x) = a$. Рассмотрим функцию-константу a. По доказанному имеем $e_f \in P$ и $e_g \in P$. Откуда $a = ge'_g + ae_g \in P$. Следовательно, $f = fe_f + ae'_f \in P$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть S есть $\mathcal{P}$-полукольцо при $\mathcal{P} = tSpec\ S$ и X – тихоновское пространство. Тогда посредством φ^{-1}*

$$tSpec\ C_p(X,S) \approx X \times tSpec\ S.$$

Доказательство. Совершенно аналогично теореме 2 из [4] устанавливается равенство $\widetilde{\mathcal{P}} = tSpec\ C_p(X,S)$. Остается применить леммы 1 и 2.

Замечание 2. В отмеченной теореме 2 [4] речь идет о замкнутых простых идеалах. Ограничивая φ^{-1} на соответствующее подпространство, получаем гомеоморфизм пространства всех замкнутых простых идеалов в $C_p(X,S)$ на произведение X и пространства всех замкнутых идеалов в S.

В заключение отметим, что теорему 1 доказала В.И.Варанкина, теорему 2 - Е.М.Вечтомов и теорему 3 - М.Н. Смирнова.

Литература

1. Варанкина В.И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундам. и прикл. матем. - 1995. – Т.1, N 4. - С. 923 - 936.
2. Kaplansky J. Topological rings // Amer J. Math. –1947. - V. 69. - P. 153 - 183.
3. Pierce R.S Rings of integer-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. - 1961. - V. 100, N 3. - P. 371 - 394.
4. Смирнова М.Н. Замкнутые идеалы в полукольцах непрерывных функций с топологией поточечной сходимости // Вестник Вятского пед. ун-та. Матем., инф., физ. Вып. 1. –1996. - С. 16 - 18.

Один класс максимальных подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций

Е.М.Вечтомов

Пусть X – тихоновское пространство, $C^+(X)$ и $C(X)$ – соответственно полукольцо всех непрерывных неотрицательных функций и кольцо всех непрерывных вещественнозначных функций на X с поточечно определенными операциями сложения и умножения функций. *Подалгеброй* полукольца $C^+(X)$ называется произвольное его непустое подмножество, замкнутое относительно операций сложения и умножения и выдерживающее умножение на неотрицательные константы.

В работе устанавливается следующая

Теорема. *Для каждого максимального идеала* M *полукольца* $C^+(X)$ *и любого минимального простого идеала* P *в* $C^+(X)$, *не содержащегося в* M, *множество*

$$A(M,P) = M \cup (C^+(X) \setminus P)$$

является максимальной подалгеброй полукольца $C^+(X)$.

Ясно, что $A(M,P)$ – подалгебра в $C^+(X)$, замкнутая относительно операций max ($\vee$) и min ($\wedge$), и ее теоретико-множественное дополнение $P \setminus M$, пополненное 0, также является подалгеброй.

Проведем сначала предварительные рассмотрения. Нетрудно видеть, что отображения $I \to I - I$ и $J \to J \cup C^+(X)$ осуществляют взаимно однозначное соответствие между множеством простых (максимальных) идеалов полукольца $C^+(X)$ и множеством простых (максимальных) идеалов кольца $C(X)$. Поэтому в силу теоремы Гельфанда-Колмогорова [1, теорема 7.3] максимальные идеалы в $C^+(X)$ имеют вид

$$M^p = \{f \in C^+(X) : p \in \overline{Z(f)}_{\beta X}\},$$

где p – точка стоун-чеховской компактификации βX тихоновского пространства X и $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Любой простой идеал полукольца $C^+(X)$ содержится в единственном максимальном идеале этого полукольца [1, теорема 2.8]. Минимальность простого идеала P в $C^+(X)$ эквивалентна равенству

$$P = O_P = \{f \in C^+(X) : (\exists g \in C^+(X) \setminus P)\ fg = 0\},$$

см. [2, лемма 8.1]. Кроме того, каждая ограниченная функция $f \in C^+(X)$ имеет единственное продолжение $f^\beta \in C^+(\beta X)$. Как легко видеть, внутренности $Z^\circ(f^\beta)$ и $\left(\overline{Z(f)}_{\beta X}\right)^\circ$ соответствующих множеств в βX совпадают.

Доказательство теоремы. Пусть в полукольце $C^+(X)$ даны максимальный идеал M и минимальный простой идеал $P \not\subseteq M$. Имеем $M = M^q$ и $P \subseteq M^p$ для некоторых точек $q \neq p$ из βX. Для доказательства максимальности подалгебры $A = A(M,P)$ возьмем произвольные функции h и φ из $P \setminus M$. Требуется показать, что φ лежит в подалгебре полукольца $C^+(X)$, порожденной A и h.

Поскольку $h + \varphi \in P = O_P$, то $(h+\varphi)g = 0$ для некоторой функции $g \in C^+(X) \setminus P$, при этом можно взять $g \leq 1$. Имеем $hg = \varphi g = 0$ и $p \in \overline{Z(h)} := \overline{Z(h)}_{\beta X}$. В компакте βX рассмотрим открытые множества $U \ni q$ и $V \supseteq \overline{Z(h)}$, замыкания $\overline{U}$ и $\overline{V}$ которых не пересекаются. Существует функция $\psi_1 \leq 1$ из $C^+(\beta X)$, равная 0 на V и равная 1 на U. Положим $f = g \vee \psi$, где $\psi = \psi_1|_X$. Тогда $f \in C^+(X) \setminus P \subseteq A$, $f \leq 1$ и $\varphi f = \varphi g \vee \varphi\psi = \varphi\psi$. Выберем в $C^+(\beta X)$ функцию $\psi_2 \leq 1$ так, чтобы $\psi_2 = 0$ на окрестности $W \subseteq \overline{W} \subseteq V$ множества $\overline{Z(f)}$ и $\psi_2 = 1$ на $\beta X \setminus V$. Пусть $f' = g \vee (\psi_2|_X)$. Имеем $f' \in C^+(X) \setminus P \subseteq A$ и $hf' = hg \vee h(\psi_2|_X) = h(\psi_2|_X)$. Далее

$$\overline{Z(\varphi f)} = \overline{Z(\varphi\psi)} \supseteq \overline{Z(\psi)} \supseteq \left(\overline{Z(\psi)}\right)^\circ = Z^\circ(\psi^\beta) = Z^\circ(\psi_1) \supseteq$$

$$\supseteq V \supseteq \overline{Z(h)} \cup \overline{Z(f')} = \overline{Z(h) \cup Z(f')} = \overline{Z(hf')},$$

т.е. $Z^\circ(\varphi f) \supseteq Z(hf')$. Определим функцию $\chi \in C^+(X)$:

$$\chi = \begin{cases} \varphi f (hf')^{-1} & \text{на } X \setminus Z(hf'), \\ \chi_1 & \text{на } Z(hf'), \end{cases}$$

где функция $\chi_1 \in C^+(X)$ такова, что $\beta X \setminus V \subseteq Z^\circ(\chi_1)$ и $\chi_1 = 1$ на W. Тогда $\chi \notin P$, и $\varphi f = (hf')\chi = h(f'\chi) \in hA$. Кроме того,

$$q \in U \subseteq Z^\circ(1-\psi_1) = Z^\circ(1-\psi^\beta) = \left(\overline{Z(1-\psi)}\right)^\circ \subseteq \overline{Z(1-\psi)} \subseteq \overline{Z(1-f)},$$

откуда $1 - f \in M^q = M$. Поэтому $\varphi - \varphi f = \varphi(1-f) \in M \subseteq A$, и

$$\varphi = \varphi f + (\varphi - \varphi f) \in Ah + A.$$

Теорема доказана.

Точка p тихоновского пространства Y называется *P-точкой*, если любая функция из $C(Y)$, равная 0 в точке p, равна 0 и в некоторой окрестности этой точки. Если $p \neq q$ в βX и q – P-точка, то получаем максимальную подалгебру

$$A(M^p, M^q) = \{f \in C^+(X) : p \in \overline{Z(f)}_{\beta X} \text{ или } q \notin \overline{Z(f)}_{\beta X}\}$$

полукольца $C^+(X)$. При $p \in X$ имеем $M^p = M_p = \{f \in C^+(X) : f(x) = 0\}$.

Следствие 1. *Пусть* X *– конечное дискретное пространство. Тогда максимальные подалгебры в* $C^+(X)$ *– это в точности подалгебры* $A(M_x, M_y)$ *при* $x \neq y$ *из* X.

Следствие 2. *Максимальная подалгебра A полукольца $C^+(X)$ замкнута в топологии поточечной сходимости тогда и только тогда, когда $A = A(M_x, M_y)$ для некоторых различных точки $x \in X$ и изолированной точки $y \in X$.*

Замечание. Пусть X – произвольный компакт. Известные максимальные подалгебры кольца $C(X)$ определяются равенствами $\{f \in C(X) : f(x) = 0\}$, $x \in X$, и $\{f \in C(X) : f(x) = f(y)\}$ при $x \neq y$ из X. В полуполе $U(X)$ всех непрерывных положительных функций на X подалгебры $\{f \in U(X) : f(x) \leq f(y)\}$, $x \neq y$ из X, максимальны. Наша теорема показывает, что в полукольцах $C^+(X)$ максимальные подалгебры устроены существенно иначе, нежели в кольцах $C(X)$ и полуполях $U(X)$.

Результаты работы были доложены на школе-конференции "Алгебра и Анализ" в г.Казани в июне 1997 года [3].

Литература

1. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. – N.Y.: Springer Verlag, 1976.
2. Вечтомов Е.М. Функциональные представления колец. – М.: Изд-во МПГУ, 1993.
3. Вечтомов Е.М. О максимальных подалгебрах полуколец непрерывных неотрицательных функций // Алгебра и Анализ. Тезисы докл. школы-конф., посвященной 100-летию Б.М.Гагаева. – Казань: Изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. – С. 49 – 50.

О ядре оператора в пространстве Шварца

М.Ю.Здоровенко

Известно, что любая обобщенная функция над пространством Шварца $S(R)$ (бесконечно дифференцируемых быстро исчезающих на бесконечности функций) представима в виде интегрального оператора с обобщенным ядром (теорема регулярности для обобщенных функций). В настоящей работе показывается, что любой линейный оператор в пространстве Шварца является интегральным оператором с обобщенным ядром.

Рассмотрим оператор $A : S(R) \to S(R)$. Он порождает билинейный непрерывный функционал B на $S(R) \times S(R)$:

$$B(f,g) = \int_R (Af)(y) \cdot g(y)\,dy = (Af, \bar{g}).$$

Согласно теореме о ядре, $B(f,g) = T(f \otimes g)$ для некоторой обобщенной функции T из $\left(S\left(R^2\right)\right)'$ (здесь $(f \otimes g)(x,y) = f(x)\,g(y)$), а согласно теореме регулярности для обобщенных функций

$$B(f,g) = \int_{R^2} \varphi(x,y)\, f^{(\alpha)}(x)\, g^{(\beta)}(y)\,dxdy,$$

где непрерывная функция $\varphi(x,y)$ полиномиально ограничена по x и y. Но поскольку $Af \in S(R)$, то справедлива теорема:

Теорема 1. *Если $A : S(R) \to S(R)$ – линейный оператор и $B(f,g) = (Af, \bar{g})$ – билинейный непрерывный функционал, порожденный оператором A, то*

$$B(f,g) = \int_{R^2} \varphi(x,y)\, f^{(\alpha)}(x)\, g(y)\,dxdy,$$

где непрерывная функция $\varphi(x,y)$ полиномиально ограничена по x и ограничена по y, причем

$$(Af)(y) = \int_R \varphi(x,y)\, f^{(\alpha)}(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – функции Эрмита. Как известно (см., напр., [1]), эти функции образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(R)$, $\varphi_n \in S(R)$ и $\|\varphi_n\|_\infty \leq C(n+1)$ для любого $n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Более того, если $f \in S(R)$, то $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n$ для $a_n = (f, \varphi_n) = \int_R f(x)\,\overline{\varphi_n(x)}\,dx$, причем величина $\sup\{|a_n| \cdot n^m,\ n \in \mathrm{N}\}$ конечна при любом положительном m. Рассмотрим коэффициенты Эрмита для обобщенной функции T, соответствующей функционалу B:

$$A_{km} = T(\varphi_k \otimes \varphi_m) = (A\varphi_k, \varphi_m)$$

Тогда для функции $(A\varphi_k)$ справедливо представление

$$(A\varphi_k) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} \varphi_n.$$

Поскольку $\varphi_k \in S(R)$ и $A\varphi_k \in S(R)$, то для любого положительного числа α и некоторого положительного числа $C_{k\alpha}$

$$|A_{km}| \leq \frac{C_{k\alpha}}{(m+1)^{\alpha}}. \qquad (1)$$

Функционал T – обобщенная функция над пространством Шварца. поэтому для некоторых положительных $s, \tau, E_{s\tau}$ и любых неотрицательных целых k и m

$$|A_{km}| \leq E_{s\tau} (k+1)^s (m+1)^\tau . \qquad (2)$$

Учитывая неравенства (1) и (2), получим, что для любого положительного числа α

$$|A_{km}| \leq D_\alpha \frac{(k+1)^s}{(m+1)^\alpha}. \qquad (3)$$

Здесь D_α – положительная константа, зависящая от α.

Положим $B_{km} = \frac{A_{km}}{(k+1)^{s+2}}$. В этом случае сумма $\sum\limits_{k,m=0}^{\infty} |B_{km}| \cdot \|\varphi_k \otimes \varphi_m\|_\infty$ конечна, а сумма $\sum\limits_{k,m=0}^{\infty} B_{km} (\varphi_k \otimes \varphi_m)$ равномерно сходится к некоторой ограниченной непрерывной функции $\phi_0 (x,y)$. Как элемент из $\left(S\left(R^2\right)\right)'$ функция $\phi_0 (x,y)$ имеет коэффициенты Эрмита B_{km}. Отсюда

$$T = \frac{1}{2^{s+2}} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right)^{s+2} \phi_0 = \frac{1}{2^{s+2}} \sum_{r=0}^{s+2} (-1)^r C_{s+2}^r \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^r \left(x^2+1\right)^{s+2-r} \phi_0 .$$

Здесь C_{s+2}^r – биномиальные коэффициенты. Положим

$$T_r = \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^r \left(x^2+1\right)^{s+2-r} \phi_0 ,$$

тогда для функций f и g из $S(R)$ получим

$$T_r (f \otimes g) = \int_R \frac{(-1)^r}{2^{s+2}} C_{s+2}^r g(y) \left(\int_R \phi_0 (x,y) \cdot \left(x^2+1\right)^{s+2-r} \left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^r f(x) dx \right) dy \qquad (4)$$

Заметим, что функция $\phi_0 (x,y) \cdot \left(x^2+1\right)^{s+2-r}$ непрерывна, полиномиально ограничена по x, ограничена по y. При фиксированном y, как функция одной переменной x, она имеет непрерывную, полиномиально ограниченную первообразную $\phi_y (x) = \int\limits_0^x \phi_0 (t,y) \cdot \left(t^2+1\right)^{s+2-r} dt$. Применяя нужное количество раз данные рассуждения и интегрирование по частям к внутреннему интегралу в (4) получим, что

$$T_r (f \otimes g) = \int_{R^2} \phi_r (x,y) \left(\frac{d}{dx} \right)^{2s+4} f(x) g(y) \, dxdy$$

для некоторой непрерывной полиномиально ограниченной по x и ограниченной по y функции $\phi_r (x,y)$. Таким образом, функционал $T = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2s+4} \phi$ для некоторой непрерывной полиномиально ограниченной по x и ограниченной по y функции $\varphi(x,y)$.

Итак, для любых функций f и g из $S(R)$

$$\int_R (Af)(y) \cdot g(y) \, dy = \int_{R^2} \varphi (x,y) f^\alpha (x) g(y) \, dxdy. \qquad (5)$$

Положим $F(y) = (Af)(y) - \int_R \varphi(x,y) f^\alpha (x) \, dx$. Функция $F(y)$ непрерывна. Поскольку для любой функции g из $S(R)$ $\int_R F(y) g(y) \, dy = 0$ (см.(5)), то $F(y) \equiv 0$. Таким образом, получим, что

$$(Af)(y) = \int_R \varphi (x,y) f^{(\alpha)} (x) \, dx.$$

Теорема доказана.

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.

О неравенствах, дополняющих неравенства Хорста Альцера

С.И.Калинин, Л.В.Ерлашева

1. Неравенства Х.Альцера.

Пусть a_i $(i = 1, \ldots, n)$ – положительные числа из промежутка $(0, 1/2]$. Введем в рассмотрение величины

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad G_n = \prod_{i=1}^n a_i^{1/n}, \quad H_n = n \Big/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} , \qquad (1)$$

$$A_n' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-a_i), \quad G_n' = \prod_{i=i}^n (1-a_i)^{1/n}, \quad H_n' = n \Big/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-a_i} . \qquad (2)$$

Хорошо известно, что величины (1) называются средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим чисел $a_1, \ldots, a_n$ соответственно или, по-другому, средними степенными порядков 1, 0 и -1 этих чисел. Очевидно, величины (2) являются средними степенными порядков 1, 0 и -1 соответственно чисел $1-a_1, 1-a_2, \ldots, 1-a_n$. Упоминаемые в названии заметки неравенства Х.Альцера есть соотношения

$$\frac{1}{H_n'} - \frac{1}{H_n} \leq \frac{1}{G_n'} - \frac{1}{G_n} \leq \frac{1}{A_n'} - \frac{1}{A_n}, \qquad (3)$$

полученные им в [1] в 1990 г. В соответствующей теореме цитируемой работы устанавливается, что равенства в (3) имеют место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Отметим, что в более поздней (1993 г.) работе [2] предложено исключительно простое доказательство неравенств (3), использующее свойства числовых неравенств, монотонность среднего степенного n положительных чисел и известные в теории средних неравенства

$$\frac{H_n}{H'_n} \le \frac{G_n}{G'_n} \le \frac{A_n}{A'_n}, \tag{4}$$

левое из которых установили W.-L.Wang и P.-F.Wang [3] в 1984 г., правое же неравенство есть знаменитое неравенство Ки Фана [4, p.5]. Равенства в (4) имеют место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2. <u>О дополнениях к неравенствам Х.Альцера.</u>

Введем в рассмотрение средние степенные $Q_n = \left(n/\sum_{i=1}^n 1/\sqrt{a_i}\right)^2$ и $P_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}\right)^2$ данных чисел a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ порядков $-1/2$ и $1/2$ соответственно, а также аналогичные средние $Q'_n = \left(n/\sum_{i=1}^n 1/\sqrt{1-a_i}\right)^2$ и $P'_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{1-a_i}\right)^2$ чисел $(1-a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Справедлива следующая

Теорема. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{H'_n} - \frac{1}{H_n} \le \frac{1}{Q'_n} - \frac{1}{Q_n}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{P'_n} - \frac{1}{P_n} \le \frac{1}{A'_n} - \frac{1}{A_n}, \tag{6}$$

при этом равенство в них достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Приводимые в сформулированной теореме неравенства (5) – (6) и есть неравенства, упоминаемые в названии заметки как дополнение к неравенствам (3).

Ради экономии места мы ограничимся лишь описанием схемы доказательства теоремы. Отметим, во-первых, что неравенство (5) доказывается непосредственно с помощью метода математической индукции. при этом установление базы индукции для $n = 2$ сводится к проверке убывания функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ на промежутке $(0, 1/2]$. Для доказательства же неравенства (6) предварительно мы устанавливаем неравенство

$$A'_n - A_n \le P'_n - P_n, \tag{7}$$

прибегая снова к методу математической индукции. Из (7) и очевидного неравенства $P_n + P'_n \le A_n + A'_n$ следует соотношение

$$P_n/P'_n \le A_n/A'_n, \tag{8}$$

в котором равенство достигается лишь при условии $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Далее, отправляясь от (8) и монотонности среднего степенного n положительных чисел, мы, применяя метод работы [2], выводим (6).

Литература

1. Alzer H. Inegualities for arithmetic, geometric and garmonic means // Bull. London Math. Soc. – 1990. – 22. – P. 362 – 366.
2. McGregor M. Short proofs of some inequalities of Horst Alzer // Archivum mathematicum (Brno). – 1993. – T. 29. – P. 167 – 168.
3. Wang, W.-L, Wang, P.-F. A class of inequalities for the symmetric functions (Chinese) // Acta Math. Sinica. – 1984. – V. 27. – P. 485 – 497.
4. Beckenbach, E.F., Bellman, R. Inequalities. – Berlin: Springer, 1961.

Описание некоторых свойств тихоновских отображений при помощи колец непрерывных функций

В.М. Караулов

Класс тихоновских отображений для непрерывных отображений играет такую же роль, что и тихоновские пространства для пространств. Важное место среди тихоновских отображений занимают непрерывные отображения тихоновских пространств и более общие отображения – параллельные тихоновскому пространству (отображение $f: X \to Y$ называется параллельным пространству Z, если f является – с точностью до гомеоморфизма – подотображением проекции $p: Z \times Y \to Y$) и тихоновские отображения. Описание тихоновских бикомпактификаций тихоновских отображений при помощи колец непрерывных функций недавно было получено Б.А.Пасынковым и обобщено в [2] на произвольные непрерывные отображения и системы функций. В данной работе выделяется еще один класс тихоновских отображений и для них и параллельно тихоновских отображений описываются все параллельно тихоновские бикомпактификации при помощи колец непрерывных функций на пространстве.

Эта работа тесно примыкает к статье [2] и существенным образом использует ее результаты. В дальнейшем рассматриваем фиксированное непрерывное отображение $f: X \to Y$ топологических пространств и топологию θ на пространстве Y.

Определение 1. Отображение f называется *тихоновским* (Б.А. Пасынков), если для любых точек x и $x' \neq x$, где $fx = fx'$, $x' \notin cl\,x$ или $x \notin cl\,x'$ и для любых точки $x \in X$ и замкнутого в X множества $F \not\ni x$ существуют непрерывная функция $\varphi: f^{-1}U \to [0,1]$, где $fx \in U$ и $U \in \theta$, удовлетворяющие условию: $\varphi(x) = 1$ и $\varphi(F \cap f^{-1}U) = \{0\}$. Это отображение будем называть *параллельно тихоновским*, если данному условию удовлетворяет непрерывная функция $\varphi: X \to [0;1]$.

Из определения вытекает, что все функционально открытые в X множества образуют базу параллельно тихоновского отображения f. Поэтому всякое параллельно тихоновское отображение является тихоновским (см. [2]).

Следующее предложение объясняет название параллельно тихоновского отображения.

Предложение 1. *Отображение f параллельно тихоновское тогда и только тогда, когда оно параллельно некоторому тихоновскому пространству.*

Доказательство. В одну сторону очевидно. В обратную сторону также очевидно: поскольку функционально открытые множества образуют базу отображения, то семейство всех непрерывных функций на X отделяет точки от замкнутых множеств отображения f и порождаемый им морфизм в проекцию $p: I^{\alpha}_{\alpha} \times Y \to Y$, где $I_a = [a_\alpha; b_\alpha] \subseteq \mathbf{R}$, является гомеоморфным вложением (см. [1]).

Для топологического пространства Z, как обычно, обозначим через $C^*(Z)$ кольцо всех непрерывных ограниченных функций на Z. Для отображения f полагаем (см., например, [2]) $C^*(f) = \{C^*(f^{-1}U) : U \in \theta\}$ и будем называть эту систему колец кольцом функций отображения f. Для произвольных подсистем

$$R = \{R_U \subseteq C^*(f^{-1}U) : U \in \theta\} \quad \text{и} \quad S = \{S_U \subseteq C^*(f^{-1}U) : U \in \theta\}$$

полагаем $R \prec S$, если для каждых функции $\varphi \in R_U$, $U \in \theta$, точки $y \in U$ и $\varepsilon > 0$ существуют окрестности V и $W \subseteq U \cap V$ точки y и функция

$\psi \in S_V$, удовлетворяющие условию $\|\varphi|_{f^{-1}W} - \psi|_{f^{-1}W}\| < \varepsilon$. Также полагаем $R \approx S$, если $R \prec S$ и $R \succ S$. Последнее отношение является отношением эквивалентности на множестве всех подсистем подмножеств системы колец $C^*(f)$ и в каждом классе эквивалентности существует максимальный элемент по включению (для каждого $U \in \theta$) — полное подкольцо кольца $C^*(f)$ (см. [2]).

Каждое полное подкольцо R кольца $C^*(f)$ и ему эквивалентные системы функций порождают один и тот же тихоновский образ f_R отображения f и его тихоновскую бикомпактификацию cf_R. Если полное подкольцо R отделяет точки и замкнутые множества тихоновского отображения f, то тихоновский образ f_R гомеоморфен отображению f и cf_R является (с точностью до гомеоморфизма) тихоновской бикомпактификацией f (см. [2]). Более того, в [2] установлена следующая

Теорема 2. *Существует естественный порядковый изоморфизм между всеми полными подкольцами кольца $C^*(f)$ и всеми тихоновскими бикомпактификациями тихоновских образов отображения f.*

В случае одноточечности пространства Y из этой теоремы вытекает соответствующее утверждение для пространств, причем в качестве полных подколец получаем подкольца кольца $C^*(X)$, содержащие все постоянные функции и замкнутые относительно топологии равномерной сходимости.

Определение 2. Будем считать, что тихоновское отображение f *удовлетворяет условию* $(*)$, если для любых функционально отделимых в $f^{-1}U$, $U \in \theta$, множеств A, B и точки $y \in U$ существуют окрестность $V \subseteq U$ точки y и функция $\psi: X \to [0,1]$, отделяющая в прообразе $f^{-1}V$ множества A и B, т.е. $\psi(A \cap f^{-1}V) = \{0\}$ и $\psi(B \cap f^{-1}V) = \{1\}$.

Предложение 3. *Тихоновское отображение f удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда $C^*(X) \approx C^*(f)$, то есть для любых функции $\varphi: f^{-1}U \to [0,1]$, $U \in \theta$, точки $y \in U$ и $\varepsilon > 0$ существуют функция $\psi: X \to [0,1]$ и окрестность $V \subseteq U$ точки y, удовлетворяющие условию $\|\varphi|_{f^{-1}V} - \psi|_{f^{-1}V}\| < \varepsilon$.*

Доказательство. Из свойства $(*)$ вытекает эквивалентность $C^*(X) \approx C^*(f)$. Обратное утверждение следует из того, что эквивалентные подсистемы R и S подмножеств кольца $C^*(f)$ порождают гомеоморфные тихоновские образы f_R и f_S, а для тихоновского отображения f кольцо $C^*(f)$ порождает тихоновский образ $f_{C^*(f)}$, гомеоморфный f (см. [2]).

Таким образом, из предложения 3 вытекает, что для тихоновского отображения f кольцо $C^*(f)$ порождает тихоновский образ $f_{C^*(f)}$, гомеоморфный f, который в свою очередь является подотображением проекции $p: I_\alpha^\alpha \times Y \to Y$ (см. [1]). Следовательно, тихоновское отображение, удовлетворяющее условию $(*)$, является параллельно тихоновским. С другой стороны, для непрерывного отображения f тихоновских пространств $C^*(X) \approx C^*(f)$, поэтому из предложения 3 также вытекает, что такие отображения удовлетворяют условию $(*)$.

Предложение 4. *Бикомпактное параллельно тихоновское отображение $f: X \to Y$ удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. В силу параллельной тихоновости f тихоновский образ $f_{C^*(X)}$, порожденный кольцом $C^*(X)$, гомеоморфен f и в силу бикомпактности f совпадает с $cf_{C^*(X)}$. Таким образом, кольца $C^*(X)$ и $C^*(f)$ порождают одну и ту же бикомпактификацию отображения f. Но (как установлено в [2]) лишь эквивалентные системы порождают одну и ту же тихоновскую бикомпактификацию, следовательно, предложение доказано.

Предложение 5. *Отображение f удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда существуют тихоновское пространство Z, проекция $p: Z \times Y \to Y$ и ее бикомпактное подотображение $\beta f: \beta_f X \to Y$, являющееся (с точностью до гомеоморфизма) максимальной тихоновской бикомпактификацией отображения f.*

Доказательство. Так как $C^*(X) \approx C^*(f)$ (по предложению 3), то $cf_{C^*(X)}$ – (с точностью до гомеоморфизма) максимальная тихоновская бикомпактификация f – является подотображением проекции $p: I_\alpha^\alpha \times Y \to Y$ (см. [2]). Обратное утверждение вытекает из предложения 4.

Определение 3. Подотображение $g: Z \to Y$ отображения f называется *аппроксимативно $C^*(f)$-вложенным*, если для любых функции $\varphi \in C^*(f^{-1}U)$, $U \in \theta$, точки $y \in U$ и $\varepsilon > 0$ существуют окрестность $V \subseteq U$ точки y и функция $\psi \in C^*(g^{-1}V)$, удовлетворяющие условию $\|\varphi|_{g^{-1}V} - \psi|_{g^{-1}V}\| < \varepsilon$.

Данное понятие позволяет сформулировать предложение 5 в следующем виде:

Предложение 6. *Тихоновское отображение f удовлетворяет условию $(*)$ тогда и только тогда, когда оно плотно и аппроксимативно $C^*(f)$-вложено в отображение, параллельное бикомпакту.*

Из теоремы 2 и предложения 6 вытекает:

Теорема 7. *Для тихоновского отображения f, удовлетворяющего условию $(*)$, существует естественный порядковый изоморфизм между полными подкольцами кольца $C^*(X)$ и всеми параллельно тихоновскими бикомпактификациями параллельно тихоновских образов f. В частности, существует естественный порядковый изоморфизм между полными подкольцами кольца $C^*(f)$, отделяющими точки и замкнутые множества отображения f, и всеми параллельно тихоновскими бикомпактификациями f.*

Следствие 8. *Если параллельно тихоновское отображение f не удовлетворяет условию $(*)$, то его максимальная тихоновская бикомпактификация βf не удовлетворяет условию $(*)$ и даже не является параллельно тихоновским отображением.*

Из предложения 4 и теоремы 7 следует соответствующее утверждение для параллельно тихоновских отображений:

Теорема 9. *Для параллельно тихоновского отображения f существует естественный порядковый изоморфизм между полными подкольцами кольца $C^*(X)$ и всеми параллельно тихоновскими бикомпактификациями параллельно тихоновских образов f. В частности, существует естественный порядковый изоморфизм между полными подкольцами*
кольца $C^*(X)$, отделяющими точки и замкнутые множества отображения f, и всеми параллельно тихоновскими бикомпактификациями f.

Литература

1. Мусаев Д.К., Пасынков Б.А. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. – Ташкент: ФАН, 1994.

2. Караулов В.М. Описание всех тихоновских бикомпактификаций тихоновского отображения при помощи колец непрерывных функций. Депонир. в ВИНИТИ, N. 2858-В95, 1995.

3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986.

Теорема единственности для уравнений в свертках на пространстве $C_0(\Omega)$

Л.В.Караулова

Данная работа посвящена проблеме единственности для уравнений в свертках, которая заключается в следующем. Пусть μ – регулярный борелевский заряд на банаховом пространстве Z, вариация которого конечна или даже достаточно быстро убывает, что обеспечивает существование потенциалов в смысле Лебега вида

$$U(a) = \int_Z f(\|z-a\|)\, d\mu(z)$$

при $z, a \in Z$, где $f(t)$ – непрерывная функция на полуоси $t \geq 0$. Если заряд μ на пространстве Z однозначно определяется своим потенциалом, т.е. из равенства $U(a) = 0$ для каждого $a \in Z$ следует, что $\mu \equiv 0$, то говорят, что *имеет место единственность* для данного пространства Z и данной функции $f(t)$. Те функции $f(t)$, при которых исключительности нет, называются *исключительными*.

Пусть Ω – локально компактное метрическое пространство, не являющееся компактным. Как обычно, под пространством $C_0(\Omega)$ будем понимать пространство непрерывных (вещественных или комплексных) функций на пространстве Ω, исчезающих на бесконечности. Пространство $C_0(\Omega)$ наделяется поточечными операциями и стандартной sup-нормой: если $x \in C_0(\Omega)$, то $\|x\| = \sup\limits_{\xi\in\Omega}\{\|x(\xi)\|\}$.

Проблема единственности для пространства $C_0(\Omega)$ рассматривалась Линде [1] для функций $f(t)$ вида $f(t) = t^\lambda$, где $\lambda > 0$. Он доказал, что при $\lambda > 0$ функции $f(t) = t^\lambda$ не являются исключительными. В настоящей работе проблема единственности рассматривается на пространствах Z вида $Z = C_0(\Omega) \oplus_\infty Y$, где Y – произвольное банахово пространство. Изучается более широкий класс функций $f(t)$. Предполагается, что $f(t)$ либо непрерывно дифференцируемая непостоянная функция, либо неотрицательная непрерывная строго возрастающая функция.

Основная идея доказательства основана на приеме, примененном Линде [1]. Заключается она в редукции проблемы единственности для пространства Z к проблеме единственности на полуоси для потенциалов вида

$$U'(a) = \int_0^\infty f(\max(t;s))\, d\mu_a(t),$$

где $\mu_a(t) = \mu\{z \in Z : \|z-a\| < t\}$ и $s > 0$. Устанавливается, что в случае, когда $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией, из равенства $U'(a) \equiv 0$ следует, что $f'(t)\cdot\mu_a(t) = 0$ для каждого $t > 0$.

При доказательстве также используется теорема Прайсса и Тишера о том, что борелевский заряд, заданный на сепарабельном банаховом пространстве, определяется своими значениями на всех шарах этого пространства. Указанная теорема и полученное равенство $f'(t)\cdot\mu_a(t) \equiv 0$ позволяют делать вывод о неисключительности непрерывно дифференцируемых функций $f(t)$ на пространстве Z.

Перейдем к изложению результатов работы.

Теорема 1. *Пусть $f(t)$ – непрерывно дифференцируемая непостоянная вещественная функция на полуоси $t \geq 0$ и $\nu(t)$ – такой борелевский заряд на полуоси, что*

$$\int_0^\infty |f(t)|\, d|\nu|(t) < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty f(\max(t,s))\, d\nu(t) = 0$$

для каждого $s > 0$. Тогда $\nu(t) = 0$ для каждого $t \in supp(f'(t))$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\Delta s > 0$ и рассмотрим выражение

$$\int_0^\infty \frac{f(\max(t, s+\Delta s)) - f(\max(t,s))}{\Delta s}\, d\nu(t).$$

Учитывая то, что при $t > s+\Delta s$ имеет место равенство $\max(t, s+\Delta s) = \max(t,s)$, и, переходя к пределу при $\Delta s \to 0$, получаем, что

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(s+\Delta s) - f(s)}{\Delta s}\int_0^s d\nu(t) = f'(s)\cdot\int_0^s d\nu(t) = f'\cdot\nu([0;s)) = f'(s)\nu(s) = 0$$

для каждого $s > 0$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы 1 $f(t)$ – строго монотонная функция, то $\nu(t) \equiv 0$.

Следствие 3. *Если в условиях теоремы 1 $f(t)$ – непрерывная неотрицательная строго возрастающая функция на полуоси $t \geq 0$, то $\nu(t) \equiv 0$.*

Введем понятие слабой согласованности.

Пусть μ – локально ограниченный борелевский заряд на банаховом пространстве Z и $f(t)$ – непрерывная функция на полуоси $t \geq 0$. Будем говорить, что заряд μ и функция $f(t)$ *слабо согласованы на пространстве*

Z, если существует такая непрерывная неотрицательная функция $\omega(t)$ на полуоси $t \geq 0$, что

1. $\frac{\omega(t+c)}{\omega(t)} \leq e^c$ для любых $t, c > 0$.
2. $|f(\|z-a\|)| \leq C_a \cdot \omega(\|z\|)$, для любых $z, a \in Z$, где C_a – константа, зависящая от a.
3. $\int_Z \omega(\|z\|)\, d|\mu(z)| < \infty$.

Нетрудно видеть, что условие слабой согласованности обеспечивает абсолютную сходимость потенциалов вида $\int_Z f(\|z-a\|)\, d\mu(z)$.

Пусть Y – произвольное банахово пространство. Тогда определим пространство Z в следующем виде: $Z = C_0(\Omega) \oplus_\infty Y$ с нормой $\|z\| = \max(\|x\|; \|y\|)$ для каждого $z \in Z$, где $z = x \oplus_\infty y$ при $x \in C_0(\Omega)$ и $y \in Y$. Нетрудно видеть, что Z – также банахово пространство.

Лемма 4. *Пусть Ω – некомпактное метрическое пространство. Тогда на пространстве Ω существует последовательность таких открытых множеств $\{O_k\}$, что каждое компактное множество $K \subset \Omega$ пересекается не более чем с конечным числом множеств O_k.*

Лемма 5. *Пусть непрерывная на полуоси функция $f(t)$ и локально ограниченный борелевский заряд μ на пространстве $Z = C_0(\Omega) \oplus_\infty Y$ слабо согласованы. Если равенство*

$$\int_Z f(\|z-a\|)\, d\mu(z) = 0$$

выполняется для каждого $a \in Z$, то имеет место равенство

$$\int_0^\infty f(\max(\|z-a\|; c))\, d\mu(z) = 0$$

для каждого $c > 0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный элемент $z = x \oplus_\infty y \in Z$ и число $c > 0$. Пусть $\{O_k\}$ – последовательность открытых множеств в Ω, удовлетворяющая условиям леммы 4. Построим на пространстве $C_0(\Omega)$ такую последовательность $\{x_k\}$, что $\mathrm{supp}(x_k) \subset O_k$ и $\|x_k\| = 1$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству $\varepsilon < \max(\|x\|; c)$, и найдем такое компактное множество $K_\varepsilon \subset \Omega$, что $|x(\xi)| < \varepsilon$ для всех $\xi \notin K_\varepsilon$. Такое множество K_ε существует, так как $x \in C_0(\Omega)$. Найдем такой номер k_0, что $O_k \cap K_\varepsilon = \emptyset$ для всех $k > k_0$. Тогда имеем неравенство $c - \varepsilon \leq \sup_{\Omega \setminus K_\varepsilon} |x(\xi) + c x_k(\xi)| \leq c + \varepsilon$. Так как $\sup_K |x(\xi) + c x_k(\xi)| = \|x\|$, то получаем неравенство $|\|x + c x_k\| - \max(\|x\|; c)| < 2\varepsilon$ для каждого $z \in Z$. Значит, $\lim_{k \to \infty} \|x + c e_k\| = \max(\|x\|; c)$ для каждого $c > 0$.

Теперь положим $e_k = x_k \oplus 0 \in Z$ и рассмотрим

$$\lim_{k\to\infty} \|z + c e_k\| = \lim_{k\to\infty} \max(\|x + c e_k\|; \|y\|) =$$
$$= \max(\max(\|x\|; c); \|y\|) = \max(\|z\|; c).$$

Условие слабой согласованности дает, в силу теоремы о мажорированной сходимости, возможность предельного перехода под знаком интеграла. Следовательно, получаем, что

$$\int_Z f(\max(\|z-a\|, c))\, d\mu(z) = \lim_{k\to\infty} \int_Z f(\|z - a + c e_k\|)\, d\mu(z) = 0.$$

Заметим, что в случае, когда пространство Y является сепарабельным, пространство $Z = C_0(\Omega) \oplus_\infty Y$ также сепарабельно. Следовательно, по теореме Прайсса-Тишера, борелевский заряд на пространстве Z определяется его значениями на всех шарах этого пространства. Тогда из теоремы 1, следствия 3 и леммы 5 вытекает

Теорема 6. *Пусть непрерывная на полуоси функция $f(t)$ и локально ограниченный борелевский заряд μ на пространстве $Z = C_0(\Omega) \oplus_\infty Y$, где Y – сепарабельное банахово пространство, слабо согласованы. Если равенство*

$$\int_Z f(\|z-a\|)\, d\mu(z) = 0$$

выполняется для каждого $a \in Z$ и выполняется одно из условий:

1. $f(t)$ – непрерывно дифференцируемая строго монотонная функция,

2. $f(t)$ – неотрицательная строго возрастающая функция,

то $\mu \equiv 0$.

Литература

1. W.Linde. Uniqueness theorems for Measures in L_r and $C_0(\Omega)$ // Math.Ann. – 1986. – 274. – P. 617-626.

2. Ким Ен Чжин. Шаровые покрытия банаховых пространств и теоремы единственности для потенциалов мер в бесконечномерных пространствах типа l_p. – Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – М.: Изд-во МПГУ, 1992.

Множество типов группы Батлера A и вполне характеристические подгруппы $A(\tau)$

Е.М.Ковязина

Батлер ввел некоторый класс групп, которые позднее стали называть группами Батлера. Мы будем использовать эквивалентное определение, данное Кёлером [1].

Определение 1. Пусть A — группа без кручения конечного ранга. Группа А называется *группой Батлера,* если она имеет систему образующих следующего вида:

$$\{p^{-s_k(p)}y_i^k \mid p \in \pi;\ 0 \le s_k(p) < h_k(p)+1;\ k=0,1,\cdots,N;\ i=1,2,\cdots,n_k\},$$

где: (a) $h_0, h_1, \cdots, h_N$ – характеристики такие, что $[h_i] = \tau_i$; $h_i \le h_j$, если $\tau_i \le \tau_j$; $h_i \wedge h_j = h_k$, если $\tau_i \wedge \tau_j = \tau_k$, $0 \le i,j,k \le N$;

(b) $n_k = \operatorname{rank}(A_k)$, $k = 0,1,\cdots,N$; (c) $y_i^k \in \mathbf{Q}^n$.

Будем записывать такие множества образующих в виде $A = \{(y_i^k, h_k)\}$.

Кёлер в этой же статье доказал, что для группы Батлера A множество типов $T(A) = \{\operatorname{type}(a) \mid a \in A\}$ и линейные пространства $A^*(\tau) = \mathbf{Q} \otimes A(\tau)$ для каждого типа $\tau \in T(A)$ являются полной системой квазиизоморфных инвариантов, где $A(\tau) = \{a \in A | \operatorname{type}(a) \ge \tau\}$. Будем называть $T(A)$ и $A^*(\tau)$ для каждого типа τ инвариантами Кёлера.

Пусть $\tau = [(m_p)]$ – некоторый тип, m_p – натуральное число, 0 или символ ∞, тогда $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{Q} \otimes \prod_{p\in\pi} \mathbf{Z}p^{m_p}$ называется *кольцом τ-адических чисел,* π пробегает множество простых чисел, $\mathbf{Z}p^\infty$ – кольцо целых p-адических чисел, $\mathbf{Z}p^k$ – кольцо классов вычетов по модулю p^k, если $k < \infty$.

Определение 2. Назовем τ-адическое число α *кусочно-рациональным,* если его можно представить в виде $\alpha = t_1\varepsilon_1 + \cdots + t_k\varepsilon_k$, где $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{Q}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ – взаимно ортогональные идемпотенты из $\mathbf{Q}(\tau)$, сумма которых равна единице.

Зафиксируем произвольную подгруппу R аддитивной группы поля рациональных чисел так, что $1 \in R$. Набор p-высот единицы в группе R представляет из себя характеристику $H = (m_p)$ некоторого типа τ. *H-топологией* на абелевой группе A называется топология, определяемая следующей базой окрестностей нуля $\{nA \mid \frac{1}{n} \in R\}$. Следующий набор

гомоморфизмов для данной группы A по всем парам положительных целых чисел m и n таким, что n делится на m и $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \in R$, образует обратный спектр:

$$A/nA \to A/mA \ \ (a + nA \mapsto a + mA). \tag{1}$$

Обратный предел спектра (1) называется *пополнением группы* A в H-топологии и обозначается A_H. Всякий элемент $a \in A$ определяет согласованную цепь спектра (1), состоящую из элементов вида $a + nA \in A/nA$. Таким образом мы получаем гомоморфизм пополнения $\mu_A : A \to A_H$. $\mathbf{Q}(\tau)$-модуль $\mathbf{Q} \otimes A_H$ называется *τ-адическим пополнением* группы A и обозначается A_τ.

Определение 3. Модуль над кольцом $\mathbf{Q}(\tau)$

$$\Delta_\tau(A) = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{Q}(\tau)^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \text{ в } A_\tau\}$$

называется *модулем τ-адических соотношений* группы A относительно базиса $x_1, \ldots, x_n$.

А.А.Фомин [2] доказал, что приведенный тип Ричмена абелевой группы без кручения конечного ранга и модули τ-адических соотношений для каждого типа типа Ричмена определяют группу с точностью до квазиизоморфизма. В статье [3] было доказано, что для группы Батлера мы можем выбрать регулярную базисную систему τ-адических соотношений с кусочно-рациональными τ-адическими коэффициентами.

Пусть группа Батлера A задана регулярной базисной системой τ-адических соотношений с кусочно рациональными коэффициентами

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; & a_{11}, \cdots, a_{1n} \in \mathbf{Q}(\tau_1) \\ \cdots \quad \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0; & a_{m1}, \cdots, a_{mn} \in \mathbf{Q}(\tau_m) \end{cases} \tag{2}$$

Коэффициенты α_{ij} представляются в виде $\alpha_{ij} = t_{j1}^i\varepsilon_1^i + \cdots + t_{jk_i}^i\varepsilon_{k_i}^i$, где $\varepsilon_1^i, \ldots, \varepsilon_{k_i}^i$ – система ортогональных идемпотентов из $\mathbf{Q}(\tau_i)$. Каждое i-тое соотношение системы (2) эквивалентно конечной системе соотношений с рациональными коэффициентами. И вся система соотношений эквивалентна некоторой конечной системе соотношений с рациональными коэффициентами. Перенумеруем все получившиеся типы в произвольном порядке. Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_N$ – все типы системы. Для каждого типа τ_i выпишем соответствующий ему элемент. Таким образом, мы имеем задание группы A в виде $A = \{(y_k, h_k)\}$, где h_k – некоторая высотная последовательность типа τ_k.

Для каждого h_i пусть A_i^* будет подпространство $\mathbf{Q}^n$, образованное всеми y_k такими, что $h_k \geq h_i$. Пусть F – (конечное) множество всех подмножеств индексов $\{1,\ldots,N\}$. Для каждого $f \in F$ определим $A_f^* = \Sigma_{i\in f} A_i^*$ и $t_f = \cap_{i\in f}[h_i]$. Если $x \in A \cap A_f^*$, то $x = \Sigma_{i\in f} a_i x_i$, где $a_i \in \mathbf{Q}$, $x_i \in A_i^*$. Откуда $t(x) \geq \cap_{i\in f} t(x_i) \geq \cap_{i\in f}[h_i] = t_f$. Если $x \in A$, определим $t_x = \cup\{t_f \mid x \in A_f^*\}$. Можно показать, что $t(x) = t_x$. Пусть $T = \{t_x \mid x \in A\} \cup \{$ все конечные пересечения $\{t_x \mid x \in A\}\}$. T конечно и имеет форму решетки $\{t_\infty, t_0, t_1, \ldots, t_k\}$. Кёлер показал, что $T = T(A)$.

Определение 4. Назовем систему типов $T = \{t_\infty, t_0, t_1, \ldots, t_k\}$, полученную описанным выше способом, *системой типов, ассоциированной системе* τ-адических соотношений (2).

Теорема. *Пусть группа Батлера A задана системой соотношений (2). И пусть $T = \{t_0, t_1, \cdots, t_N\}$ – система типов, ассоциированная системе τ-адических соотношений (2). Тогда множество типов T и набор линейных пространств $\mathbf{Q}^n \cap \Delta_\tau(A)$ для каждого типа $\tau \in T$ совпадают с инвариантами Кёлера.*

Доказательство. Множество типов T совпадает с множеством типов группы $T(A)$. Это следует из построения ассоциированной системы типов и было доказано Кёлером.

Докажем, что $\mathbf{Q}^n \cap \Delta_\tau(A) = A^*(\tau)$. Пусть H – некоторая характеристика типа τ. И пусть $a \in A$, $a = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$, type$(a) \geq \tau$. Рассмотрим отображение $\mu_A\colon A \to A_H$. Ядро $\ker \mu_A = \{x \mid H_A(x) \geq H\}$. Откуда $\mu_A(a) = 0$. Тогда при отображении $A \to A_\tau$ элемент $a \mapsto 1 \otimes \mu_A(a) = 0$, т.е. $r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0$ в A_τ. Откуда $a \in \mathbf{Q}^n \cap \Delta_\tau(A)$. Обратно, если $a \in \mathbf{Q}^n \cap \Delta_\tau(A)$, то $a = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n = 0$, т.е. $a \in \mathbf{Q} \otimes A$ и type$(a) \geq \tau$.

Аналогично можно доказать

Предложение. *Пусть нам дана группа Батлера A, заданная системой образующих элементов $\{(y_i^k, h_k)\}$, $k = 0, 1, \cdots, N$. rank $(A) = n$, $y_1^0, \cdots, y_n^0$ – система линейно независимых элементов в A. Каждый элемент y_i^k раскладывается в сумму $y_i^k = \Sigma_{j=1}^n a_{ij}^k y_j^0$. Тогда группа A задается следующей системой τ-адических соотношений с рациональными коэффициентами:*

$$\begin{cases} \Sigma_{j=1}^n a_{1j}^1 y_j^0 + \cdots + \Sigma_{j=1}^n a_{n_1j}^1 y_j^0 = 0; & a_{ij}^1 \in \mathbf{Q}(\tau_1), \\ \cdots \qquad \cdots & \cdots \\ \Sigma_{j=1}^n a_{1j}^N y_j^0 + \cdots + \Sigma_{j=1}^n a_{n_1j}^N y_j^0 = 0; & a_{ij}^N \in \mathbf{Q}(\tau_N), \end{cases}$$

где $\tau_i = [h_i]$, $i = 1, \cdots, N$.

Литература

1. Koehler J. The type set of torsion free groups of finite rank // Illinois J.Math. – 1965. – V. 9. – P. 66 – 86.
2. Fomin A.A. The category of quasihomomorphisms of abelian torsion free groups of finite rank // A.M.S., Contemporary Mathematics. – 1992. – V. 131 (Part 1). – P. 91 – 111.
3. Ковязина Е.М. $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$-пространства для групп Батлера // Фундам. и прикл. матем. – 1996. – Т. 2, N 1. – С. 295 – 300.

Гиперконечная аппроксимация боровской компактификации ЛКА-группы

И.И.Подгорная

Пусть G – локально компактная абелева группа (с операцией, обозначаемой, как сложение), $^*G$ – её нестандартное расширение. Пусть F – фильтр окрестностей точки $0 \in G$, обозначим $\mu(0) = \cap_{U(0)\in F} {}^*U(0)$. Как обычно, пишем $x \approx y$ (x,y бесконечно близки), если $x - y \in \mu(0) (x, y \in {}^*G)$.

Пусть G_ν некоторая внутренняя гиперконечная группа, $j : G_\nu \to {}^*G$ – некоторое инъективное внутреннее отображение. Пара (G_ν, j) называется [1] гиперконечной аппроксимацией группы G, если выполнены следующие условия:

1) для любого стандартного элемента $x \in G$ существует элемент $g \in G_\nu$ такой, что $j(g) \approx x$;

2) если $g_1, g_2 \in G_\nu$ и $j(g_1)$, $j(g_2)$ – околостандартные элементы, то $j(g_1 + g_2) \approx j(g_1) + j(g_2)$, $j(-g_1) \approx -j(g_1)$ и $j(0) = 0$.

Пусть $X = \hat{G}$ – группа непрерывных характеров на группе G. Как известно [3], группа $B = \widehat{X_d}$ (т.е. группа характеров на группе X с дискретной топологией, наделенная топологией поточечной сходимости) является компактификацией группы G, эквивалентной боровской компактификации. Вложение $i : G \to \widehat{X_d}$ осуществляется естественным образом: для любого элемента $x \in G$ и любого непрерывного характера $\chi \in X$ полагают $i(x)(\chi) = \chi(x)$. Построим нестандартную конструкцию, изоморфную группе B. Введем на множестве $^*G$ бинарное отношение $\approx_b$ следующим образом: $x \approx_b y$, если для любого непрерывного характера $\chi \in X$ $^*\chi(x) \approx {}^*\chi(y)$. Очевидно, это отношение эквивалентности. Покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие $p : {}^*G/_{\approx_b} \to B$ между множеством соответствующих классов эквивалентности и множеством $B = \widehat{X_d}$. Пусть $M(x)$ – некоторый класс эквивалентности по отношению $\approx_b$, зададим отображение $\phi = p(M(x))$ следующим образом: $\phi(\chi) = {}^\circ\chi(x)$. Очевидно, это определение не зависит от выбора представителя x и разным классам соответствуют разные отображения ϕ. Легко видеть, что ϕ является характером на X: $\phi(\chi_1\chi_2) = {}^\circ(\chi_1\chi_2(x)) = {}^\circ\chi_1(x){}^\circ\chi_2(x)$, т.е. $\phi \in B$. Покажем, что таким образом может быть построен любой элемент $\phi \in B$. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть Y – локально компактная абелева группа, $\hat{Y}$ - группа ее непрерывных характеров, ϕ – произвольный характер на Y. Тогда существует элемент $\varphi \in {}^*\hat{Y}$, такой, что $\varphi(x) \approx \phi(x)$ для любого $x \in Y$.*

Доказательство. Как известно [3], любой характер на локально компактной абелевой группе является поточечным пределом непрерывных характеров. Т.е. для любого конечного набора $x_1, ..., x_n \in Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует непрерывный характер $\chi \in \hat{Y}$, такой, что $|\phi(x_i) - \chi(x_i)| < \varepsilon$, $i = 1, ..., n$. Но тогда по теореме о направленности [2] существует элемент $\varphi \in {}^*\hat{Y}$, такой, что $|\phi(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in Y$ и любого $\varepsilon \in R^+$, т.е. $\phi(x) \approx \varphi(x)$.

В данном случае $\phi \in B$ – это произвольный характер на группе X, а по теореме двойственности любой непрерывный характер на X есть элемент x группы G, действующий следующим образом: $i(x)(\chi) = \chi(x)$. Следовательно, существует элемент $x \in {}^*G$, такой, что $\phi(\chi) \approx x(\chi) = \chi(x)$, т.е.$\phi(\chi) = {}^\circ\chi(x)$ для некоторого $x \in {}^*G$, что и означает, что соответствие p между B и множеством $\{M(x)|x \in {}^*G\}$ взаимно-однозначно. Таким образом, мы получили

Следствие 1. *Для любого $\phi \in B$ существует элемент $x \in {}^*G$, такой, что $\phi(\chi) \approx \chi(x)$ для всех $\chi \in X$.*

Таким образом, множество ${}^*G/_{\approx_b}$, наделенное операцией и топологией, индуцированными с группы B, образует компактификацию группы G, эквивалентную боровской компактификации. Мы используем эту конструкцию для построения гиперконечной аппроксимации группы B.

Лемма 2. *Пусть (G_ν, j) – гиперконечная аппроксимация группы G, F – фильтр окрестностей точки 0. Тогда существует множество $\Delta \in {}^*F$, такое, что $\Delta \subset \mu(0)$ и для любого $x \in G$ существует элемент $g \in G_\nu$ такой, что $j(g) \in \{x + \Delta\}$.*

Доказательство. Построим отношение r на $({}^*G \times {}^*F) \times {}^*F$ следующим образом: пусть $x \in {}^*G$, $\Delta, \Delta_1 \in {}^*F$, тогда $((x, \Delta_1), \Delta) \in r$, если $\Delta \subset \Delta_1$ и $(x + \Delta) \cap j(G_\nu) \neq \emptyset$. Это, очевидно, внутреннее отношение, причем на множестве $G \times F$ оно направленно, так как для любого конечного набора $x_1, ..., x_n \in G, U_1(0), ..., U_n(0)$ существует такая окрестность $V(0)$, что $V(0) \subset U_k(0)$ и $(x_k + {}^*V(0)) \cap j(G_\nu) \neq \emptyset$ для всех $k = 1, ..., n$. (Достаточно положить $V(0) = \bigcap_{k=1}^n U_k(0)$). Следовательно, по принципу направленности существует элемент $\Delta \in^* F$, удовлетворяющий условию леммы.

Лемма 3. *Пусть (G_ν, j) – гиперконечная аппроксимация группы G, $M(x_0) \subset {}^*G$ – класс эквивалентности по отношению $\approx_b$. Тогда существует элемент $g \in G_\nu$, такой, что $j(g) \in M(x_0)$.*

Доказательство. Возьмем множество Δ, построенное в лемме 2, и обозначим $A = \{x \in {}^*G|(x + \Delta) \cap j(G_\nu) \neq \emptyset\}$. Это внутреннее множество, содержащее все стандартные точки. Известно [2], что такое множество пересекается с любой дискретной монадой. Рассмотрим дискретную монаду точки $x_0 \in {}^*G$, тогда существует элемент $y \in \mu_d(x_0) \cap A$, а следовательно, существует элемент $g \in G_\nu$, такой, что $j(g) \in \{y + \Delta\}$. Отсюда $y \approx j(g)$, поэтому для любого непрерывного характера $\chi \in X$ $\chi(y) \approx \chi(j(g))$. Далее, так как $y \in \mu_d(x_0)$, то $\chi(y) \approx \chi(x_0)$. Итак, $\chi(x_0) \approx \chi(j(g))$ и $j(g) \in M(x_0)$, что и требовалось доказать.

Пусть B – компактификация группы G, $i : G \to B$ – соответствующее вложение. Рассмотрим отображение ${}^*i : {}^*G \to {}^*B$.

Теорема. *Пара $(G_\nu, {}^*i \circ j)$ образует гиперконечную компактификацию группы B.*

Доказательство. Покажем, что для любого элемента $\phi_0 \in B$ существует элемент $g \in G_\nu$, такой, что $({}^*i \circ j)(g) \approx \phi_0$ в ${}^*B$. Обозначим через $\mu_B(0)$ монаду точки 0 в ${}^*B$. По определению топологии в B (топологии поточечной сходимости) $\mu_B(0) = \{\phi \in {}^*B|\phi(\chi) \approx 1 \forall\chi \in X\}$. По следствию 1 найдется элемент $x \in {}^*G$, такой, что $\phi_0(\chi) \approx \chi(x)$ для любых $\chi \in X$. По лемме 3 существует элемент $g \in G_\nu$, такой, что для любых $\chi \in X$ $\chi(x) \approx \chi(j(g))$. Покажем, что ${}^*i(j(g)) \in \mu(\phi_0)$. Действительно, для любого $\chi \in X$ ${}^*i(j(g))(\chi) = \chi(j(g)) \approx \phi_0(\chi)$. Условие 2 , очевидно, выполняется.

Литература

1. Гордон Е.И. Об аппроксимациях топологических групп и их представлений // Доклады РАН. - 1995. - Т. 1345. - Вып. 5. - С. 593 - 595.
2. Luxemburg W.A.J. A General Theory of Monads // Applications of Model Theory to Algebra. Analysis and Probabilyty Theory. - 1969. - P. 18 - 86.
3. Хьюитт Э.,Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1 - М.: Наука, 1975.

Конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций и его строго выпуклые мультипликативные подгруппы

И. А. Семенова

Пусть X - произвольное топологическое пространство. Множество всех непрерывных положительных функций на X и всех непрерывных вещественнозначных функций на X образуют относительно поточечных операций сложения и умножения полуполе $U(X)$ и кольцо $C(X)$ соответственно. Изучение конгруэнций на полуполях $U(X)$ начато Е. М. Вечтомовым и автором статьи [1].

В данной статье конгруэнции на полуполе $U(X)$ исследуются в терминах его мультипликативных подгрупп с условиями выпуклости.

Назовем мультипликативную подгруппу G в полуполе $U(X)$ *внешне выпуклой*, если $(\forall f \in G)(\forall \alpha \in C(X))$ $(\alpha f + 1 - \alpha \in U(X) \Longrightarrow \alpha f + 1 - \alpha \in G)$; *строго выпуклой*, если $(\forall f, g \in G)(\forall \alpha \in U(X))(\alpha < 1 \Longrightarrow \alpha f + (1-\alpha)g \in G)$. Запись $\alpha < 1$ означает, что $(\forall x \in X)$ $\alpha(x) < 1$. Заметим, что любая внешне выпуклая подгруппа в полуполе $U(X)$ строго выпукла.

Пусть $D(X)$ - упорядоченное множество всех строго выпуклых подгрупп в $U(X)$ относительно отношения включения $\subseteq$. Нетрудно видеть, что $D(X)$ является полной решеткой. Действительно, точная нижняя грань любого семейства элементов из $D(X)$ равна их пересечению. Точная верхняя грань $G_1,\ G_2 \in D(X)$ имеет вид $G_1 \vee G_2 = G_1 \cdot G_2$.

Заметим, что для произвольной подгруппы G в $U(X)$ множество

$$\overline{G} = \{\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i \ :\ n \in \mathrm{N},\ \alpha_i \in U(X),\ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1,\ f_i \in G\}$$

является строго выпуклой подгруппой.

Пусть $Con\ U(X)$ - решетка всех конгруэнций в полуполе $U(X)$.

Теорема 1. *Решетки $Con\ U(X)$ и $D(X)$ канонически изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi\ :\ Con\ U(X) \Longrightarrow \langle D(X), \subseteq\rangle$, такое, что $\varphi(\rho) = [1]_\rho$. Так как для каждой конгруэнции класс единицы определяется однозначно, то φ - функция. Для доказательства теоремы достаточно показать, что выполняются следующие условия:

1. $(\forall \rho \in Con\ U(X))$ $[1]_\rho \in D$, т. е. класс единицы любой конгруэнции является строго выпуклой подгруппой в полуполе $U(X)$.

Действительно, по определению конгруэнции $1\rho f, 1\rho g \Longrightarrow 1\rho(fg)$, т.е. множество $[1]_\rho$ замкнуто относительно умножения; $1 \in [1]_\rho$; вместе с функцией f в $[1]_\rho$ лежит и обратная функция f^{-1}, так как $1\rho f,\ f^{-1}\rho f^{-1} \Longrightarrow f^{-1}\rho 1$. Таким образом, $[1]_\rho$ – подгруппа в $U(X)$.

Пусть $1\rho f,\ 1\rho g,\ \alpha \in U(X)$ и $\alpha < 1$. Тогда $\alpha\ \rho\ \alpha f,\ (1-\alpha)\ \rho\ (1-\alpha)g$ и $1\ \rho\ (\alpha f + (1-\alpha)g)$. Следовательно, $[1]_\rho \in D$.

2. Любой элемент множества $D(X)$ является классом единицы некоторой конгруэнции $\rho \in Con\ U(X)$, причем единственной.

Для каждой подгруппы $G \in D(X)$ определим отношение ρ_G таким образом $f\rho_G g \Longleftrightarrow \frac{f}{g} \in G$ и покажем, что ρ_G – конгруэнция на полуполе $U(X)$.

a) $f\rho_G f$, так как $\dfrac{f}{f} = 1 \in G$;

b) $f\rho_G g \Longrightarrow g\rho_G f$, так как $\dfrac{f}{g} \in G \Longrightarrow \dfrac{g}{f} = \left(\dfrac{f}{g}\right)^{-1} \in G$;

c) $(f\rho_G g$ и $g\rho_G h) \Longrightarrow f\rho_G h$, так как если $\dfrac{f}{g} \in G$ и $\dfrac{g}{h} \in G$, то и $\dfrac{f}{g}\cdot\dfrac{g}{h} = \dfrac{f}{h} \in G$.

d) $(f\rho_G f_1$ и $g\rho_G g_1) \Longrightarrow (f+g)\ \rho_G\ (f_1+g_1)$, так как, полагая $\alpha = \dfrac{f_1}{f_1+g_1}$, получим $1-\alpha = \dfrac{g_1}{f_1+g_1}$. Тогда $\dfrac{f}{f_1}, \dfrac{g}{g_1} \in G$ и $\alpha\cdot\dfrac{f}{f_1} + (1-\alpha)\dfrac{g}{g_1} = \dfrac{f}{f_1+g_1} + \dfrac{g}{f_1 g_1} = \dfrac{f+g}{f_1+g_1} \in G$, т.е. $(f+g)\ \rho_G\ (f_1+g_1)$.

e) $(f\rho_G f_1$ и $g\rho_G g_1) \Longrightarrow fg\rho_G f_1 g_1$, так как $\dfrac{f}{f_1}\cdot\dfrac{g}{g_1} = \dfrac{fg}{f_1 g_1} \in G$.

Ясно, что $G = [1]_{\rho_G}$. Очевидно также, что если $\rho \in Con\ U(X)$ и $G = [1]_\rho$, то $\rho = \rho_G$.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между $Con\ U(X)$ и D.

3. Биекция φ сохраняет порядок, так как $(\forall \rho, \rho_1 \in Con\ U(X))$ $(\rho \leq \rho_1 \Longleftrightarrow (\forall f \in U(X))[1\rho f \Longrightarrow 1\rho_1 f] \Longleftrightarrow [1]_\rho \subseteq [1]_{\rho_1})$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Конгруэнция ρ на $U(X)$ идеальна тогда и только тогда, когда соответствующая ей подгруппа $[1]_\rho$ внешне выпукла.*

Доказательство. Пусть конгруэнция ρ идеальна по некоторому идеалу I в $C(X)$. Тогда $\varphi(\rho) = [1]_I = \{1+f \ : \ f \in I$ и $1+f \in U(X)\}$. Уже доказано, что $[1]_I$ - строго выпуклая подгруппа в $U(X)$. Покажем ее внешнюю выпуклость: $\alpha(1+f)+1-\alpha = \alpha+\alpha f+1-\alpha = 1+\alpha f \in [1]_I$, так как $\alpha f \in I$.

Пусть G - внешне выпуклая подгруппа в $U(X)$, тогда множество $I = \{g(f-1) \ : \ f \in G, \ g \in U(X)\}$ - идеал в C(X). Действительно, если $g_1(f_1-1) \in I$ и $g_2(f_2-1) \in I$, то $g_1(f_1-1)+g_2(f_2-1) = (g_1+g_2)(\frac{g_1}{g_1+g_2}f_1 + \frac{g_2}{g_1+g_2}f_2 - 1) \in I$, так как $(g_1+g_2) \in U(X)$, а $(\frac{g_1}{g_1+g_2}f_1 + \frac{g_2}{g_1+g_2}f_2) \in G$ в силу строгой выпуклости G. Если h – произвольная функция из $C(X)$, то $g(f_1-1)h = g((fh+1-h)-1) \in I$, так как $(fh+1-h) \in G$ в силу внешней выпуклости G.

Рассмотренному выше идеалу I соответствует конгруэнция ρ_I. Покажем, что $\rho_I = \varphi^{-1}(G)$. Имеем: $a\rho_I b \Longleftrightarrow a-b \in I \Longleftrightarrow a-b = g(f-1) \Longleftrightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{g}{b}(f-1) \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{g}{b}(f-1)+1 = \frac{g}{b}f + 1 - \frac{g}{b} \in G$. Таким образом, $a\rho_I b \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \in G \Longleftrightarrow (a,b) \in \varphi^{-1}(G)$.

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2, а также теоремы 2 [2] следует

Теорема 3. *Пространство X псевдокомпактно тогда и только тогда, когда всякая строго выпуклая мультипликативная подгруппа в $U(X)$ внешне выпукла.*

Напомним, что псевдокомпактность X означает ограниченность каждой функции из $C(X)$.

Литература

1. Варанкина В.И., Вечтомов Е.М., Семенова И.А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундам. и прикл. матем. (в печати).

2. Семенова И.А. Главные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций // Вестник Вятского пед. ун-та. Вып. 1. Матем., инф., физ. – 1996. – С. 14 – 16.

О предпучке полуколец эндоморфизмов

В.В.Чермных

Пусть S – полукольцо с 1. Коммутативный моноид $\langle A,+,0\rangle$ называется *правым полумодулем над полукольцом* S, если задано умножение справа элементов $a \in A$ на элементы $s \in S$, обозначаемое as, и при этом для любых $a,b \in A, s,t \in S$ выполняются условия: 1) $a(st) = (as)t$; 2) $(a+b)s = as+bs$; 3) $a(s+t) = as+at$; 4) $a \cdot 1 = a$; 5) $0 \cdot s = a \cdot 0 = 0$.

Отображение $\varphi : A \to B$ правых S-полумодулей называется *гомоморфизмом полумодулей*, если φ – полугрупповой гомоморфизм, и $\varphi(as) = \varphi(a)s$ для любых $a \in A, s \in S$. Множество всех эндоморфизмов $End\ A$ (т.е. гомоморфизмов $A \to A$) правого S-полумодуля A является полукольцом, в котором операции сложения и умножения определяются следующим образом: $(\varphi+\psi)(a) = \varphi(a)+\psi(a)$, $(\varphi\cdot\psi)(a) = \varphi(\psi(a))$. Это полукольцо, называемое *полукольцом эндоморфизмов полумодуля* A, является также и полумодулем над S.

Предложение 1 [1, предл. 1.13.2]. *Полукольцо $End\ S$ всех эндоморфизмов полукольца S, рассматриваемое как полумодуль над собой, изоморфно полукольцу S.*

Правый идеал $Ann\ a = \{s \in S : as = 0\}$ называется *аннулятором элемента* $a \in S$. Идеал A полукольца S называется *чистым* , если для любого элемента $a \in A$ выполняется $A + Ann\ a = S$.

Предложение 2 [1, предл. 1.12.1]. *Для чистых идеалов A,B,C полукольца S справедливы утверждения:*

1. *Если $a \in A$, то $ae = a$ для некоторого $e \in A$.*
2. $(A+B)\cap C = (A\cap C)+(B\cap C)$.
3. *Пересечение двух чистых идеалов является чистым идеалом.*
4. *Сумма произвольного числа чистых идеалов есть чистый идеал.*

Предложение 3 [1, предл. 1.13.3]. *Если $A \subseteq B$ — чистые идеалы полукольца S, $a \in A$ и $\varphi \in End\ B$, то $\varphi(a) \in A$.*

Произвольная дистрибутивная решетка идеалов полукольца S, содержащая 0 и S и замкнутая относительно произвольных сумм, называется *фреймом идеалов полукольца* S. Множество всех чистых идеалов полукольца S является примером фрейма идеалов (предл.2).

Пусть F – произвольный фрейм идеалов полукольца S. Собственный идеал $P \in F$ называется *точечным элементом фрейма* F, если $A \cap B \subseteq P$

влечет $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$ для любых $A, B \in F$. Обозначим через pF множество всех точечных элементов из F. Для любого идеала $A \in F$ положим $p^*(A) = \{P \in pF : A \nsubseteq P\}$. Семейство множеств $\{p^*(A) : A \in F\}$ из pF образует базу (стоуновской) топологии, превращая pF в пространство, называемое *точечным спектром* полукольца S. Если в качестве F возьмем фрейм всех чистых идеалов полукольца S, то получим так называемый *чистый спектр* полукольца S.

Пусть X – топологическое пространство. *Предпучком* P S-полумодулей на X называется функция, сопоставляющая каждому открытому множеству $U \subseteq X$ S-полумодуль $P(U)$ и каждой паре открытых множеств $U \subseteq V$ – гомоморфизм $r_U^V : P(V) \to P(U)$ таким образом, что r_U^U – тождественный и $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$, если $U \subseteq V \subseteq W$. Гомоморфизмы r_U^V называются *ограничениями*, а элементы из $P(U)$ – *сечениями* предпучка P над U. Предпучок (P, X) называется *пучком* над X, если удовлетворяет условиям P1 и P2:

P1. Пусть $s, t \in P(U)$ и $\{U_\alpha\}$ — такое открытое покрытие множества U, что $r_{U_\alpha}^U(s) = r_{U_\alpha}^U(t)$ для всех α. Тогда $s = t$.

P2. Пусть $\{U_\alpha\}, \alpha \in I$, – открытое покрытие множества U и пусть элементы $s_\alpha \in P(U_\alpha)$ удовлетворяют условию $r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in I$. Тогда существует такой элемент $s \in P(U)$, что $r_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$ для всех α.

Теорема 4. *Пусть S – произвольное полукольцо, F – фрейм всех его чистых идеалов. Соответствие $p^*(A) \to End\ A$ для каждого идеала A определяет предпучок $\mathcal{F}$ полуколец над точечным спектром pF всех чистых идеалов полукольца S. Предпучок $(\mathcal{F}, pF)$ удовлетворяет условию P1. Полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений этого предпучка.*

Доказательство. Открытые подмножества пространства pF имеют вид $p^*(A)$, где $A \in F$, а $End\ A$ является полукольцом. Для доказательства первого утверждения достаточно показать существование ограничения $End\ B \to End\ A$ в том случае, когда $p^*(A) \subseteq p^*(B)$. Последнее означает $A \subseteq B$, и по предложению 3 обычное ограничение эндоморфизма $\varphi : B \to B$ на A является эндоморфизмом $\overline{\varphi} : A \to A$. Покажем, что это ограничение $r : End\ B \to End\ A, r(\varphi) = \overline{\varphi}$, есть полукольцевой гомоморфизм. Пусть $a \in A$ и $\varphi, \psi \in End\ B$. Тогда $r(\varphi + \psi)(a) = (\overline{\varphi + \psi})(a) = (\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) = \overline{\varphi}(a) + \overline{\psi}(a) = r(\varphi)(a) + r(\psi)(a)$, $r(\varphi\psi)(a) = \overline{\varphi\psi}(a) = \varphi\psi(a) = \varphi(\overline{\psi}(a)) = \overline{\varphi}(\overline{\psi}(a)) = \overline{\varphi}\overline{\psi}(a) = r(\varphi)r(\psi)(a)$.

Таким образом, $(\mathcal{F}, pF)$ – предпучок полуколец. Покажем, что он удовлетворяет условию P1. Пусть открытое множество $p^*(A)$ чистого спектра полукольца S покрыто открытыми подмножествами $p^*(A_i)$, $i \in I$, и сечения предпучка $\varphi, \psi \in End\ A$ совпадают на каждом $p^*(A_i)$, т.е. $\varphi|_{A_i} = \psi|_{A_i}$ для любого $i \in I$. Поскольку $A = \sum A_i$, то для любого $a \in A$ имеем $a = a_1 + \cdots + a_k$, для подходящих $a_i \in A_i, i \in I$. Тогда $\varphi(a) = \varphi(a_1) + \cdots + \varphi(a_k) = \psi(a_1) + \cdots + \psi(a_k) = \psi(a_1 + \cdots + a_k) = \psi(a)$. Следовательно, $\varphi = \psi$ на $p^*(A)$, и предпучок $\mathcal{F}$ удовлетворяет условию P1. Наконец, предложение 1 обеспечивает изоморфность полукольца S полукольцу всех глобальных сечений предпучка $\mathcal{F}$.

Назовем полукольцо S *коммутативным в нуле*, если равенство $ab = 0$ влечет $ba = 0$ для любых элементов $a, b \in S$.

Лемма 5. *Пусть A – чистый идеал коммутативного в нуле полукольца S. Тогда для любых элементов $a_i \in A, i = 1, \ldots, k$, найдется такой элемент $e \in A$, что $a_i e = e a_i = a_i$.*

Доказательство. Поскольку в коммутативном в нуле полукольце аннулятор является двусторонним идеалом, то из $A + Ann\, a_i = S$ получаем: $S = S^k \subseteq A + Ann\, a_1 \cdot \ldots \cdot Ann\, a_k \subseteq A + \cap_{i=1}^k Ann\, a_i$. Тогда для подходящих $e \in A$ и $r \in \cap Ann\, a_i$ имеем $e + r = 1$, откуда $a_i = a_i(e + r) = a_i e + a_i r = a_i e$ и аналогично $a_i = e a_i$.

Теорема 6. *Пусть F – фрейм всех чистых идеалов произвольного полукольца S. Тогда предпучок $(\mathcal{F}, pF)$ является пучком в каждом из следующих случаев:*

i) S – коммутативное в нуле полукольцо;

ii) S – кольцо [2, theorem 2.8]*;*

iii) фрейм F всех чистых идеалов из S является цепью.

Доказательство. i) Пусть U — открытое подмножество в pF, которое имеет вид $U = p^*(A)$ для некоторого чистого идеала A, и $\cup_{i \in I} p^*(A_i)$, $A_i \in F$, – покрытие U. Тогда $\sum_{i \in I} A_i \supseteq A$. Кроме того, пусть имеются $\varphi_i \in End\, A_i$, такие, что $\varphi_i|_{A_j} = \varphi_j|_{A_i}$ для любых $i, j \in I$. Если $x \in A$ и $x = x_1 + \cdots + x_n$, где x_i лежит в некотором A_i, то положим $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) + \cdots + \varphi_n(x_n)$. Для того чтобы φ было отображением, необходима независимость результата от представления x в виде суммы. Пусть $x = y_1 + \cdots + y_n$. Без ограничения общности мы можем считать оба представления элемента x состоящими из одинакового числа слагаемых, причем соответствующие слагаемые x_i и y_i лежат в одном идеале A_i. Элементы $x_i, y_i, \varphi_1(x_1) + \cdots +$

$\varphi_n(x_n)$ и $\varphi_1(y_1)+\dots+\varphi_n(y_n)$ чистого идеала A в силу леммы 5 обладают общей локальной единицей $e \in A$. Можно считать, что $e = e_1 + \dots + e_n$, $e_i \in A_i$. Тогда получаем: $\varphi_1(x_1)+\dots+\varphi_n(x_n) = (\varphi_1(x_1)+\dots+\varphi_n(x_n))e = \varphi_1(x_1 e)+\dots+\varphi_n(x_n e) = \varphi_1(\sum_{i=1}^n e_i x_1)+\dots+\varphi_n(\sum_{i=1}^n e_i x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_1(e_i x_1)+\dots+\sum_{i=1}^n \varphi_n(e_i x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(e_i x_1)+\dots+\sum_{i=1}^n \varphi_i(e_i x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(e_i)(x_1+\dots+x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(e_i)(y_1+\dots+y_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(e_i y_1)+\dots+\sum_{i=1}^n \varphi_i(e_i y_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_1(e_i y_1)+\dots+\sum_{i=1}^n \varphi_n(e_i y_n) = \varphi_1(e y_1)+\dots+\varphi_n(e y_n) = (\varphi_1(y_1)+\dots+\varphi_n(y_n))e = \varphi_1(y_1)+\dots+\varphi_n(y_n)$.

Очевидно, что отображение φ является эндоморфизмом S-полумодуля A. Если $s \in A_i$, то в силу определения φ получаем $\varphi(s) = \varphi_i(s)$, т.е. ограничение φ на A_i дает φ_i. Значит, выполняется P2 и $(\mathcal{F}, pF)$ является пучком.

iii) Очевидно.

Замечание. В статье [3] рассмотрено представление слабо регулярного полукольца сечениями предпучка, при этом конструкция близка к конструкции, описанной нами. Приведенное там доказательство теоремы 4.4, являющейся аналогом теоремы 6 ii), ошибочно, хотя сам результат верен.

Литература

1. Чермных В.В. Полукольца. Учебное пособие. – Киров: Изд-во ВГПУ, 1997.
2. Borceux F., Simmons H., Bossche G. Van den. A sheaf representation for modules with applications to Gelfand rings // Proc. London Math. Soc. 1984. – V. 48, N 2. – P. 230 – 246.
3. Ahsan J., Latif R., Shabir M. Representations of weakly regular semirings by sections in a presheaf // Comm. in Algebra – 1993. - 21(8). – P. 2819 2835.

ИНФОРМАТИКА

О емкости одной модели алгоритмов

В.В. Мамаев

В работе будем придерживаться терминологии, принятой в [2].

Теорема 1. [2] *Индекс спектра $Z\mathcal{F}$ — подмодели $(\hat{B})_{\text{ц}}$ ограничен сверху:*

$$Ind_M^{Z,L,\text{ц}}[B] \leqslant [(\tilde{L}+1)(L-\tilde{L}+1)]^{mn}.$$

Следствие. *Индекс спектра модели $\left(\hat{\mathfrak{M}}_G\right)_{\mathcal{F}}$ ограничен:*

$$Ind_M^{L,\text{ц}}[\mathfrak{M}_G] \leqslant (L/2+2)^{2mn}.$$

Лемма. *Индекс спектра модели $\left(\hat{\mathfrak{M}}_G\right)_{\mathcal{F}}$ в пространстве $R(n)$ ограничен:* $Ind_{R(n)}^{L,\text{ц}}[\mathfrak{M}_G] \leqslant \left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n$.

Теорема 2. *Емкость модели $\left(\hat{\mathfrak{M}}_G\right)_{\mathcal{F}}$ ограничена сверху:*

$$\Delta_M\left[\left(\hat{\mathfrak{M}}_G\right)_{\mathcal{F}}\right] \leqslant g_1(n,m,L)(L/2+2)^{2mn},$$

$$\Delta_{R(n)}\left[\left(\hat{\mathfrak{M}}_G\right)_{\mathcal{F}}\right] \leqslant g_2(n,m,L)\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n,$$

где $g_1(n,m,L)$ и $g_2(n,m,L)$ — функции от натуральных аргументов:

$$g_1(n,m,L) = 1 + (L/2+2)^{-2mn}[n + L\log_2 3 + Ln\log_2(2m(L/2+2)^{2mn}+m)+1)-1],$$

$$g_2(n,m,L) = 1 + \left(\frac{L^2 m}{4}\right)^{-n}[n + L\log_2 3 + Ln\log_2(2m\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n+m)+1)-1].$$

Доказательство. В соответствии со следствием и леммой, алгоритмами произвольной $Z\mathcal{F}$ — подмодели $\left(\hat{B}\right)_{\text{ц}}$ может быть реализовано в пространствах M и $R(n)$ не более $2^{[L/2+2]^{2mn}}$ и $2^{\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n}$ классификаций соответственно. В [2] показано, что число $Z\mathcal{F}$ — подмоделей относительно класса задач $\tilde{Z}(m,q)$ удовлетворяет неравенству $\chi(q,m,L) \leqslant 2^n 3^L (mq+1)^{Ln}$.

Из сказанного выше следует, что функция роста, определенная в [1], модели $\left(\hat{\mathfrak{M}}_G\right)_{\mathcal{F}}$ в пространствах M и $R(n)$ ограничена:

$$M: \qquad m_\tau(q) \leqslant 2^{(L/2+2)^{2mn}} 2^n 3^L (mq+1)^{Ln} \tag{1}$$

$$R(n): \qquad m_\tau(q) \leqslant 2^{\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n} 2^n 3^L (mq+1)^{Ln}$$

Следуя определению емкости [1], необходимо искать минимальное число q, такое, что $m_\tau(q+1) \neq 2^{q+1}$. Будем искать это число в виде

$$q_M = g_1(n,m,L)(L/2+2)^{2mn},$$

$$q_{R(n)} = g_1(n,m,L)\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n.$$

Воспользуемся для нахождения g_1 и g_2 неравенствами (1):

$$2^{g_1(L/2+2)^{2mn}+1} > 2^{(L/2+2)^{2mn}} 2^n 3^L (m[g_1(L/2+2)^{2mn}+1]+1)^{Ln} \geqslant m_\tau(q+1)$$

$$2^{g_2\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n+1} > 2^{\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n} 2^n 3^L \left(m\left[g_2\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n+1\right]+1\right)^{Ln} \geqslant m_\tau(q+1) \tag{2}$$

Преобразуем (2):

$$g_1(L/2+2)^{2mn}+1 > (L/2+2)^{2mn} + n + L\log_2 3 + Ln\log_2(m[g_1(L/2+2)^{2mn}+1]+1)$$

$$g_2\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n + 1 > \left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n + n + L\log_2 3 + Ln\log_2\left(m\left[g_2\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n+1\right]+1\right)$$

(3)

Неравенства (3) при $g_1, g_2 = 2$ выполняются для $L, n \geqslant 1$, $m \geqslant 2$, поэтому представляется возможным найти g_1 и g_2:

$$g_1 > 1 + (L/2+2)^{-2mn}[n + L\log_2 3 + Ln\log_2(2m(L/2+2)^{2mn}+m)+1)-1]$$

$$g_2 > 1 + \left(\frac{L^2 m}{4}\right)^{-n}\left[n + L\log_2 3 + Ln\log_2\left(2m\left(\frac{L^2 m}{4}\right)^n + m\right)+1)-1\right].$$

Литература

1.Вапник В.Н., Червоненкис А.Я. Теория распознавания образов.–М.: Наука, 1974.

2.Матросов В.Л. Емкость алгебраических расширений модели алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. — 1984. — Т. 24, № 11. — С. 1719 - 1730.

Об одной задаче по информатике

С.М. Окулов, А.Н. Семенов

Формулировка задачи. Даны натуральные числа p и q. Разработать программу определения последовательности натуральных чисел наибольшей длины (n), такой, чтобы значение суммы любых p идущих подряд элементов этой последовательности было положительно, а любых q - отрицательно.

Разумно предположить, что последовательность имеет некоторую *регулярную структуру*, то есть она не случайна. И эту регулярность следует найти. Можно считать, что значение n≥max(p,q). Случай, когда q=lp и p=tq (одно из чисел делится нацело на другое) отсекается моментально.

Сделаем два предположения: q>p (иначе просто меняем знаки у элементов последовательности); p и q взаимно просты, то есть НОД(p,q)=1. Затем результат обобщим. Рассмотрим примеры (представлены в таблице) для произвольных p и q (на последний столбец таблицы пока не обращаем внимания).

№	q	p	Схема Евклида	Последовательность	L	?
1	6	5	$6^{-}=1*5^{+}+1^{-}$	----+-|---?	9	-2 9
2	11	5	$11^{-}=2*5^{+}+1^{-}$	----+-----+-|---?	14	-3 13
3	7	5	$7^{-}=1*5^{+}+2^{-}$ $5^{+}=2*2^{-}+1^{+}$	+-+-++-|+-+?	10	-7 5
4	12	5	$12^{-}=2*5^{+}+2^{-}$ $5^{+}=2*2^{-}+1^{+}$	+-+-++-+-++-|+-+?	15	-10 7
5	8	5	$8^{-}=1*5^{+}+3^{-}$ $5^{+}=1*3^{-}+2^{+}$ $3^{-}=1*2^{+}+1^{-}$	-+--+-+-|-+-?	11	-5 8
6	13	5	$13^{-}=2*5^{+}+3^{-}$ $5^{+}=1*3^{-}+2^{+}$ $3^{-}=1*2^{+}+1^{-}$	-+--+-+--+-+-|-+-?	16	-7 11
7	9	5	$9^{-}=1*5^{+}+4^{-}$ $5^{+}=1*4^{-}+1^{+}$	+++-++++-|+++?	12	-11 3
8	14	5	$14^{-}=2*5^{+}+4^{-}$ $5^{+}=1*4^{-}+1^{+}$	+++-++++-++++-|+++?	17	-15 4

Первая строка - $q=6$, $p=5$. Схема Евклида дает условный символ «-» (назовем его базовым). Конструируем из него последовательность. Сумма пяти элементов должна быть положительна. Добавляем другой символ - «+». Сумма шести элементов - отрицательна, поэтому добавляем «-». В таблице эта часть отделена от остальной символом «|». Что происходит дальше? Три базовых элемента (повторяют начало) не меняют структуры исследуемого нами объекта. В позицию, отмеченную «?», мы не можем записать ни «-», ни «+». Запись «-» на эту позицию делает последнюю сумму из пяти элементов отрицательной. Запись «+» делает сумму из шести последних элементов положительной. Чем отличается вторая строка таблицы? Последовательность «----+» повторяется два раза (множитель 2 в схеме Евклида). Третья строка таблицы более интересна. Из базового элемента мы конструируем последовательность из двух элементов (сумма их отрицательна). Из неё мы получаем последовательность длины пять и только затем длины семь, добавляя ранее полученную последовательность длины два. Из этих же экспериментов определяется и максимальная длина L - $L=(p+q-2)$ при НОД(p,q)=1. Математическое оформление вышеописанных действий имеет следующую схему. Следует предположение о том, что $L>p+q-2$. Затем выполняются рассуждения по индукции, получается противоречие, следствием которого и является неравенство $L\le p+q-2$.

Итак, пусть мы получили последовательность (*регулярную!*) из «+» и «-». Требуется определить, какие натуральные числа соответствуют им. Должна быть ***зависимость от значений p, q и соотношения количеств «+» и «-» на различных периодах последовательности***. Обозначим через w_i число «+» на периоде t_i, тогда отношение числа «-» к числу «+» выражается $(t_i-w_i)/w_i$. Вернемся к таблице и попытаемся определить, как связаны эти отношения на соседних периодах. После некоторых усилий устанавливается следующий факт:

$(t_i-w_i)/w_i<(t_{i+1}-w_{i+1})/w_{i+1}$ при четном i и «>» при нечетном i.

Доказательство истинности этого факта приведено в приложении. Что из него следует? Пусть $t_1=q$, $t_2=p$ и $i=1$. Мы имеем неравенство $(q-w_1)/w_1>(p-w_2)/w_2$ (i -нечетно). Средневзвешенное чисел в правой и левой частях неравенства принадлежит интервалу, определяемому этими числами, то есть $(q-w_1)/w_1>(q+p-w_1-w_2)/(w_1+w_2)>(p-w_2)/w_2$. Заменим «+» на число $x=p+q-w_1-w_2$ и «-» на число $y=-(w_1+w_2)$. Из последнего неравенства получаем, что сумма любых p чисел, идущих подряд, равна $w_2*x+(p-w_2)*y>0$, а сумма любых q чисел - равна $w_1*x+(q-w_1)*y<0$. После этого можно поставить точку в рассуждениях и перейти к написанию программы.

А случай НОД(p,q)=d>1? Для значений p/d и q/d мы можем построить наш объект. Добавим между каждыми элементами построенной последовательности, а также справа и слева по (d-1) нулей. Условия положительности и отрицательности сумм выполняются, а длина равна $(p/d+q/d-2)*d+d-1$, или $p+q-d-1$. Приведем практически полный текст программного решения с необходимыми комментариями.

```
 Const Nmax= ;{максимальное значение длины последовательности}
 Var  l:boolean;{вычисление первого ненулевого знака строки S}
       p,q,{вводимые p и q, затем p/d, q/d}
       i,j,h,{вспомогательные переменные}
       d,{НОД(p,q)}
       a,b:word;{количество знаков «не l» среди p и q
последовательных знаков строки S}
       S:array[0..Nmax] of boolean;{строка знаков}
 procedure Build(p,q:word);{устанавливает знаки первых q чисел}
 var i:word;
 begin
  if q mod p=0 then begin d:=p;q:=q div d;
                          for i:=0 to q-2 do S[i]:=l;
                          S[q-1]:=not l;
                          a:=0;b:=1;
                       end
  else begin
        l:=not l; {меняем знак}Build(q mod p,p);{рекурсивно до
последней единицы}
{на выходе из рекурсии устанавливаем знаки (значения true, false) в
S и вычисляем значения a и b}
       p:=p div d; q:=q div d;
       for i:=p to q-1 do S[i]:=S[i mod p];
       h:=a;a;=b;b:=h+a*(q div p);{}
      end;
 end;
```

```
begin
 readln(p,q);
 l:=p>q;
 if l then p<->q;{меняем значения}
 Build(q mod p,p);{первый вызов}
 p:=p div d;q:=q div d;{восстанавливаем значения p и q}
 {вывод результата}
 for i:=1 to d-1 do write('0');
 for i:=0 to p+q-3 do begin
  if S[i mod p] then write('+') else write('-');
  for j:=0 to d-1 do write('0');
 end;
 writeln;
 h:=a+b*(q div p+1);
 if not l then h:=p+q-h;
 writeln('длина',(p+q-1)*d-1,';«+»=',h,'; «-»=-',p+q-h);
end.
```

Приложение

Доказательство неравенства $(t_i-w_i)/w_i<(t_{i+1}-w_{i+1})/w_{i+1}$ при i - четном и «>» при i - нечетном (i=k-1,...,1).

Шаг 1. База индукции. При i=k-1. Пусть $t_{k-1}=s*t_k+1$, где $s\in N$(N - множество натуральных чисел). Если i - четно, то k - нечетно и $w_k=t_k-1$, $w_{k-1}=s*w_k+1=s*(t_k-1)+1$. Отсюда

$(t_{k-1}-w_{k-1})/w_{k-1}=(s*t_k+1-(s*(t_k-1)+1))/(s*w_k+1)=$
$s/(s*w_k+1)<s/(s*w_k)=1/w_k=(t_k-w_k)/w_k$,

то есть неравенство выполняется.

Если i - нечетно, то k - четно и $w_k=1$. Значение $w_{k-1}=s*w_k=s$. Отсюда

$(t_{k-1}-w_{k-1})/w_{k-1}=(s*t_k+1-s)/s=(t_k-1)+1/s>t_k-1=(t_k-w_k)/w_k$,

то есть неравенство выполняется.

Шаг 2. Шаг индукции. Пусть для какого-нибудь i=k-1,...,2 выполняется неравенство и пусть $t_{i-1}=s*t_i+t_{i+1}$, тогда

$w_{i-1}=s*w_i+w_{i+1}$ и $(t_{i-1}-w_{i-1})/w_{i-1}=(s*t_i+t_{i+1}-(s*w_i+w_{i+1}))/(s*w_i+w_{i+1})=$
$(s*(t_i-w_i)+t_{i+1}-w_{i+1})/(s*w_i+w_{i+1})=$
$(((s*(t_i-w_i)/(s*w_i))*(s*w_i)+((t_{i+1}-w_{i+1})/w_{i+1})*w_{i+1})/(s*w_i+w_{i+1})$.

Таким образом, $(t_{i-1}-w_{i-1})/w_{i-1}$ есть средневзвешенное чисел $(t_i-w_i)/w_i$ и $(t_{i+1}-w_{i+1})/w_{i+1}$, поэтому лежит между ними, а значит, в силу предположения для i-1 тоже выполняется.

Функциональное соответствие стандартного линейного вязкоупругого тела и модели наследственной упругости Работнова

А.В. Семаков

Макроскопическая вязкоупругость как физическое явление может быть объяснена двояко: как память упругой среды либо как комбинация упругости и вязкости её структурных элементов. Эти подходы порождают разные модельные способы описания вязкоупругости. В то же время между этими способами описания вязкоупругости не исключается возможность проведения аналогий и установления правил соответствия. Поскольку измеряемой величиной в том и другом случае является макроскопическое время релаксации, то наследственной модели, учитывающей в явном виде распределение времени релаксации, может быть поставлена в соответствие механическая модель с δ-спектром.

В случае динамических механических испытаний сформулированная задача состоит в нахождении функционального преобразования семейства кривых механических потерь (tgδ), описываемых наследственной моделью, к единственной кривой потерь с дискретным спектром времени релаксации. Рассмотрим наследственную модель с ядром релаксации Работнова. В этом случае семейство $tg\delta_\alpha(\omega)$ описывается зависимостью

$$tg\delta_\alpha(\omega)=\frac{(E_0-E_\infty)\cdot\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{E_0\cdot\left(\omega\cdot\tau_p\right)^{1-\alpha}+E_\infty\cdot\left(\omega\cdot\tau_p\right)^{-(1-\alpha)}+(E_0+E_\infty)\cdot\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \qquad (1)$$

с положением максимума при

$$\omega_{\max}\cdot\tau_p=\left(\frac{E_\infty}{E_0}\right)^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \text{ [1, с. 84].} \qquad (2)$$

В приведенных формулах E_0 и E_∞ - соответственно, мгновенный и длительный модуль упругости, τ_p - время релаксации, ω - циклическая частота деформации, α - параметр, характеризующий ширину спектра времени релаксации.

Для решения поставленной задачи нужно указать способ выполнения преобразования семейства $tg\delta_\alpha(\omega)$, $0 < \alpha < 1$, к кривой $tg\delta_0(\omega)$ (рис.1 а). Его можно осуществить, представив в виде последовательности наглядных геометрических трансформаций. Для этого необходимо выполнить нормирование кривых по высоте максимума потерь, совмещение максимумов потерь на оси частот и последующее сжатие веера "хвостов" функции потерь для всех $\alpha \neq 0$.

Нормирование по высоте сводится к преобразованию $tg\delta_\alpha(\omega)/tg\delta_{\alpha max}$, где $tg\delta_{\alpha max}$ - максимальное значение $tg\delta_\alpha(\omega)$. В результате преобразования получаем семейство кривых $tg\delta_\alpha$ с единичной высотой максимумов (рис. 1 б).

Дальнейшие преобразования связаны с переменной $\omega\cdot\tau_p$. Диапазон изменения этой величины обычно измеряется порядками, поэтому целесообразно выполнить подстановку $\omega\cdot\tau_p = \exp(x)$. Условие максимума потерь определено соотношением

(2), поэтому совмещение максимумов на оси частот можно получить, разделив x на величину показателя степени в формуле (2): $(1-\alpha)$. Для того чтобы положение максимумов приходилось на $x = 0$, графики следует перенести вдоль оси x, добавив к x $-0{,}5\cdot\ln(E_0/E_\infty)$. В итоге на втором этапе преобразования переменная x преобразуется в

$$x' = \frac{x - 0{,}5\cdot\ln(E_0/E_\infty)}{1-\alpha}. \qquad (3)$$

Результат преобразования семейства кривых tgδ показан на рис. 1 в.

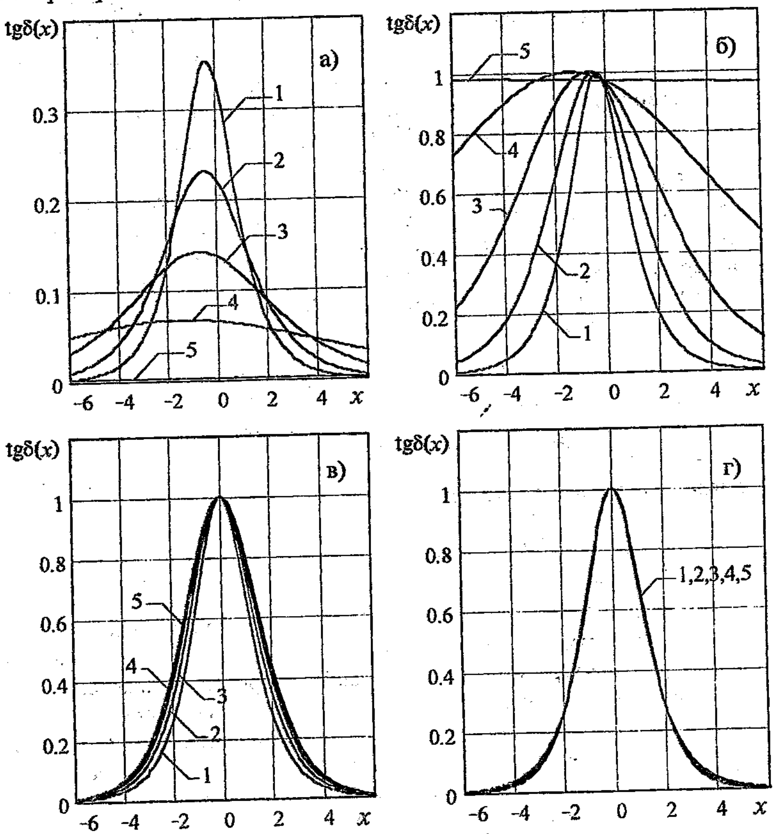

Рис. 1 Семейства $tg\delta_\alpha(x)$, полученные нормированием исходных зависимостей $tg\delta_\alpha(x)$ (а) по высоте (б), по высоте и положению максимумов (в), по высоте, положению максимумов и ширине распределения (г); α: 0 (1); 0,25 (2); 0,5 (3); 0,75 (4); 0,99 (5)

Вершины кривых совмещены, но "хвосты" функций потерь образуют значительной ширины веер значений. Как видно из рисунка, уширение кривой потерь однозначно зависит от α. Поэтому можно предположить, что окончательное преобразование кривых tgδ, отвечающих разным α, к кривой потерь с α = 0, можно осуществить, умножив x в формуле (3) на поправочную функцию, зависящую от α. Пусть эта функция представляет собой разложение в ряд по степеням параметра α. Ограничимся в разложении этой функции членом α^2

$$f(\alpha) = a\cdot\alpha^2 + b\cdot\alpha + c, \qquad (4)$$

где a, b, c - константы, подлежащие определению. Окончательное преобразование переменной x примет вид:

$$x'' = \frac{f(\alpha)\cdot x - 0{,}5\cdot\ln(E_0/E_\infty)}{1-\alpha}. \qquad (5)$$

Найти значения a, b, c можно численным способом. Для этого необходимо найти значения a, b, c, которые с минимальной погрешностью удовлетворяют системе нелинейных уравнений

$$\begin{cases} tg\delta_{norm}(x_1, \alpha_1, a, b, c) = tg\delta_{norm}(x_1, 0,0,0,1) \\ \dots \\ tg\delta_{norm}(x_i, \alpha_j, a, b, c) = tg\delta_{norm}(x_i, 0,0,0,1) \end{cases}, \; i=1,2\dots k,\; j=1,2\dots m, \qquad (6)$$

где $tg\delta_{norm}$ - функции потерь, нормированные на величину максимума. Такой поиск выполнен в интегрированной среде Mathcad с помощью процедуры Minerr(a,b,c), и получены значения: a= −0,312; b = 0,606; c = 1. Окончательный результат преобразований семейства кривых $tg\delta_\alpha(\omega)$ приведен на рис. 1 г. Из рисунка следует, что задача нахождения требуемого функционального преобразования имеет решение, и оно может быть представлено формулой (5). Оно устанавливает правило соответствия наследственной модели упругости с ядром Работнова и механической модели стандартного линейного вязкоупругого тела.

Правило соответствия моделей может быть использовано на практике при проведении динамических испытаний вязкоупругих тел. Оно позволяет использовать для этого, с полным на то основанием, простую модель стандартного линейного вязкоупругого тела. Пользуясь этой моделью, мы определяем некоторое характерное время, которое в общем случае не соответствует искомой величине - времени релаксации. Для нахождения времени релаксации следует воспользоваться преобразованием (5).

С молекулярной точки зрения макроскопическое время релаксации обусловлено элементарными актами подвижности молекулярных фрагментов. В том случае, когда подобные акты движения большого ансамбля можно считать независимыми, то связь макроскопического времени релаксации τ с микроскопическим временем элементарных актов движения τ_0 выражается формулой Аррениуса [2, с. 182]:

$$\tau = \tau_0\cdot\exp(U/RT), \qquad (7)$$

где U - энергия активации элементарных движений, T - абсолютная температура.

Полагая справедливость соотношения Аррениуса для модели вязкоупругого поведения с δ–спектром, можно уточнить формулу преобразования (5). Учитывая, что предэкспоненциальный множитель τ_0 можно определить как: $\tau_0 = 1/\omega_{max} \cdot \exp(-U/RT_{max})$, где ω_{max} , T_{max} - частота и температура при максимуме потерь, то 1.30 примет вид:

$$x'' = \frac{U \cdot \left(-0{,}312 \cdot \alpha^2 + 0{,}606 \cdot \alpha + 1\right)}{R \cdot (1-\alpha)} \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{max}}\right) + \frac{-0{,}5 \cdot \ln(E_0/E_\infty)}{1-\alpha}. \qquad (8)$$

Обратим внимание на появившийся при U сомножитель, определяемый f(α)/(1-α). Его можно рассматривать как поправку, с помощью которой следует исправить значение U, найденное по температурной зависимости tgδ, описываемой моделью стандартного вязкоупругого тела. Коррекция осуществляется в сторону увеличения U, и это понятно: в модели с δ-спектром широкому максимуму механических потерь соответствует процесс с малой энергией активации. Учет реального спектра времени релаксации требует коррекции U.

Произведение U×f(α)/(1-α) можно рассматривать также как некоторую эффективную энергию активации $U_{эфф.}$, зависящую от распределения элементарных движений по их характерным временам. Это указывает на то, что элементарные движения уже нельзя рассматривать как обособленные акты, - они зависят от окружения, в котором происходят. По этому поводу в релаксационной спектрометрии полимеров принято говорить о кооперативности молекулярных процессов. Следовательно, введением поправок к U учитывается проявление кооперативности молекулярных процессов.

Второе слагаемое в формуле (8) корректирует предэкспоненциальный множитель в формуле Аррениуса

$$\tau_0' = \tau_0 \cdot \exp\left(-\frac{0{,}5 \cdot \ln(E_0/E_\infty)}{1-\alpha}\right) \qquad (9)$$

в сторону уменьшения этой величины. Это указывает на то, что в эксперименте уширение спектра молекулярной подвижности с точки зрения модели стандартного вязкоупругого тела может внешне выглядеть как эффект завышения макроскопического времени релаксации. При его интерпретации с молекулярной точки зрения он может быть воспринят как результат увеличения размеров кинетической единицы движения. Поэтому необходима поправка (9).

Таким образом, правило соответствия моделей показывает, как надо модифицировать механическую модель, чтобы привести её в соответствие наблюдаемому вязкоупругому поведению. Оно оправдывает применение на практике простых механических моделей, конечно, с последующей коррекцией экспериментальных данных и может быть использовано для изучения молекулярных механизмов релаксации.

Литература:

1. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел.- М: Наука, 1977.
2. Бартенев Г. М., Френкель С. Я. Физика полимеров. - Л. : Химия, 1990.