ВЕСТНИК

ВЯТСКОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ВЫПУСК I

МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ФИЗИКА

1996

Вестник Вятского педагогического университета

Серия естественных наук. Выпуск 1

Научный журнал. Выходит с 1996 г.

Редакторы: Т.Н.Котельникова, Г.Д.Папырина
Технический редактор: В.И.Варанкина

Адрес редакции:
610002, г.Киров, ул.Ленина, 111, т. 67-88-60

Подписано в печать 20.11.96. Формат 60×84 1/16
Бумага газетная. Усл. п. л. 1,8
Тираж 100 экз. Заказ 194
Отпечатано на ротапринте отдела ТСО ВГПУ

Содержание

МАТЕМАТИКА

О свойствах делимости в полукольцах непрерывных функций

В.И.Варанкина

Пусть $C^+(X)$ – полукольцо всех непрерывных неотрицательных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X. Для произвольной $f \in C^+(X)$ множества $Z(f) = \{x \in X | f(x) = 0\}$ и $coz\ f = X \setminus Z(f)$ называются соответственно *нуль-множеством* и *конуль-множеством* функции f. Рассматриваются некоторые свойства делимости в $C^+(X)$.

Ассоциированность. Элементы f и g полукольца $C^+(X)$ называются *ассоциированными*, если они делят друг друга. Ясно, что f и g ассоциированы, если они отличаются на обратимый множитель, т.е. $f = gu$ для некоторого обратимого элемента $u \in C^+(X)$. Обратимость элемента $u \in C^+(X)$ равносильна тому, что $Z(u) = \emptyset$.

Предложение 1. *Элементы $f, g \in C^+(X)$ ассоциированы тогда и только тогда, когда они отличаются на обратимый множитель.*

Доказательство. Пусть $f = g\varphi$ и $g = f\psi$ для некоторых $\varphi, \psi \in C^+(X)$. Тогда $f = f(\psi\varphi)$ и $\psi\varphi = 1$ на $coz\ f$. Положим $\chi = |\psi\varphi - 1| \in C^+(X)$. Так как $Z(\varphi) \cap Z(\chi) = \emptyset$, то $u = \varphi + \chi$ – обратимый элемент полукольца $C^+(X)$. Поскольку $Z(\chi) \subsetneq coz\ f = coz\ g$, то $g\chi = 0$. Значит, $f = gu$.

НОД элементов

Предложение 2. *Пусть d – общий делитель f и g в полукольце $C^+(X)$ и $d = f\varphi + g\psi$ для некоторых $\varphi, \psi \in C^+(X)$. Тогда существуют такие $\bar\varphi, \bar\psi \in C^+(X)$, что $f\bar\varphi = f\varphi$, $g\bar\psi = g\psi$ и* НОД$(\bar\varphi, \bar\psi) = 1$.

Доказательство. Имеем $d = df_1\varphi + dg_1\psi = d(f_1\varphi + g_1\psi)$ для некоторых $f_1, g_1 \in C^+(X)$. Отсюда $f_1\varphi + g_1\psi = 1$ на $coz\ d$. Пусть

$$h = \frac{|f_1\varphi + g_1\psi - 1|}{|f_1\varphi + g_1\psi - 1| + \varphi + \psi} \in C^+(X), \quad \bar\varphi = \varphi + h \quad \text{и} \quad \bar\psi = \psi + h.$$

Тогда $Z(h) \supseteq Z(|f_1\varphi + g_1\psi - 1|) \supseteq coz\ d = coz\ f \cup coz\ g$, поэтому $fh = 0$ и $gh = 0$. Значит, $f\bar\varphi = f\varphi$ и $g\bar\psi = g\psi$. Кроме того, $Z(\bar\varphi) \cap Z(\bar\psi) = \emptyset$, т.е. $\bar\varphi + \bar\psi$ – обратимый элемент в $C^+(X)$, и, следовательно, $\bar\varphi$ и $\bar\psi$ взаимно просты.

Заметим, что для колец $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций на X предложения 1 и 2 в общем случае неверны.

Простые элементы. Ненулевой необратимый элемент $f \in C^+(X)$ называется *простым (неприводимым)*, если для любых $g, h \in C^+(X)$ из того, что f делит gh ($f = gh$), следует f делит g или f делит h (f ассоциирован с g или h).

Предложение 3. *Для произвольного элемента $f \in C^+(X)$ эквивалентны условия:*

1) f – простой;

2) f – неприводимый;

3) $Z(f)$ – одноточечное открыто-замкнутое множество.

Доказательство. Очевидно, что 1) $\Longrightarrow$ 2) и 3) $\Longrightarrow$ 1).

2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $f \in C^+(X)$ – неприводимый элемент. Из равенства $f = \sqrt{f}\sqrt{f}$ вытекает, что $\sqrt{f} = f\varphi$ для некоторого $\varphi \in C^+(X)$. Имеем $f = f^2\varphi^2$, откуда $f\varphi^2 = 1$ на $coz\ f$ и $f\varphi^2 = 0$ на $Z(f)$. Следовательно, непустое нуль-множество $Z(f)$ открыто-замкнуто. Предположим, что в $Z(f)$ имеются две различные точки x и y. В силу тихоновости X найдутся такие $g, h \in C^+(X)$, что $Z(gh) = Z(f)$, $g(x) = 1$ и $h(y) = 1$. Рассмотрим функцию $\chi \in C^+(X)$, равную 1 на $Z(f)$ и равную f/gh на $coz\ f$. Тогда $f = g(h\chi)$, но f не делит ни g, ни $h\chi$. Стало быть, открыто-замкнутое множество $Z(f)$ одноточечно.

Следствие 1. *Для любого X эквивалентны условия:*

1) в $C^+(X)$ все ненулевые необратимые элементы разлагаются на простые множители;

2) в $C^+(X)$ каждый ненулевой необратимый элемент однозначно разложим на простые множители (с точностью до обратимых сомножителей и порядка сомножителей);

3) X конечно.

Пространство X называется *P'-пространством*, если внутренность любого его непустого нуль-множества также непуста.

Следствие 2. *Каждый необратимый элемент полукольца $C^+(X)$ имеет простой делитель тогда и только тогда, когда X является P'-пространством, в котором множество изолированных точек всюду плотно.*

Условия симметричности в кольцах и полукольцах

Е.М.Вечтомов, В.В.Чермных

Коммутативные кольца составляют самостоятельный, достаточно хорошо изученный раздел теории ассоциативных колец, подобно абелевым группам в теории групп. В общей теории колец важную роль, наряду с различными условиями конечности, играют условия типа коммутативности, накладываемые на исследуемые кольца. В данной статье мы рассматриваем некоторые из таких условий – условия симметричности - для колец и полуколец.

Алгебраическая система $\langle R,+,\cdot\rangle$ называется *полукольцом*, если $\langle R,+\rangle$ – коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0, $\langle R,\cdot\rangle$ – полугруппа, имеют место дистрибутивные законы $(x+y)z = xz+yz$ и $x(y+z) = xy+xz$ и тождественно $x\cdot 0 = 0\cdot x = 0$. Полукольцо называется *кольцом*, если оно является группой относительно операции сложения. Полукольцо R называется *симметрическим* [1], если

$$\forall x,y,z,u \in R\ (xyz = xyu \Longleftrightarrow xzy = xuy). \qquad (1)$$

Полукольцо R назовем *слабо симметрическим*, если

$$\forall x,y,z \in R\ (xy = xz \Longleftrightarrow yx = zx). \qquad (2)$$

Полукольцо R назовем *сильно симметрическим*, если для любых натуральных чисел n и $i < j \leq n$ и произвольных $x_1,\dots,x_n, y \in R$

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_{i-1}x_ix_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_n = x_1\cdot\ldots\cdot x_{i-1}yx_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_n \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x_1\cdot\ldots\cdot x_{i-1}x_jx_{i-1}\cdot\ldots\cdot x_{j-1}x_ix_{j-1}\cdot\ldots\cdot x_n =$$

$$= x_1\cdot\ldots\cdot x_{i-1}x_jx_{i+1}\cdot\ldots\cdot x_{j-1}yx_{j+1}\cdot\ldots\cdot x_n.$$

Наконец, полукольцо R назовем *редуцированным* (см [1]), если

$$\forall x,y \in R\ (x^2+y^2 = xy+yx \Longrightarrow x = y). \qquad (3)$$

Замечание 1. Если условие (1) заменить эквиваленцией $xyz = uyz \Longleftrightarrow yxz = yuz$, то получим понятие *симметрического слева* полукольца, которое не равносильно симметричности. Если же в условиях (1) и (2) знак $\Longleftrightarrow$ заменить импликацией $\Longrightarrow$ или $\Longleftarrow$, то мы получим более слабые условия типа симметричности для полуколец.

Отметим следующие очевидные утверждения. Произвольное полукольцо сильно симметрично тогда и только тогда, когда оно симметрично и слабо симметрично. Всякое симметрическое полукольцо с

единицей 1 слабо симметрично. Любое слабо симметрическое полукольцо удовлетворяет квазитождествам:

$$xy = xz \Longrightarrow xuy = xuz \quad \text{и} \quad yx = zx \Longrightarrow yux = zux. \qquad (4)$$

А в симметрических (симметрических слева) полукольцах имеет место первое (второе) из квазитождеств (4).

Симметрические кольца – это в точности кольца с квазитождеством

$$xyz = 0 \Longrightarrow xzy = 0, \qquad (5)$$

а слабо симметрические кольца – это кольца с квазитождеством

$$xy = 0 \Longrightarrow yx = 0. \qquad (6)$$

Сильная симметричность кольца равносильна тому, что равенство нулю произведения любой конечной последовательности его элементов не зависит от порядка сомножителей. Редуцированность кольца означает, что в нем выполняется квазитождество $x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Замечание 2. Построим полукольцо $R = \{0,1,a,b\}$ с нулем 0 и единицей 1, в котором сложение определяется линейным порядком $0 < a < 1 < b$ по правилу $x+y = \max(x,y)$, а умножение задается равенствами $a^2 = ab = a$ и $b^2 = ba = b$. Полукольцо R не имеет делителей нуля, обладает единицей, но не является слабо симметрическим. Значит, для полуколец условия (5) и (6) являются существенно более слабыми, чем условия (1) и (2) соответственно.

Предложение 1. *Всякое редуцированное полукольцо является сильно симметрическим.*

Доказательство. Пусть R -редуцированное полукольцо, а x,y,z,u – произвольные его элементы. Если $xy = xz$, то

$$(yx)^2+(zx)^2 = y(xy)x+z(xz)x = (yx)(zx)+(zx)(yx),$$

откуда $yx = zx$. Аналогично, $yx = zx \Longrightarrow xy = xz$. Следовательно, R – слабо симметрическое.

Предположим теперь, что $xyz = xyu$. Тогда по (4) $xzyz = xzyu$ и $xzyxz = xzyxu$, а также $xuyz = xuyu$ и $xuyxz = xuyxu$. Поэтому

$$(xzy)^2+(xuy)^2 = (xzyxz)y+(xuyxu)y = (xzy)(xuy)+(xuy)(xzy),$$

откуда в силу (3) $xzy = xuy$. Совершенно аналогично проверяется справедливость квазитождества $xzy = xuy \Longrightarrow xyz = xyu$. Значит, R –

симметрическое. Полукольца, являющиеся одновременно симметрическими и слабо симметрическими, сильно симметрические.

Предложение 2. *Существует симметрическое кольцо, не являющееся ни слабо симметрическим, ни симметрическим слева.*

Доказательство. Возьмем полугруппу S с тождеством $xy = x$, содержащую не менее двух элементов. И рассмотрим полугрупповое кольцо F_2S полугруппы S над двухэлементным полем F_2. Это кольцо искомое. См. пример 1 из [2].

Предложение 3. *Существует слабо симметрическое кольцо с единицей, не являющееся симметрическим.*

Доказательство. Рассмотрим 14-элементную полугруппу

$$S = \{0, 1, a, b, c, ab, ba, ac, ca, bc, cb, abc, cab, bca\}$$

с нулем 0 и единицей 1, в которой $a^2 = b^2 = c^2 = acb = bac = cba = 0$ и все "четверные" произведения равны 0. Пусть T – произвольное коммутативное кольцо с $1 \neq 0$. Строим полугрупповое кольцо TS и берем его фактор-кольцо R по идеалу $\{t0 \mid t \in T\}$. Кольцо R имеет единицу и представляет собой свободный T-модуль с естественным 13-элементным базисом. Легко проверяется, что в R выполняется квазитождество (6). Однако $acb = 0$ при $abc \neq 0$. Если $T = F_2$, то получаем требуемое кольцо R с $2^{13} = 8192$ элементами.

В заключение укажем, что излагаемая нами тема затрагивалась также в двух дипломных работах, выполненных на кафедре алгебры ВГПУ.

Литература

1. Чермных В.В. Пучковые представления полуколец // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. - М.: МПГУ, 1993.
2. Вечтомов Е.М. Аннуляторные характеризации булевых колец и булевых решеток // Матем. заметки. - 1993. -Т. 53, N 2. - С. 15-24.

К вопросу о свойствах среднего степенного положительных чисел a и b

С.И.Калинин, З.В.Шилова

Известно, что степенно-показательное выражение вида $F_{a,b}(x) = ((a^x + b^x)/2)^{\frac{1}{x}}$, где $a > 0, b > 0, a \neq b$, называется средним степенным

порядка x чисел a и b. Очевидно, среднее арифметическое $A = \frac{a+b}{2}$ этих чисел есть их среднее степенное порядка 1, среднее гармоническое $H = \frac{2ab}{a+b}$ - среднее степенное порядка -1, а среднее квадратичное $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ - среднее степенное порядка 2. Кроме того, поскольку ([1]с.35) $\lim\limits_{x\to 0} F_{a,b}(x) = \sqrt{ab}$, то, доопределив функцию $F_{a,b}(x)$ по непрерывности в точке $x = 0$ значением $\sqrt{ab}$, можно считать, что среднее геометрическое $G = \sqrt{ab}$ чисел a и b есть их среднее степенное порядка 0. Отметим также, что функция $F_{a,b}(x)$ (с учетом доопределения в точке $x = 0$) является непрерывной и возрастающей [2] на всей числовой прямой и $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{a,b}(x) = \min(a;b)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{a,b}(x) = \max(a;b)$.

Целью настоящей работы является доказательство следующих двух свойств среднего степенного двух положительных чисел a и b.

Свойство А. *Для любого $t \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение*

$$F_{a,b}(0) = F_{F_{a,b}(-t),F_{a,b}(t)}(0), \tag{1}$$

т.е. среднее геометрическое чисел a и b является одновременно и значением среднего геометрического средних порядков $-t$ и t этих чисел.

Свойство Б. *Для любого $t \in \mathbf{R}$ справедливо соотношение*

$$F_{a,b}(t) = F_{F_{a,b}(0),F_{a,b}(2t)}(2t). \tag{2}$$

При $t = 0$ соотношения (1) и (2) очевидны. Установим их справедливость в предположении, что $t \neq 0$. Действительно, при $t \neq 0$ имеем

$$F_{F_{a,b}(-t),F_{a,b}(t)}(0) = \left(\left(\frac{a^{-t}+b^{-t}}{2}\right)^{-1/t} \cdot \left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{1/t}\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\left(\frac{2}{1/a^t+1/b^t}\right)^{1/t} \cdot \left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{1/t}\right)^{1/2} =$$

$$\left(\left(\frac{2a^tb^t}{a^t+b^T}\right)^{1/t} \cdot \left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{1/t}\right)^{1/2} = (ab)^{1/2} = F_{a,b}(0).$$

Свойство А установлено. Далее,

$$F_{F_{a,b}(0),F_{a,b}(2t)}(2t) = \left(\frac{\left((ab)^{1/2}\right)^{2t} + \left(\left(\frac{a^{2t}+b^{2t}}{2}\right)^{1/2t}\right)^{2t}}{2}\right)^{1/2t} =$$

$$= \left(\frac{(ab)^t + \frac{a^{2t}+b^{2t}}{2}}{2}\right)^{1/2t} = \left(\frac{(a^t+b^t)^2}{4}\right)^{1/2t} = \left(\frac{a^t+b^t}{2}\right)^{1/t} = F_{a,b}(t).$$

Свойство Б также установлено.

Доказанные свойства среднего степенного двух положительных чисел a и b имеют ряд следствий. Приведем два из них. Из монотонности $F_{a,b}$ и равенств (1) - (2) вытекают неравенства:

$$G < \left(\frac{(F_{a,b}(-t))^u + (F_{a,b}(t))^u}{2}\right)^{1/u}, \text{ где } u > 0,$$

$$F_{a,b}(t) > \left(\frac{G^u + (F_{a,b}(2t))^u}{2}\right)^{1/u}, \text{ где } u < 2t, t > 0, u \neq 0,$$

из которых при $t = u = 1$ получаем соответственно неравенства

$$G - H < A - G, \tag{3}$$

$$A - G > R - A \tag{4}$$

Разностные соотношения (3) - (4) классических средних и есть упомянутые следствия свойств А и Б. Они позволяют дополнить известную интерпретацию средних A, H, G и R положительных чисел a и b посредством трапеции (см., например, [3]). Напомним, что если $ABCD$ -трапеция, длины оснований которой равны a и b ($a < b$), а EF, KL, ST и MN - отрезки, параллельные основанию трапеции,такие, что EF проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции, ST -её средняя линия, KL делит трапецию на две подобные, а MN - на две равновеликие трапеции, то $EF = H, ST = A, KL = G, MN = R$.

Обратимся теперь к неравенствам (3) и (4). Из них следует, что среднее арифметическое чисел a и b отличается от среднего геометрического "более", чем последнее отличается от среднего гармонического или чем среднее квадратичное отличается от него самого. В терминах воспроизведённой интерпретации средних можно констатировать, что разность длин отрезков ST и KL превосходит значение разности длин отрезков KL и EF, а также значение разности длин отрезков MN и ST.

Литература

1. Смышляев В.К. Практикум по решению задач школьной математики. - М.: Просвещение, 1978.

2. Russel G. Connected means // Vfth. Gaz. - 1988. - V. 72, N 460. - P.97-100.
3. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства.- М.:Мир, 1965.

О формуле Гуревича

В.М.Караулов

Понятие размерности непрерывного отображения $f: X \to Y$ топологических пространств возникло в связи с формулой Гуревича $\dim X \leq \dim f + \dim X$ для непрерывного отображения бикомпактов X и Y. При этом под размерностью понималась послойная размерность, т.е.

$$\dim f = \sup\{\dim f^{-1}y : y \in Y\}.$$

Для данной формулы было получено много различных обобщений на более широкие классы пространств и отображений, но при этом, как правило, ограничивались замкнутыми отображениями нормальных пространств.

В данной работе формула Гуревича распространяется на произвольные отображения в бикомпакты и под размерностью отображения понимается "трубчатая" размерность в смысле [2]. Также рассматривается модификация "трубчатой" размерности и обобщение для этой размерности формулы Гуревича для произвольных непрерывных отображений.

Определение. Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ топологических пространств X и Y считают $\dim f \leq k$, $k = 0, 1, \cdots$, если для любых точки $y \in Y$, ее открытой окрестности U и конечного функционально открытого покрытия Ω прообраза $f^{-1}U$ существуют открытая окрестность $V \subseteq U$ точки y и конечное функционально открытое покрытие ω прообраза $f^{-1}V$, вписанное в Ω и кратности $\leq k+1$.

Теорема 1. *Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ в бикомпакт Y выполняется формула Гуревича:*

$$\dim X \leq \dim f + \dim Y.$$

Доказательство. Для $\beta f: \beta_f X \to Z = \beta f(\beta_f X) = [f(X)]_Y \subseteq Y$ — максимальной тихоновской бикомпактификации отображения f [1] - имеем $\dim \beta f = \dim f$ [2], и пространство $\beta_f X$ является стоун-чеховской бикомпактификацией пространства X [1]. Поскольку для непрерывного отображения бикомпактов и послойной размерности отображений справедлива формула Гуревича, имеем:

$$\dim \beta_f X = \dim \beta X \leq \sup\{\dim (\beta f)^{-1} y : y \in Z\} + \dim Z.$$

Но $\dim Z \leq \dim Y$ (так как Z замкнуто в Y), $\dim X = \dim \beta X$ [3], и для непрерывного отображения бикомпактов послойная размерность $\sup\{\dim (\beta f)^{-1} y : y \in Z\}$ совпадает с размерностью $\dim \beta f$. Следовательно, теорема доказана.

Следствие 2. *Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ в тихоновское пространство Y и его продолжения $F\colon X \to \beta Y$ в стоун-чеховское расширение βY выполняется формула Гуревича:*

$$\dim X \leq \dim F + \dim Y.$$

Для дальнейшего обобщения формулы Гуревича на произвольные отображения воспользуемся другим определением размерности отображения.

Определение. Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ полагаем $\mathrm{Dim}\, f \leq k$, $k = 0, 1, \cdots$, если для любых точки $y \in Y$, ее функционально открытой окрестности U и конечного функционально открытого покрытия Ω прообраза $f^{-1}U$ существуют функционально открытая окрестность $V \subseteq U$ точки y и конечное функционально открытое покрытие ω прообраза $f^{-1}V$, вписанное в Ω и кратности $\leq k+1$.

Очевидно следующее:

Предложение 3. *Для непрерывного отображения f в тихоновское пространство Y имеет место равенство:*

$$\dim f = \mathrm{Dim}\, f.$$

Так же, как и для размерности dim отображений [2], устанавливается

Теорема 4. *Для тихоновского отображения $f\colon X \to Y$ и его максимальной тихоновской бикомпактификации $\beta f\colon \beta_f X \to Y$ имеет место равенство*

$$\mathrm{Dim}\, f = \mathrm{Dim}\, \beta f.$$

Размерность Dim обладает еще одним свойством, аналогичным соответствующему свойству размерности dim, но в другой категории.

Обозначим через τ канонический функтор, действующий из категории **Top** топологических пространств и их непрерывных отображений в категрию **Tych** тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Этот функтор каждому топологическому пространству X ставит в соответствие тихоновское пространство τX и непрерывное отображение $\tau_X\colon X \to \tau X$ и каждому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение $\tau f\colon \tau X \to \tau Y$, удовлетворяющее условию: $\tau_Y \circ f = \tau f \circ \tau_X$.

Теорема 5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда*

$$\mathrm{Dim}\, f = \mathrm{Dim}\, \tau f.$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что функтор τ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между функционально открытыми множествами пространств X и τX, причем дизъюнктным функционально открытым множествам соответствуют дизъюнктные функционально открытые множества. Дальнейшее доказательство вытекает из того, что в определении размерности Dim фигурируют лишь конечные семейства функционально открытых множеств.

Теперь с помощью теорем 4, 5, их аналогов для размерности dim и формулы Гуревича для послойной размерности отображений бикомпактов формула Гуревича устанавливается в самом общем виде:

Теорема 6. *Для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ имеет место формула:*

$$\dim X \leq \mathrm{Dim}\, f + \dim Y.$$

Литература

1. Мусаев Д.К., Пасынков Б.А. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. - Ташкент: Фан, 1994.
2. Пасынков Б.А. Факторизационная теорема для когомологических размерностей отображений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. - 1991. - N 4. - С. 26–33.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.:Мир, 1986.

Главные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций

И.А.Семенова

Пусть X - произвольное топологическое пространство. Множества всех непрерывных положительных функций на X и всех непрерывных вещественнозначных функций на X образуют относительно поточечных операций сложения и умножения полуполе $U(X)$ и кольцо $C(X)$ соответственно. Операции $\vee$ и $\wedge$ тоже поточечные: $(f\wedge g)(x)=\min(f(x),g(x))$ и $(f\vee g)(x)=\max(f(x),g(x))$. Всякое неравенство для функций в данной статье подразумевается выполнимым в каждой точке X или, если указано, некоторого подмножества X. В статье рассматриваются конгруэнции на $U(X)$. *Главной конгруэнцией* ρ_0 на полуполе $U(X)$, порожденной парой (φ_1,φ_2), называется наименьшая конгруэнция, для которой $\varphi_1\rho_0\varphi_2$. Это равносильно тому, что ρ_0 порождается парой $(\varphi,1)$, где $\varphi=\varphi_1/\varphi_2$.

Теорема 1. *Главная конгруэнция ρ_0 на полуполе $U(X)$, порожденная парой $(\varphi,1)$, определяется соотношениями*

$$f\rho_0 g \iff \begin{cases} g-f\in(\varphi-1)C(X), & (1)\\ (\exists k\in\mathrm{N})\quad (\varphi\vee\varphi^{-1})^{-k}\le \dfrac{g}{f}\le(\varphi\vee\varphi^{-1})^{k} & (2)\end{cases}$$

для любых $f,g\in U(X)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что заданное отношение ρ_0 является конгруэнцией на $U(X)$ и $\varphi\rho_0 1$. Пусть теперь ρ - произвольная конгруэнция на $U(X)$, такая, что $\varphi\rho 1$, а функции f и g удовлетворяют условиям (1) и (2). Показав, что $f\rho g$, мы докажем теорему. Из условия (1) следует, что для некоторой функции $h_0\in C(X)$

$$g=f+h_0(\varphi-1). \tag{3}$$

Тогда условие (2) запишется в виде:

$$\left((\varphi\vee\varphi^{-1})^{-k}-1\right)f\le h_0(\varphi-1)\le\left((\varphi\vee\varphi^{-1})^{k}-1\right)f.$$

Имеем: $(\varphi^{-k}-1)f\le h_0(\varphi-1)\le(\varphi^{k}-1)f$ на $\varphi^{-1}((1;+\infty))$,
$(\varphi^{k}-1)f\le h_0(\varphi-1)\le(\varphi^{-k}-1)f$ на $\varphi^{-1}((0;1))$.

Из этих двух неравенств (после деления на $\varphi-1$) следует:

$$(-f)\sum_{i=-k}^{-1}\varphi^i\le h_0\le f\sum_{i=0}^{k-1}\varphi^i \quad \text{на}\quad \varphi^{-1}((0,+\infty)\setminus\{1\}). \tag{4}$$

Таким образом, условие (4) может не выполняться только для $x\in\varphi^{-1}(\{1\})$. Возьмем из $C(X)$ функцию $h=\left((-f)\sum_{i=-k}^{-1}\varphi^i\right)\vee\left(h_0\wedge f\sum_{i=0}^{k-1}\varphi^i\right)$. Так как h и h_0 совпадают на $\varphi^{-1}((0,+\infty)\setminus\{1\})$, то из (3) следует, что

$$g=f+h(\varphi-1). \tag{5}$$

Непосредственно из определения h и из (4) получаем $(-f)\sum_{i=-k}^{-1}\varphi^i\le h\le\sum_{i=0}^{k-1}\varphi^i$, откуда $(-f)\sum_{i=-k-1}^{-1}\varphi^i<h<f\sum_{i=0}^{k}\varphi^i$. Тогда для функции $\mu=\left(h+f\sum_{i=-k-1}^{-1}\varphi^i\right)/\sum_{i=-k-1}^{k}\varphi^i$ выполняется неравенство $0<\mu<f$, а так как μ непрерывна, то $\mu,(f-\mu)\in U(X)$. Поскольку $\varphi_1\rho\varphi_2$, то $1\rho\varphi$ и, значит, $1\rho\varphi^{k+1}$ и $1\rho\varphi^{-k-1}$. Откуда $\mu\rho\mu\varphi^{k+1}$ и $(f-\mu)\rho(f-\mu)\varphi^{-k-1}$. Суммируя два последних соотношения, получим: $f\rho(f+h(\varphi-1))$, так как

$$f\varphi^{-k-1}+\mu(\varphi^{k+1}-\varphi^{-k-1})=f\varphi^{-k-1}+\left(h+f\sum_{i=-k-1}^{-1}\varphi^i\right)\frac{\varphi^{k+1}-\varphi^{-k-1}}{\sum_{i=-k-1}^{k}\varphi^i}=$$

$$=f\varphi^{-k-1}+\left(h+f\sum_{i=-k-1}^{-1}\varphi^i\right)(\varphi-1)=f\varphi^{-k-1}+h(\varphi-1)+f-f\varphi^{-k-1}=$$

$=f+h(\varphi-1)$. Откуда, в силу (5), $g\rho f$. Теорема доказана.

Топологическое пространство X называется *псевдокомпактным*, если любая функция из $C(X)$ ограничена. Конгруэнция ρ на $U(X)$ называется *идеальной*, если существует такой идеал I кольца $C(X)$, что $f\rho g\iff f-g\in I$ для любых $f,g\in U(X)$.

Теорема 2. *Если X - произвольное псевдокомпактное пространство, то любая конгруэнция на полуполе $U(X)$ идеальна.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любая главная конгруэнция на $U(X)$ идеальна. Пусть дана главная конгруэнция ρ_0 на $U(X)$, порожденная парой $(\varphi,1)$. Возьмем произвольные $f,g\in U(X)$, для которых $g-f\in(\varphi-1)C(X)$. На основании теоремы 1 для идеальности конгруэнции ρ_0 остается проверить выполнение условия (2). Для этого положим $h=g/f$ и $\tau=\varphi\vee\varphi^{-1}$. Тогда $h-1=a(\varphi-1)$ для некоторой функции $a\in C(X)$.

Пусть $A=\{x\in X\ :\ \varphi(x)\ge1\}$. Тогда $\tau=\varphi$ на А, и в силу псевдокомпактности X найдется $l\in\mathbf{N}$, для которого $a\le\sum_{i=0}^{l-1}\varphi^i$. Умножив это неравенство на $\varphi - 1 > 0$, получим $h - 1 = a(\varphi - 1) \leq \varphi^l - 1 = \tau^l - 1$ на A.

На множестве $X \setminus A$ имеем $\varphi^{-1} > 1$ и $\tau = \varphi^{-1}$. Так как X псевдокомпактно, то найдется $m \in \mathbf{N}$, для которого $-a\varphi \leq \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi^{-i}$. Умножив данное неравенство на $\frac{1-\varphi}{\varphi} > 0$, получим $h - 1 = -a(1 - \varphi) = a(\varphi - 1) \leq \varphi^{-m} - 1 = \tau^m - 1$ на $X \setminus A$. При $p = \max(l, m)$ неравенство $h \leq \tau^p$ выполняется на всем X.

Докажем сейчас неравенство $(\varphi \vee \varphi^{-1})^{-q} \leq f$. Так как $h - 1 = a(\varphi - 1)$, то $h^{-1} - 1 = \dfrac{-a}{f}(\varphi - 1)$. По доказанному выше найдется $q \in \mathbf{N}$, для которого $h^{-1} \leq \tau^q$ на всем X.

Возьмем $k = \max(p, q)$. Тогда на X имеет место двойное неравенство $\tau^{-k} \leq h \leq \tau^k$. Теорема доказана.

Замкнутые идеалы в полукольцах непрерывных функций с топологией поточечной сходимости

М.Н.Смирнова

Пусть S – топологическое полукольцо. Через $C_p(X, S)$ обозначим топологическое полукольцо всех непрерывных S-значных функций на топологическом пространстве X относительно поточечных операций и топологии поточечной сходимости.

Опишем замкнутые идеалы в $C_p(X, S)$ для S-отделимого пространства X. Топологическое пространство X называется *S-отделимым*, если для любых различных $x_1, x_2 \in X$ в $C_p(X, S)$ найдется функция f, для которой $f(x_1) = 1$ и $f(x_2) = 0$.

Пусть I – правый идеал в $C_p(X, S)$ и $x \in X$. Множество $I[x] = \overline{\pi_x(I)}$, где $\pi_x : C_p(X, S) \to S$ определено формулой $\pi(f) = f(x)$ для всех f из $C_p(X, S)$, является замкнутым правым идеалом в S. Через $\overline{A}$ обозначаем замыкание подмножества A в соответствующем топологическом пространстве.

Предложение. *Пусть X - S-отделимое пространство и I – правый идеал полукольца $C_p(X, S)$. Для замкнутости I необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$I = \bigcap_{x \in X} \pi_x^{-1}(I[x]).$$

Доказательство. Достаточность очевидна.

Пусть I – замкнутый правый идеал в $C_p(X, S)$. Ясно, что $I \subseteq \bigcap\limits_{x \in X} \pi_x^{-1}(I[x])$.

Рассмотрим $f \in \bigcap\limits_{x \in X} \pi_x^{-1}(I[x])$. Возьмем произвольную стандартную окрестность U элемента f в пространстве $C_p(X, S)$

$$U = U(x_1, ..., x_n; U_1, ..., U_n) = \{h \in C_p(X, S) : h(x_i) \in U_i\},$$

где $x_i \in X$ и U_i – открытые множества в S при $i = 1, 2, ..., n$. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ $f(x_i) \in U_i \bigcap I[x_i]$. Так как $U_i \bigcap I[x_i] \neq \Omega$, то и $U_i \bigcap \pi_x(I) \neq \Omega$. Это означает, что для любого $i (i = 1, 2, ..., n)$ в I существует функция g_i, обладающая свойством $g_i(x_i) \in U_i$. Ввиду S-отделимости X, для любой пары индексов $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, ..., n)$ в $C_p(X, S)$ найдется функция h_{ij}, такая, что $h_{ij}(x_i) = 1$ и $h_{ij}(x_j) = 0$. Тогда функция $h_i = \prod\limits_{j \neq i} h_{ij}$ в точке x_i имеет значение 1 и $h_i(x_j) = 0$ для любого $j \neq i$. Рассмотрим функцию $g = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i h_i \in I$. Так как $g(x_i) \in U_i$ для любого $i = 1, 2, ..., n$, то $g \in U$. Следовательно, в любой окрестности функции f нашлась функция из I. Это означает, что $f \in \overline{I} = I$.

Пусть теперь точка 0 замкнута в S. Для множества $A \subseteq X$ рассмотрим в $C_p(X, S)$ идеал $M_A = \{f \in C_p(X, S) : A \subseteq Z(f)\}$, где $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ – нуль-множество функции f. При введенном условии для S множество $Z(f)$ замкнуто в X для любой $f \in C_p(X, S)$. Идеал $M_A = M_{\overline{A}}$ является замкнутым идеалом в $C_p(X, S)$.

Топологическое полукольцо S называется *простым,* если единственным замкнутым собственным идеалом в S является нулевой идеал.

Теорема 1. *Пусть S – простое топологическое полукольцо и X – S-отделимое пространство. Тогда замкнутые идеалы в $C_p(X, S)$ – это в точности идеалы вида M_A для всевозможных замкнутых $A \subseteq X$.*

Доказательство. Пусть S – простое топологическое полукольцо и I – замкнутый идеал в $C_p(X, S)$. Тогда для произвольной точки $x \in X$ идеал $I[x]$ может быть либо нулевым, либо самим S. Согласно предложению $I = \bigcap\limits_{x \in X} \pi_x^{-1}(I[x]) = \bigcap\limits_{x \in A} \pi_x^{-1}(0)$, где $A = \{x \in X : I[x] = 0\} = \{x \in X : f(x) = 0$ для всех $f \in I\} = \bigcap\limits_{f \in I} Z(f)$ – замкнутое подмножество в X. Получаем $I = \bigcap\limits_{x \in A} \pi_x^{-1}(0) = \{f \in C_p(X, S) : A \subseteq Z(f)\} = M_A$ для замкнутого $A \subseteq X$.

Хаусдорфово пространство X называется *S-тихоновским,* если для любого замкнутого $A \subseteq X$ и любой точки $x \in X \setminus A$ найдется $f \in C_p(X,S)$, для которой $f(A) = \{0\}$ и $f(x) = 1$.

Собственный правый идеал P полукольца называется *простым*, если $ab \in P$ влечет $a \in P$ или $b \in P$ для любых элементов a и b полукольца.

Теорема 2. *Пусть X - S-тихоновское пространство и I - правый идеал топологического полукольца $C_p(X,S)$. Тогда I замкнут и прост в том и только том случае, когда $I = \pi_x^{-1}(p)$ для однозначно определенных точки $x \in X$ и замкнутого простого правого идеала $p \subset S$.*

Доказательство. Достаточность очевидна.

Пусть I - замкнутый простой правый идеал в $C_p(X,S)$. Тогда найдется такая точка $x \in X$, что $I[x] \neq S$, иначе по предложению $I = C_p(X,S)$. Если отличная от x точка $y \in X$ обладает этим же свойством, то ввиду S-тихоновости X в $C_p(X,S)$ существуют такие функции f и g, что $f(x) = 1$, $g(y) = 1$ и $fg = 0$, что противоречит простоте I. Значит, по предложению $I = \pi_x^{-1}(I[x])$, и $\pi_x[I] = I[x]$ - замкнутый простой правый идеал в S.

Эта теорема обобщает теорему 1 из [1].

В следствиях 1-4 предполагаем, что S - простое топологическое полукольцо, а X - S-тихоновское пространство.

Следствие 1. *Для любого замкнутого идеала I в $C_p(X,S)$ существует однозначно определенное замкнутое подмножество $A \subseteq X$, такое, что $I = M_A$.*

Следствие 2. *Решетка всех замкнутых идеалов полукольца $C_p(X,S)$ изоморфна решетке всех открытых множеств пространства X.*

Следствие 3. *Пространство X определяется как самим топологическим полукольцом $C_p(X,S)$, так и решеткой всех его замкнутых идеалов.*

Следствие 4. *Замкнутые простые идеалы в $C_p(X,S)$ - это в точности идеалы $\pi_x^{-1}(0)$ по различным $x \in X$.*

Литература

1. Вечтомов Е.М., Смирнова М.Н. Одна двойственность для топологических полуколец непрерывных функций // Успехи матем. наук. - 1996. - Т. 51, N 3. - С. 187-188.

Ламбековское представление полуколец

В.В.Чермных

В работе Ламбека [1] построена конструкция пучка колец и доказана изоморфность произвольного кольца с 1 кольцу глобальных сечений этого пучка, что обобщает им же доказанное представление симметрических колец.

Пусть S — произвольное полукольцо, T — такое его подполукольцо, что для любых $a, b, c \in S$ и $t \in T$

$$abt = act \Longleftrightarrow atb = atc. \qquad (1)$$

Ясно, что T является симметрическим полукольцом.

Через $Spec\ T$ обозначим первичный спектр полукольца T — пространство всех первичных идеалов из T со стоуновской топологией с открытыми множествами вида $D(A)$, где A — идеал из T. Для каждого $P \in Spec\ T$ определим отношение Θ_P, для любых элементов $a, b \in S$ положив,

$$a\Theta_P b \Longleftrightarrow (\exists c \in T \setminus P)(ac = bc).$$

Отметим, что *отношение Θ_P является конгруэнцией на полукольце S.*

Пусть X — топологическое пространство, $\{\rho_x\}, x \in X,$ — семейство конгруэнций на полукольце S, индексированных точками из X. Семейство конгруэнций $\{\rho_x\}, x \in X$, на S называется *открытым*, если для любых $a, b \in S$ множество $\{x \in X : a\rho_x b\}$ открыто в X. Несложно убедиться, что конгруэнции $\Theta_P, P \in Spec\ T$ образуют открытое семейство. Значение открытых семейств состоит в возможности построения пучков, в частности *дизъюнктное объединение $\dot{\cup} S/\Theta_P, P \in Spec\ T$, является пучком полуколец над пространством $Spec\ T$.*

Теорема. *Произвольное полукольцо S изоморфно полукольцу глобальных сечений пучка $\dot{\cup} S/\Theta_P$ над $Spec\ T$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение f, которое элементу $s \in S$ ставит в соответствие глобальное сечение $\hat{s}$, такое, что $\hat{s}(P) = [s]_P$, где $[s]_P$ — класс элемента s в фактор-полукольце S/Θ_P.

Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ для произвольных $a, b \in S$. Это означает, что для каждого $P \in Spec\ T$ выполняется $ac_P = bc_P$ для подходящего $c_P \in T \setminus P$. Из покрытия $D(c_P)$ в силу компактности спектра выберем конечное подпокрытие. Тогда

$$D(c_1) \cup \ldots \cup D(c_m) = D(\sum_{i=1}^{m} Tc_iT) = Spec\ T,$$

откуда получаем, что сумма идеалов Tc_iT совпадает с T. Для некоторых $s_i, t_i \in T$ получаем $s_1c_1t_1 + \ldots + s_mc_mt_m = 1$, и по (1) из $ac_i = bc_i$ следует $as_ic_it_i = bs_ic_it_i$ для каждого $i = 1, \ldots, m$. Просуммировав эти равенства, получим $a(s_1c_1t_1 + \ldots + s_mc_mt_m) = b(a_1c_1t_1 + \ldots + a_mc_mt_m)$ или $a = b$, что доказывает точность представления f.

Покажем его полноту. Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка $\dot{\cup} S/\Theta_P$. В силу факторности пучка сечение σ в каждой точке $P \in Spec\ T$ совпадает с некоторым сечением вида $\hat{a}_P$. По свойствам пучка эти сечения совпадают на некоторой базисной окрестности точки P, а компактность первичного спектра позволяет выбрать элементы $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in S$ так, что $\sigma = \hat{a}_i$ на $D(b_i)$ и $\cup D(b_i) = Spec\ T$. Для любых $i, j = 1, \ldots, m$ $\hat{a}_i = \hat{a}_j$ на множестве $D(b_i) \cap D(b_j)$, а значит, и на его подмножестве $D(b_ib_j)$. Покажем, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$, зависящего от i, j, справедливо равенство

$$a_i(b_ib_j)^n = a_j(b_ib_j)^n. \qquad (2)$$

Рассмотрим множество $F = \{1, b_ib_j, (b_ib_j)^2, \ldots\}$ и идеал $(a_i a_j)^* = \{s \in S : a_is = a_js\}$ — уравнитель элементов a_i, a_j. Если $(a_i, a_j)^*$ пересекается с F, то верно равенство (2). Предположим, что $(a_i, a_j)^* \cap F = \Omega$. Рассмотрим наибольший идеал P, содержащий $(a_i, a_j)^*$ и не пересекающийся с F, и покажем, что он первичен. Пусть $s, t \in S \setminus P$. Тогда $P + (s)$ и $P + (t)$ пересекаются с F, а так как F мультипликативно замкнуто, то $(P + (s))(P + (t))$ будет пересекаться с F. Но $(P + (s))(P + (t)) \subseteq P + (s)(t)$, откуда $(s)(t)$ не лежит в P и, следовательно, P первичен. Таким образом, $(a_i, a_j)^* \subseteq P$, что означает несравнимость a_i и a_j по конгруэнции Θ_P и поэтому $P \notin D(b_ib_j)$. Но тогда $b_ib_j \in P$, и получено противоречие после предположения, что $(a_i, a_j)^* \cap F = \Omega$. Значит, справедливо (2). Положим, n — показатель, удовлетворяющий (2) для всех пар (i, j). Заметим, что для некоторого набора $u_i \in S$ справедливо равенство

$$D(b_j) = D(b_ju_1b_ju_2 \ldots u_{n-1}b_j).$$

Для каждого $j = 1, \ldots, m$ положим $c_j = b_ju_1 \ldots u_{n-1}b_j$. Из (2) с помощью (1) получаем

$$a_ic_ic_j = a_jc_ic_j. \qquad (3)$$

Поскольку $\cup D(c_i) = Spec\ T$, то для некоторых $s_i, t_i \in S$ имеем $s_1c_1t_1 + \ldots + s_mc_mt_m = 1$. Пусть $a = a_1s_1c_1t_1 + \ldots + a_ms_mc_mt_m$. Покажем, что $\sigma = \hat{a}$. Равенство (3) влечет $a_is_ic_it_ic_j = a_js_ic_it_ic_j$, и, просуммировав обе части по i, получаем

$$ac_j = \sum_{i=1}^{m} a_is_ic_it_ic_j = \sum_{i=1}^{m} a_js_ic_it_ic_j = a_j(\sum_{i=1}^{m} s_ic_it_i)c_j = a_ic_j.$$

Таким образом, $\hat{a} = \hat{a}_j = \sigma$ на $D(b_j)$ для любого $j = 1, \ldots, m$, и, следовательно, $\sigma = \hat{a}$ во всех точках $Spec\ T$. Теорема доказана.

Как следствия полученного результата вытекают ламбековские представления симметрических колец [1] и полуколец [2] и представление Корниша для ограниченных дистрибутивных решеток.

Литература

1. Lambek I. On representation of modules by sheaves of factor modules // Canad. Math. Bull. - 1971. - 14, N 3. - P. 359—368.

2. Чермных В.В. Пучковые представления полуколец // Успехи матем. наук. - 1993. - Т. 48, N 5. - С. 185-186.

Олимпиадная информатика

С.М.Окулов

За последние четыре года (1993-1996) школьники Кировской области достигли значительных результатов на олимпиадах по информатике. В их копилке семь дипломов первой степени и один второй на Российских олимпиадах, абсолютное первое место на Российской олимпиаде в 1994 году, две золотые, одна серебряная и две бронзовые медали на Международных олимпиадах.

Информатика, как и любая другая наука, многогранна. Разумеется, она не исчерпывается программированием задач. Однако ведущие компьютерные фирмы внимательно "отслеживают" участников этих олимпиад, особенно победителей. Интерес вполне объясним - это кадры, причем не просто знающие компьютер в совершенстве, а умеющие находить нестандартное решение проблем и претворять их в конечный результат. А для этого необходимо иметь хорошо поставленное аналитическое мышление.

Итак, каким образом "ставится" аналитическое мышление? Синтез математики и информатики - способ достижения этой цели. Коротко остановимся на тех разделах математики, которыми должен владеть "олимпиадник". *Комбинаторика:* подсчет комбинаторных конфигураций; комбинаторика конечных множеств; перечислительные задачи комбинаторного анализа. *Теория графов:* алгоритмы определения связности; кратчайшие пути; циклы; паросочетания и потоки в сетях. *Искусственный интеллект:* перебор и методы его сокращения (динамическое программирование, метод ветвей и границ, метод "решета", градиентные методы и т.д.); методы распознавания образов. *Элементы теории формальных языков и абстрактных автоматов* (введение в теорию формальных грамматик и элементы теории перевода). *Геометрия на плоскости:* преобразования; определение свойств фигур и т.д.

Принципиальным моментом владения этим материалом является не просто его знание, а умение находить его в практических задачах и доводить решение до работающей программы за ограниченное время. В качестве примера приведу две задачи летнего отборочного тура этого года, на решение которых отводилось четыре часа.

Есть рычажные весы и набор гирь массами 1, 3, 9, 27, ..., 3^{N-1} *кг, каждая в единственном экземпляре. На левый рычаг весов кладется предмет массой* M *кг*
$(0 \le M \le 3^{N-1})$. *Требуется распределить гири на весах так, чтобы был достигнут баланс.*

Имеется взвешенный орграф без циклов отрицательной длины. Требуется найти число Q *кратчайших путей между двумя заданными его вершинами.*

ФИЗИКА

Теория графов и размерности физических величин

В.Н.Бакулин

Любая физическая величина может быть представлена в виде произведения ее числового значения и единицы измерения или размерности: $A = \{A\}[A]$. Все действия над ними производятся согласно алгебраическим правилам [1]. Поскольку связи между основными и производными величинами являются степенными выражениями, то показатели степени x, y, z, u в формулах размерности $[A] = M^x L^y T^z I^u$ - рациональные числа. Международная система измерения единиц СИ отличается тем, что эти показатели целочисленные. В линейном пространстве размерностей каждой физической величине отвечает свой вектор, проведенный из начала координат [2]. Операциям умножения и деления физических величин соответствуют операции сложения и вычитания векторов их размерностей.

Простым физическим моделям соответствует конечный набор формул, связывающих определяющие их физические величины, и полный ориентированный граф в пространстве размерностей, в котором каждой формуле отвечает свой подграф в виде полного трехвершинного графа. Так, распространенным в физике квадратичным зависимостям энергетических или кинетических величин вида $(v = at, 2s = at^2 = v^2/a = vt)$, $(p = mv, 2E = mv^2 = p^2/m = pv)$ и т.п. соответствуют графы с четырьмя вершинами в виде параллелограмма с диагоналями. В пространстве размерностей все графы размерностей соответствующих величин лежат в одной плоскости.

Эффективность теории размерностей при восстановлении или выводе формул основана именно на возможности восстановления графа модели явления, если мы сумели правильно выбрать исходный набор линейно независимых его составляющих.

Если в качестве узлов графа взять концы векторов размерностей, то порядок графа размерностей можно понизить на единицу. Матрица смежности такого орграфа позволяет восстановить все зависимости между исходными величинами: произведение величины в начале ребра на величину, соответствующую ребру, дает величину, стоящую в конце.

Использование орграфов в педагогической практике позволяет перечислить все возможные задачи расчетного типа по данной модели и оценить степень их сложности, а также определить минимальный набор формул для запоминания, который необходим для того, чтобы решить любую задачу в рамках данной физической модели. В моделях приведенного выше типа достаточно знать любые две формулы из четырех, чтобы решить любую из 12 видов различных задач. При этом 6 видов задач решаются подстановкой данных в известные формулы, а остальные 6 требуют решения системы уравнений из этих двух формул. Использование матриц смежности и орграфов существенно упрощает алгоритмы генераторов задач в учебных программах для ЭВМ.

Литература

1. Чертов А. Г. Физические величины. - М.: Наука, 1990.
2. Clau D. L. Unified dimensions display // Wireless world. - 1973. - V. 79.

Об основах термодинамики

П.Я.Кантор

Ситуация, сложившаяся в настоящее время с физической трактовкой первого начала термодинамики как в вузовской, так и в школьной методике, представляется нам несколько противоречивой по следующим причинам.

1. Наиболее распространенная математическая формулировка этого закона $\Delta U = Q + A$ (1), где ΔU - изменение внутренней энергии тела, Q - сообщенная ему теплота, A - совершенная над ним механическая работа, не является универсальной, ибо справедлива только при достаточно жестком дополнительном условии. Именно работа не должна приводить к изменению механического состояния тела как целого, т.е. перемещение, производимое при совершении работы, сводится исключительно к деформации тела. К сожалению, в целом ряде широко распространенных пособий (например, [1] - [3]) это обстоятельство четко не оговаривается. Неучет указанного условия может приводить к абсурдным результатам: например, можно сделать вывод, что при достаточно быстром (адиабатном) торможении любое тело должно охлаждаться, так как работа силы трения и, стало быть, изменение внутренней энергии будут при этом отрицательными и, соответственно, температура тела понизится. Указанное условие является весьма жестким, так как исключает из сферы компетенции термодинамики принципы действия таких устройств, как реактивный двигатель, газотурбинный агрегат, ибо полезным эффектом этих устройств (конечным или промежуточным) является сообщение кинетической энергии газу за счет теплоты сгорания топлива, т.е. процесс идет принципиально с изменением кинетической энергии тел. Кроме того, указанное ограничение создает трудности с рассмотрением физического механизма функционирования второго начала термодинамики, потому что значительная часть энергии может отдаваться тепловой машиной окружающей среде именно в виде кинетической энергии выхлопного газа.

2. Требует уточнения физическое содержание понятия " внутренняя энергия ". Сегодня, когда молекулярно-кинетические представления стали общепринятыми, феноменологический способ введения этого понятия [1], [4] лишен смысла, тем более что, как отмечено в [1], он не является универсальным. Сводить же внутреннюю энергию только к кинетической энергии хаотического теплового движения атомов или молекул и потенциальной энергии их взаимодействия, как это сделано, например, в [3], недопустимо, ибо такая трактовка по существу исключает из рассмотрения процессы выделения теплоты в результате горения или ядерной реакции, поскольку термин " количество теплоты " при таком подходе означает не что иное, как энергию, переданную телу окружающей средой в результате теплообмена, тогда как в указанных процессах никакого теплообмена не происходит, а теплота возникает " изнутри " самой термодинамической системы. Указанные несуразности, по нашему мнению, возникают вследствие исторической традиции. Так, приведенная выше математическая формулировка первого начала термодинамики имела своей целью указать на энергетическую эквивалентность теплопередачи и механической работы, что на сегодняшний день в связи с абсолютным укоренением молекулярно-кинетических представлений является совершенно очевидным. Отсюда следует, что в настоящее время подход к трактовке основных понятий термодинамики требует онтодидактического переосмысления, аналогично тому, как в классической механике было переосмыслено физическое содержание I закона Ньютона.

В общих чертах предлагаемый нами подход сводится к следующему.

Внутренняя энергия вводится как энергия, заключенная внутри тела (термодинамической системы). Так как это понятие является для термодинамики основным, ничего более общего о нем сказать нельзя; можно только привести ряд примеров, демонстрирующих наличие у тела внутренней энергии. Далее имеет смысл указать, что во внутренней энергии можно выделить несколько аддитивных частей, проявляющих себя в процессах, различающихся прежде всего характерными пространственными масштабами. К ним относятся:

– тепловая энергия (U_t), связанная с движением и взаимодействием атомов и молекул или их фрагментов, при которых эти структурные элементы не теряют своей индивидуальности;

– химическая энергия (U_c), которая связана с электронами внутри атомов и молекул и которая может превращаться в тепловую (и обратно) в результате химических реакций, например горения;

– ядерная энергия (U_n), связанная с нуклонами внутри ядер и могущая превращаться в химическую и тепловую в ядерных и термоядерных реакциях.

Остаток внутренней энергии, составляющий более 99,9 % от ее полного количества, в случаях макроскопических систем никак себя не проявляет и поэтому может быть исключен из рассмотрения, тем более что в термодинамике физический смысл имеют, как правило, изменения соответствующих энергий, а не их абсолютные значения. Таким образом, можно принять, что $U = U_t + U_c + U_n$ (**2**).

Первое начало термодинамики предлагается сформулировать так: "Полная энергия замкнутой системы, равная сумме кинетической (K), потенциальной (P) и внутренней (U) энергий, сохраняется ", т.е. $E = K + P + U = const$ (**3**). Такой подход позволяет адекватно описывать все без исключения термодинамические процессы. Приведем примеры.

1) " Классическая " формулировка первого начала термодинамики.

Пусть замкнутая система состоит из двух подсистем 1 и 2, которые могут обмениваться теплом, испытывать силовое взаимодействие, но не совершают значительных вертикальных, а подсистема 1 (например, газ в цилиндре), кроме того, и горизонтальных перемещений. Тогда (3) может быть записано в следующем виде: $\Delta K_1 + \Delta K_2 + \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$, или, учитывая, что $\Delta K_2 = A'$, $\Delta U_2 = -Q$ и, кроме того, при указанных ограничениях $\Delta P_1 = \Delta P_2 = \Delta K_1 = 0$, $Q = \Delta U_1 + A'$, т.е. нами получена формула, эквивалентная (1), в которой работа A, совершенная над подсистемой, заменена работой A' самой подсистемы 1.

2) Ракетный двигатель.

Подсистема А – топливо с окислителем, подсиcтема В – оболочка ракеты. Внутреннюю энергию подсистемы А представляем как $U_A = U_{cA} + U_{tA}$, тогда, считая, что ракета движется вне полей тяготения, записываем (3) в виде $\Delta K_A + \Delta U_{cA} + \Delta U_{tA} + \Delta K_B = 0$ (**4**). После введения обозначений: $rm = -\Delta U_{cA}$ – теплота сгорания топлива и $Q_2 = \Delta K_A + \Delta U_{tA}$ – энергия, отданная окружающей среде, физический смысл (4) становится очевидным: $rm = \Delta K_B + Q_2$, т.е. теплота сгорания ракетного топлива частично расходуется на ускорение ракеты и частично отдается окружающей среде в виде энергии отработанных газов.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. – М.: Наука, 1979.
2. Савельев И.В. Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика.– М.: Наука, 1989.
3. Физика: Учеб. пособие для 10 кл. и классов с углубл. изуч. физики / Под ред. А.А.Пинского. – М.:Просвещение, 1993.
4. Свитков Л.П. Методологические основы системы знаний и методов преподавания термодинамики и молекулярной физики в средней школе // Дис. ... докт. пед. наук. - М.: МПГУ, 1995.

Научный алгебраический семинар

Е.М.Вечтомов

С сентября 1994 г. на математическом факультете работает научный алгебраический семинар, выросший на основе алгебраического кружка.Состоялось более 60 заседаний семинара, по 12-13 в семестр. Занятия проводятся еженедельно. Ведущая тематика семинара тесно связана с научным направлением "Функциональная алгебра: кольца и полукольца функций", разрабатываемым кафедрой алгебры.

Каждое занятие алгебраического семинара собирает около 15 человек: преподаватели, аспиранты и студенты математического факультета. Заседания проходят в форме докладов и сообщений научного, учебно-исследовательского и методического характера.

Лицо научного алгебраического семинара определяется, конечно, научными докладами. Перечислим их.

Осенний семестр 1994-1995 учебного года

Е.М.Вечтомов. Полукольца матриц.

В.В.Чермных. Пучки колец и полуколец.

В.И.Варанкина. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций.

Весенний семестр 1994-1995 учебного года

Е.М.Вечтомов. Абелево регулярные положительные полукольца (серия докладов).

В.В.Чермных. Пучковые характеризации некоторых полукольцевых свойств.

Е.М.Вечтомов. Конгруэнции на полутелах.

Осенний семестр 1995-1996 учебного года

Е.М.Вечтомов. Арифметические полугруппы (три доклада).

В.В.Чермных. О полноте пучковых представлений полуколец (два доклада).

Е.М.Вечтомов. Булевы полукольца.

В.И.Варанкина. Делимость в полукольцах непрерывных неотрицательных функций.

М.Н.Смирнова. Замкнутые простые идеалы в топологических дистрибутивных решетках непрерывных функций.

Весенний семестр 1995-1996 учебного года

Е.М.Вечтомов. Решетка подалгебр колец непрерывных функций (цикл докладов).

В.И.Варанкина. Мультипликативные НОД-полугруппы неотрицательных чисел.

М.Н.Смирнова. Двойственность для топологических полуколец непрерывных функций с топологией поточечной сходимости.

И.А.Семенова. Максимальные конгруэнции на полукольцах непрерывных функций.

В.В.Чермных. Пирсовское представление полуколец.

В.М.Караулов. О размерности непрерывных отображений.

Е.М.Вечтомов. Проблемы теории колец и полуколец непрерывных функций.

Осенний семестр 1996-1997 учебного года (начало)

И.А.Семенова. Главные конгруэнции на полуполях непрерывных положительных функций.

М.Н.Смирнова. Замкнутые идеалы в полукольцах непрерывных функций.

В.И.Варанкина. Об элементарной делимости в полукольцах непрерывных функций.

Е.М.Вечтомов. О подалгебрах полуколец непрерывных функций.

Ряд учебно-исследовательских докладов сделали студенты-математики разных курсов Е.Лукиных, А.Елин, А.Ряттель, Г.Баташев, И.Богдалов, А.Суслопаров, О.Малых, В.Зязев и др.

Научный алгебраический семинар венчает собой систему алгебраического образования на математическом факультете Вятского госпедуниверситета. Он базируется на основном курсе "Алгебра и теория чисел", читаемом 7 семестров, на алгебраических спецкурсах (по выбору студентов), курсовых и дипломных работах, студенческой математической конференции (секция алгебры), индивидуальной научно-исследовательской работе студентов и преподавателей. Кроме того, в текущем учебном году организованы лекции по алгебре в рамках кандидатского минимума для аспирантов, заинтересованных студентов и преподавателей.

Руководители научного алгебраического семинара – доктор физ.-матем. наук, профессор Е.М.Вечтомов и кандидат физ.-матем. наук, доцент В.В.Чермных – приглашают всех, интересующихся современной математикой, принять участие в семинаре (подробнее о его работе можно узнать на кафедре алгебры ВГПУ).

В качестве информации отметим, что весной 1996 г. на математическом факультете начал действовать также научный семинар по математическому анализу под руководством кандидатов физ.-матем. наук, доцентов И.И.Подгорной и С.И.Калинина.