

О методологии обучения высшей алгебре будущих учителей математики

Вечтомов Евгений Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института точных наук и информационных технологий, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина.
Россия, г. Сыктывкар. E-mail: vecht@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются и анализируются методологические и методические вопросы обучения высшей алгебре в системе подготовки учителей математики. В современном мире вопросы обучения математике в вузе и средней школе актуальны как никогда. Для России качественное математическое образование есть основа ее суверенитета.

Цель нашей работы – обратить внимание вузовских преподавателей математики и студентов математических специальностей на важнейшие дидактические и методологические принципы и положения при изучении высшей алгебры, обеспечивающие понимание алгебраического материала.

Обсуждаются принципы полноценности, целостности, содержательных связей курса высшей алгебры с другими математическими курсами. В дидактике вузовской алгебры выделены структурный и задачный подходы, принцип гармонии, аксиоматический метод, фундаментальные идеи изоморфизма, координатизации и факторизации. Отмечена роль вводного курса алгебры как своеобразного «мостика» между школьным курсом алгебры и вузовским курсом высшей алгебры. Такая преемственность окажет благотворное влияние и на успешное решение задач элементарной алгебры, что так важно для учителя математики.

Особенно значимыми представляются задачный и структурный подходы в обучении студентов высшей алгебре. Подчеркивается важность разработки циклов взаимосвязанных задач и упражнений по каждой теме курса. При решении каждой конкретной математической задачи необходимо стремиться выявить скрытую в ней абстрактную структуру и использовать информацию об этой структуре для решения задачи. А для этого требуется знание фундаментальных математических структур, их свойств и основных моделей.

В конце статьи разобраны примеры учебно-исследовательских и научно-исследовательских задач, иллюстрирующих структурный подход и значимость базовых логико-математических идей и методов.

Реализация этих положений, взятых в совокупности, есть путь к пониманию и качественному усвоению алгебраических знаний. Обосновываются значимость и необходимость алгебраического образования в подготовке современного учителя математики.

Ключевые слова: курс высшей алгебры, методология и дидактика курса, алгебраическая подготовка учителей математики.

1. Введение. Обучение будущих учителей-предметников в России всегда, вплоть до начала XXI века, базировалось на фундаментальной предметной подготовке. При подготовке учителя математики центральное место занимала высшая математика – наряду с элементарной математикой и методикой обучения математике. Математическое образование в педагогических вузах страны включало основательное изучение трех базовых дисциплин: алгебры, геометрии, математического анализа, на которые выделялось аудиторных часов даже больше, чем на математических факультетах (мехматах, матмехах, физматах) классических университетов.

Последние 25 лет идет сокращение предметной подготовки будущих учителей-предметников, в том числе математической подготовки учителей математики. Обучению титульному предмету стало уделяться критически мало времени.

Кризис предметного высшего педагогического образования в России вызван в первую очередь принятием западной парадигмы образования взамен проверенной российской сист-

емы, существовавшей с середины XIX века. Западная модель образования начала активно внедряться в России с начала нулевых годов XXI столетия. Это болонская система, ЕГЭ, отказ от наших традиций воспитания и обучения молодежи.

Серьезной ошибкой стало объединение всей подготовки учительских кадров в единое Педагогическое направление, что незамедлительно сказалось на качестве подготовки учителей-предметников. Сказалась также следующая установка в российском образовании самого начала XXI века: «готовить пользователей, а не творцов»; «оказание образовательных услуг»; увеличение числа платных студентов вузов (их стало больше, чем бюджетных).

Какой учитель, такой и ученик! Самому учителю-предметнику необходимо дать глубокие знания и научный кругозор. Для этого в вузах необходимо вернуть подготовку учителя-предметника, как это было раньше, на соответствующие профессиональные факультеты и предметные кафедры, с тем чтобы на них велась вся педагогическая работа, в том числе разрабатывались и внедрялись учебные планы.

Необходимо кардинально пересмотреть учебные планы подготовки учителей математики и программы преподаваемых математических дисциплин. В 1990-е годы в России был пик математического образования будущих учителей математики. Мы имели насыщенные профессиональные программы обучения алгебре, геометрии и математическому анализу. Это не удивительно, поскольку, во-первых, система образования консервативна и, во-вторых, факультетам и выпускающим кафедрам государство предоставило определенную свободу в составлении учебных планов и в определении содержания обучения предметам. И в 1994–2002 годы мы этой возможностью воспользовались. Дисциплины «Алгебра», «Теория чисел» и «Числовые системы» велись на протяжении первых 6–7-го семестров. Это были полновесные взаимосвязанные курсы. Кроме того, будущим учителям математики читались курсы по выбору: либо по высшей алгебре, либо по геометрии, либо по математическому анализу. Темы дипломных работ (ВКР) допускались как по методике математики, так и по математике. Средний уровень выпускников был достаточно высоким, несравнимым с «качеством» теперешних начинающих учителей математики.

Курс высшей алгебры, совместно с курсами теории чисел и числовых систем, образует единый алгебраический блок дисциплин, обязательных для подготовки учителей математики. Вместе с курсами высшей геометрии, математического анализа, математической логики и теории алгоритмов, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, компьютерной алгебры и вычислительной геометрии алгебраический блок составляет фундамент математической подготовки будущих учителей математики. Дисциплины блока так или иначе связаны со всеми перечисленными курсами, а также с элементарной математикой и информатикой. Алгебраический язык, понятия, методы и результаты широко применяются в современной математике. Алгебраическое мышление является одним из ключевых видов математического познания наряду с геометрическим, порядковым, комбинаторным типами математического образа мыслей.

В брошюре [21] приведены примерные программы курсов высшей алгебры, теории чисел и числовых систем с пояснительной запиской методико-методологического характера.

Методология и дидактика вузовской алгебры направлены на освоение и понимание основ высшей алгебры.

Курс высшей алгебры – это фундаментальный курс вузовского математического образования. Напомним его основные задачи.

1.1. Изучение классической математики (традиционная алгебра, теория чисел) и **овладение базовыми алгебраическими структурами** (векторные пространства, полугруппы, группы, кольца, поля, решетки).

1.2. Формирование алгебраического мышления, выработка научных представлений о современной математике и путях ее развития, научно-мировоззренческого кругозора и научной картины мира.

1.3. Профессионально-педагогическая направленность, предусматривающая установление связей со школьными арифметикой и алгеброй, формирует знание научных основ элементарной математики и соответствующие алгоритмические умения и навыки.

Примечание. Автор дважды выступал на Всероссийских съездах учителей и преподавателей математики и информатики, состоявшихся в МГУ им. М. В. Ломоносова в 2021 и 2023 годах. Были сделаны доклады: «Обучать ли высшей математике будущих учителей математики?» 18 ноября 2021 года и «Новая модель педагогического образования обнуляет подготов-

ку учителя-предметника» 24 ноября 2023 года. Кроме того, 18 ноября 2021 года он принял активное участие в круглом столе на тему «Какой математике и методике ее преподавания следует учить будущих учителей математики и информатики?». По первой теме сделан пленарный доклад на всероссийской научно-практической конференции 26 октября 2018 года [5].

Несколько слов об используемой литературе. Начала теории множеств, логики и комбинаторики, включая исходные терминологию и обозначения, изучаются студентами-математиками в 1-м семестре в отдельном курсе «Введение в математику» [11].

Не потеряли своего значения книги Л. Я. Куликова и А. Г. Куроша: учебники [14; 16; 17] и задачник [15].

Вузовским курсам алгебры и теории чисел посвящены учебные пособия [8; 10; 18] и статьи [1; 2; 13].

Изложение методологических вопросов математики и обучения математике в вузе содержится в книгах [3; 4; 19; 20].

2. О методологии обучения высшей алгебре. У нас нет сомнений в том, что курс высшей алгебры должен удовлетворять следующим дидактическим принципам.

2.1. Полноценность курса, предполагающая достаточные по объему и содержанию разделы курса: линейная алгебра; теория многочленов; элементы абстрактной алгебры.

2.2. Целостность курса, подразумевающая сквозную методико-методологическую линию курса, логические и содержательные взаимосвязи его разделов и тем.

2.3. Содержательные связи курса с другими математическими дисциплинами. Это взаимосвязи:

- во-первых, с теорией чисел, числовыми системами, элементарной алгеброй, компьютерной алгеброй, алгебраические спецкурсы и спецсеминары, курсовые и дипломные работы по алгебре и теории чисел, учебно-исследовательские кружки алгебраического характера;

- во-вторых, объединяющую общематематическую роль играют межпредметные связи с курсами геометрии, математического анализа, математической логики и теории алгоритмов, теорией вероятностей и математической статистики, дискретной математики, с компьютерными науками.

3. Полноценность курса. Математическое образование учителей математики есть основа их профессиональной деятельности. Основные математические курсы должны быть насыщенными и полнокровными. Чем лучше учителя понимают преподаваемые предметы, тем качественнее школьное образование в целом.

В [21] предложена полновесная программа курса высшей алгебры с четырьмя разделами: Вводный курс алгебры, Линейная алгебра, Абстрактная алгебра, Теория многочленов. Даны апробированные программы семестровых курсов теории чисел и числовых систем, программы избранных спецкурсов и спецсеминаров по алгебре и теории чисел. Такой подход был успешно апробирован нами во второй половине 1980-х годов и в 1990-е годы.

Весьма желателен сквозной практически ориентированный курс элементарной математики, преподаваемый на протяжении всего срока обучения. Вузовский курс элементарной математики может содержать следующие разделы: Элементарная алгебра, Элементарная геометрия, Арифметические задачи, Нестандартные и олимпиадные задачи, Текстовые задачи, Задачи с параметрами. Кроме того, полезен методический спецкурс «Учебные математические задачи», методологически подытоживающий теорию и практику решения задач всего школьного курса математики.

4. Целостность курса. Целостность курса – ведущий методологический принцип обучения высшей алгебре будущих учителей математики и информатики. Реализация **концепции целостности вузовского курса алгебры направлена на решение проблемы понимания** высшей алгебры студентами – будущими учителями математики. Знание – это информация плюс ее адекватное понимание, т. е. осмысленная информация. Научное знание есть обоснованное знание, а математическое знание есть знание доказательное.

Методологические и педагогические аспекты математики и ее обучения рассматриваются в монографии [3, главы 3–5]. Выстраивание дидактики абстрактной алгебры осуществлено в учебном пособии [4, глава 2] и статьях [1; 13] и реализовано в книге [10].

В своей монографии [19] О. А. Сотникова достаточно глубоко и всесторонне раскрыла проблему понимания математики на примере обучения вузовской алгебре. Методологическим вопросам обучения высшей алгебре в педагогическом вузе посвящена также ее монография [20].

Выделим основные, на наш взгляд, методологические и дидактические положения и идеи построения курса высшей алгебры, обеспечивающие его внутреннее единство и понимание.

4.1. Необходимость вводного курса алгебры, являющегося:

- во-первых, связующим звеном между школьной алгеброй и высшей алгеброй;
- во-вторых, пропедевтикой курса высшей алгебры.

Вводный курс алгебры базируется на школьной математике, повторяет и закрепляет необходимые знания, развивает и дополняет их, обеспечивает возможность качественного усвоения основных разделов вузовской алгебры. Такие вводные разделы необходимы также в курсах геометрии и математического анализа при подготовке учителей математики. Совместно с дисциплиной «Введение в математику» эти вводные разделы, изучаемые в течение 1-го семестра, способствуют формированию надежного фундамента эффективного изучения высшей математики в вузе.

4.2. Структурный подход. Понятие алгебраической структуры – сквозная дидактическая линия всего курса высшей алгебры. Структурный подход предполагает **выявление в конкретном алгебраическом объекте присущей ему алгебраической структуры**. Центральные понятия группы, кольца и поля определяются во вводном курсе алгебры и используются на протяжении всего обучения математике в вузе. Они развиваются спиралевидно – концентрически:

- числовые структуры и определения;
- проявления в структурах линейной алгебры;
- общие теории групп, колец и полей;
- использование в теории многочленов;
- применения в теории чисел;
- как теоретическая основа изучения числовых систем.

4.3. Задачный подход предполагает последовательное решение следующих математических задач:

- простые упражнения на идентификацию, узнавание изучаемой алгебраической структуры;
- стандартные учебные задачи на понимание;
- учебно-исследовательские задачи на развитие;
- научно-исследовательские задачи.

Подчеркнем, что полезно разрабатывать и предлагать циклы взаимосвязанных задач – типовых, нестандартных, исследовательских.

4.4. Принцип гармонии, заключающийся во взвешенном, доступном и одновременно научном изложении знания, опирающемся на чувство меры. В теории познания существуют два взаимодополняющих постулата: Бритва Оккама и Призма Менгера. Первый постулат утверждает, что не нужно множить сущности без необходимости. А второй постулат говорит о том, что за любой кажущейся простотой необходимо стремиться увидеть скрытые сущности.

Выделим следующие ключевые аспекты принципа гармонии.

- Уместное употребление терминов

Так, термины понятий *группа*, *кольцо*, *поле* следует использовать уже в первом семестре при начальном рассмотрении числовых систем, с формулированием их свойств. Не надо бояться введения общепринятых названий, которые отражают существо дела, которые будут применяться далее и подробно изучаться в разделе «Абстрактная алгебра». В то же самое время следует отказаться от чрезмерного употребления новых для обучающихся терминов.

- Методически грамотное применение методов «от общего к частному» и «от конкретного к абстрактному»

При обучении математике невозможно ограничиться одной дедукцией. Например, в линейной алгебре изучаются n -мерные арифметические векторные пространства $\mathbf{R}^n$ ($n \in \mathbf{N}$) и общие векторные пространства над полем. Сначала следует рассмотреть векторное пространство $\mathbf{R}^n$ как частный случай векторных пространств с доказательством их структурных свойств, а уже затем, на этой базе, изучать векторные пространства в общем виде. По сложности векторные пространства являются абелевыми группами, хотя элементы теории групп изучаются позднее. Заметим также, что умножение векторов векторного пространства V на скаляр $r \neq 0$ есть линейный оператор на V – автоморфизм векторного пространства V . Попеременное, последовательное использование методов «от общего к частному» и «от конкретного к абстрактному» весьма уместно и плодотворно.

– Диалектическое сочетание наглядности и абстрактности

Это положение примыкает к предыдущему дидактическому принципу. На примере векторных пространств $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ наглядно иллюстрируются основные свойства теории векторных и евклидовых пространств. На геометрическом языке координатные евклидовы плоскость $\mathbf{R}^2$ и пространство $\mathbf{R}^3$ позволяют дать основы аналитической геометрии. В векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ точки, прямые, плоскости представляют собой в точности собственные линейные многообразия.

Принцип наглядности хорошо работает при использовании практического метода Гаусса (в форме приведения матрицы к ступенчатому виду) как теоретического инструмента доказательства целого ряда основных теорем о системах линейных уравнений и матрицах (см. [3, с. 234–237]).

Как принцип абстрактности применяется в линейной алгебре, демонстрируют следствия теоремы о сумме ранга и дефекта линейного отображения конечномерных векторных пространств [3, с. 233–234] и изложение темы об определителях [3, с. 237–241].

4.5. Аксиоматический подход. Абстрактные алгебраические структуры определяются аксиоматически. Аксиоматический метод изучения высшей алгебры является ведущим методом изложения и обоснования алгебраических знаний. Поэтому в дидактике высшей алгебры необходимо четко обозначать его составные части: первичные понятия, аксиомы, дедукция, теорема, теория. Но для понимания материала этого недостаточно. Необходима определенная пропедевтика.

Скажем, до аксиоматического определения понятия группы нужны простейшие примеры (числовые и функциональные). Особо важную роль играет группа взаимно однозначных преобразований непустого множества с операцией композиции (суперпозиции) преобразований, в частности группа подстановок (перестановок) элементов конечного множества. Это будет понятно позднее при доказательстве теоремы Кэли. Произвольная ассоциативная алгебраическая операция на непустом множестве (полугрупповая операция) реализуется как композиция соответствующих преобразований этого множества. При этом мы можем видеть, что понятие группы отражает идею симметрии, служит алгебраическим воплощением симметрии.

Чередование теоретического материала (теории) и конкретных примеров (моделей теории) является важным дидактическим приемом достижения понимания аксиоматической теории.

4.6. Универсально-алгебраический (категорный) метод изучения алгебраических структур. Конкретные и абстрактные алгебраические объекты (структуры) изучаются совместно с их гомоморфизмами – сохраняющими структуру отображениями. При этом большое значение имеют теорема о гомоморфизме и такая общеалгебраическая конструкция, как прямое произведение структур.

4.7. Идея изоморфизма. Изоморфные математические структуры имеют одинаковые структурные свойства. Поэтому при описании алгебраических структур одного типа и их классификации изоморфные структуры отождествляются. Например, при изучении конечномерных векторных пространств V над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел можно рассматривать только n -мерные арифметические векторные пространства $\mathbf{R}^n$, поскольку векторные пространства V исчерпываются – с точностью до изоморфизма – пространствами $\mathbf{R}^n$ по всем натуральным числам n . При этом данная конкретная алгебраическая структура может допускать целый ряд изоморфных структур, имеющих различную математическую природу. Так, моделями (изоморфными проявлениями, реализациями) циклической группы n -го порядка $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ служат:

- аддитивная группа $\mathbf{Z}_n$ классов вычетов целых чисел по модулю n ;
- мультипликативная группа комплексных корней n -й степени из 1;
- группа самосовмещений первого рода (поворотов) правильного n -угольника.

4.8. Координатизация – это сопоставление с математическими объектами (структурами) M арифметических или алгебраических объектов $A(M)$ (чисел, наборов чисел, матриц, многочленов и т. д. – координат исходных объектов), в которых можно производить соответствующие операции и вычисления, дающие информацию об объектах M . Обычно в качестве M выступают тополого-геометрические структуры. Первые примеры координатизации составляют простейшие измерения и тригонометрия. Классической иллюстрацией служит метод координат в аналитической геометрии. Алгебраическая геометрия и алгебраическая топология основываются на более абстрактной координатизации, «координатами» которой вы-

ступают: локальные кольца и поля, сопоставляемые с алгебраическими многообразиями, гомотопическая и гомотопическая группы топологических многообразий и др. Зачастую отображение $M \rightarrow A(M)$ функториально и порой порождает различные теории двойственностей (классические двойственности Понтрягина, Стоуна, Гельфанда – Наймарка, Хьюитта, двойственности в алгебраической геометрии). Идея координатизации пронизывает всю математику и показывает место алгебры в математике.

4.9. Идея факторизации, основой которой является триединство базовых понятий гомоморфизма (эпиморфизма), конгруэнции и фактор-структуры, выраженное в теореме о гомоморфизмах. В ряде важных типов алгебраических структур конгруэнция есть отношение сравнимости по модулю:

- нормальной подгруппы группы,
- идеала кольца,
- подпространства векторного пространства.

Отметим, что понятие конгруэнции на произвольной алгебре A является важнейшим универсально-алгебраическим понятием, не имеющим, в общем случае, эквивалентов во множестве подалгебр алгебры A . Такова ситуация в теории полугрупп, решеток, полуколец, хотя для полугрупп, решеток и полуколец имеется понятие идеала.

Примечание. Методологические положения 4.1–4.5 имеют общеметодический характер, а положения 4.5–4.9 касаются частной методики, они рассматривались в [3, параграф 15].

5. Дополняющее алгебраическое образование. Дополняющее математическое образование студентов вуза включает в себя спецкурсы и спецсеминары по выбору, выполнение курсовых и дипломных работ (ВКР), участие в математических олимпиадах, научных кружках и научных семинарах. Очень важна индивидуальная исследовательская работа студента под руководством профессионального наставника.

Перечислим некоторые возможные (примерные) темы алгебраических спецкурсов и спецсеминаров, курсовых и дипломных работ.

5.1. Темы спецкурсов/спецсеминаров:

- Абелевы группы.
- Группы и графы.
- Конечные поля.
- Теория p -адических чисел.
- Функциональные представления коммутативных колец.
- Дистрибутивные решетки.
- Полурешетки.

5.2. Темы курсовых работ:

- Группы малых порядков.
- Трехэлементные кольца.
- Кольца классов вычетов.
- Теорема Кэли для полугрупп.
- Циклические полугруппы.
- Дистрибутивные решетки с тремя образующими.
- Конечные булевы алгебры.

5.3. Темы дипломных работ:

- Конечнопорожденные абелевы группы.
- Кольцо квадратных матриц 2-го порядка над конечным полем.
- Кольцо непрерывных числовых функций на единичном отрезке.
- Применения комплексных чисел в планиметрии.
- Многообразие дистрибутивных решеток.
- Аддитивно идемпотентные полутела.
- Конечные полурешетки.

Материал для курсовых и дипломных работ можно найти в учебных пособиях [9; 12].

Следует подчеркнуть, что автор обладает большим опытом организации и проведения учебно-исследовательских и научно-исследовательских математических кружков (см., например, [6]). С осени 1977 года до осени 2025 года автор вел кружки по теории множеств, упорядоченным множествам, теории групп, теории колец, теории решеток, теории полуколец, общей топологии, функциональному анализу, теории колец и полуколец непрерывных функций. С 1994 по 2019 год руководил научным алгебраическим семинаром в городе Кирове, через который прошли многие вузовские преподаватели алгебры, студенты и аспиранты, ра-

ботавшие над магистерскими и кандидатскими диссертациями по современной алгебре (в том числе иногородние) [7].

6. Межпредметные связи. Рассмотрим некоторые основные межпредметные связи курса высшей алгебры – его взаимосвязи с другими математическими курсами.

6.1. Геометрия. Существуют тесные связи линейной алгебры с аналитической геометрией, многомерной геометрией, основаниями геометрии. В их основе лежит метод координат изучения линейных и квадратичных фигур, евклидовой геометрии. Известна программа Феликса Клейна классификации геометрий по группам их преобразований: группы движений в евклидовой геометрии, групп аффинных и проективных преобразований в аффинной и проективной геометриях соответственно. Давид Гильберт осуществил построение и обоснование евклидовой геометрии на арифметической основе – трехмерном евклидовом пространстве над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел.

6.2. Математический анализ. Дифференциал и неопределенный интеграл являются линейными отображениями соответствующих векторных пространств, а определенный интеграл – линейный функционал. Линеаризация, т. е. локальная замена кривой отрезком прямой, есть исходная идея дифференцирования. Идея линейности и определители применяются в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

6.3. Математическая логика. Алгебраическая структура логики высказываний – это булева алгебра классов равносильных пропозициональных формул. Классы равносильных формул логики предикатов также образуют булеву алгебру с унарными операциями $\forall$ и $\exists$.

6.4. Теория вероятностей. Классическое определение вероятности, данное А. Н. Колмогоровым, основывается на булевой алгебре событий.

6.5. Дискретная математика. Алгебраическая структура и порядковая структура – фундаментальные типы математических структур (наряду с топологической структурой по Бурбаки) – имеют дискретный характер. Конечные алгебры и графы относятся к дискретной математике и допускают исследование методами компьютерной алгебры. Графы изучаются посредством их групп автоморфизмов, что дает пример применения теории групп в теории графов. Известно и обратное применение, когда исследование групп, задаваемых образующими и определяющими соотношениями, сводится к геометрическим свойствам их графов.

6.6. Компьютерные науки, включая компьютерную алгебру, вычислительную геометрию, криптографию. Отметим только, что в их основе, наряду с теорией алгоритмов, теорией чисел, дискретной математикой, теорией баз данных, лежат булевы алгебры и структуры универсальной алгебры. Здесь знание элементов абстрактной алгебры совершенно необходимо.

Перечисленные математические дисциплины дают содержательную основу для разнообразных примеров, упражнений и задач в курсах высшей алгебры и теории чисел.

7. Приложение. Проиллюстрируем примерами виды задач пункта 4.3.

7.1. Решение задач на узнавание и изоморфность являются первыми шагами студентов в мире абстрактных алгебраических структур. Можно указать следующие простые упражнения.

1) Является ли мультипликативный числовой группоид $\{-1, 1\}$ полугруппой, группой? С какой операцией группоид {Чет, Нечет} изоморфен группоиду $\{-1, 1\}$?

2) Найдите все конечные аддитивные и мультипликативные полугруппы действительных чисел.

3) Сколько элементов имеет группа самосовмещений ромба, не являющегося квадратом? Укажите две изоморфные ей конкретные группы (подстановок и пар чисел).

7.2. Стандартные учебные задачи служат индикатором усвоения изучаемого материала, его понимания. Ряд таких задач имеется в учебном пособии [3, с. 254–255]. К учебным задачам относятся типовые задачи на вычисления, нахождение корней уравнений, на применение известных алгоритмов (в линейной алгебре, теории многочленов, элементарной теории чисел).

7.3. Важную роль в процессе обучения играют учебно-исследовательские задачи. Тестовые задачи по абстрактной алгебре приведены в книге [3, с. 251–253]. Разберем одну из таких задач.

Докажите, что аддитивная и мультипликативная группы любого поля не изоморфны.

Решение. Допустим от противного, что для некоторого поля A существует изоморфизм $\alpha: \langle A, + \rangle \rightarrow \langle A \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ аддитивной группы поля A на его мультипликативную группу. Ясно, что поле A бесконечно и $\alpha(0)=1$. Положим $a=\alpha^{-1}(-1)$. Тогда $\alpha(a+a)=\alpha(a)\alpha(a)=(-1)(-1)=1$, откуда $a+a=0$. Если $a=0$, то $-1=1$, т. е. $1+1=0$, и, стало быть, A удовлетворяет тождеству $x+x=0$. Если же $a \neq 0$, то, умножая равенство $a+a=0$ на элемент a^{-1} , снова получим равенство $1+1=0$, влекущее тождество $x+x=0$.

Итак, в поле A выполняется тождество $x+x=0$. Значит, в мультипликативной группе $\langle A \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ выполняется тождество $xx=1$. Возьмем в поле A произвольный элемент b , отличный от 0 и 1. И рассмотрим сумму $b+1$. Имеем: $b+1 \neq 0$ и

$$b+1=(b+1)^2=b^2+b+b+1=1+1,$$

откуда $b=1$; противоречие.

7.4. Научно-исследовательские задачи для студентов предполагают элементы научной новизны, самостоятельного поиска решения с заранее неизвестным ответом. Приведем одну такую задачу (сообщила О. В. Чермных).

Будут ли изоморфны любые две конечные группы с одинаковым набором порядков их элементов? Например, как легко проверить, 16-элементная аддитивная группа $\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_4$ имеет 1 элемент порядка 1, 3 элемента порядка 2 и 12 элементов порядка 4. Существуют ли неизоморфные ей группы с таким же набором $\{1, 3_2, 12_4\}$ порядков элементов? Как обстоит дело в случае конечных абелевых групп?

По всем типам задач пункта 4.3 рекомендуем задачник [15]. Задачи и упражнения по абстрактной алгебре содержатся также в учебных пособиях [4, глава 2] и [10].

7.5. Рассмотрим две олимпиадные задачи, иллюстрирующие принцип выявления той или иной формальной структуры в содержании задачи.

Первая задача связана с делимостью натуральных чисел.

Докажите, что в любом 101-элементном подмножестве множества первых 200 натуральных чисел найдутся два числа, одно из которых делится на другое.

Решение основано на выявлении структурной идеи, дающей метод доказательства сформулированного утверждения.

Известное **решение** этой задачи основано на принципе Дирихле.

Пусть $M \subseteq [1, 200]$ – произвольное 101-элементное множество. Каждому из 100 нечетных натуральных чисел n из промежутка $[1, 200]$ сопоставляется класс чисел $\{2^k n: k \text{ – неотрицательное целое число, } 2^k n \leq 200\}$. Например, число 11 дает пятиэлементный класс $\{11, 22, 44, 88, 176\}$. Очевидно, для любых двух чисел каждого такого класса большее из них делится на меньшее число. По принципу Дирихле некоторый из образованных классов содержит по меньшей мере два числа из множества M . Задача решена.

Другое решение базируется на методе математической индукции.

Именно, докажем обобщенное утверждение:

для любого натурального числа n всякое $(n+1)$ -элементное подмножество множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$ содержит пару чисел, одно из которых делится на другое.

При $n=1$ утверждение очевидно. В предположении, что оно верно для натурального числа n , докажем его справедливость для числа $n+1$. Возьмем произвольное $(n+2)$ -элементное подмножество M множества $\{1, 2, \dots, 2n, 2n+1, 2n+2\}$. Возможны два случая.

1) Множество M не содержит хотя бы одно из чисел $2n+1, 2n+2$. Тогда пересечение $M \cap \{1, 2, \dots, 2n\}$ имеет не менее $n+1$ элемента. Остается применить индуктивное предположение.

2) Множество M содержит оба числа $2n+1$ и $2n+2$. Если M содержит число $n+1$, необходимо делящее число $2n+2$, то утверждение верно. Поэтому можно считать, что M не содержит число $n+1$. Добавляя число $n+1$ к множеству $M \cap \{1, 2, \dots, 2n\}$, получим $(n+1)$ -элементное подмножество множества $\{1, 2, \dots, 2n\}$. По индуктивному предположению в полученном множестве существуют такие два числа $a < b$, что a делит b , причем $a \in M$. Если $b=n+1$, то a делит число $2n+2$ из M . Если же $b \neq n+1$, то a и $b \in M$.

В силу принципа математической индукции получаем второе решение первой задачи.

Заметим, что применением принципа Дирихле также доказывается и обобщенное утверждение.

Предлагаемое решение **второй задачи** основано на выявлении порядковой структуры при ее осмыслении.

Первые $m=101$ натуральных чисел выписаны в ряд произвольным образом. Требуется доказать, что в данной последовательности найдутся 11 чисел, расположенных в порядке возрастания или в порядке убывания.

Решение. Пусть $A=\{1, 2, 3, \dots, 101\}$. Введем на множестве A отношение порядка ρ по правилу: для любых чисел $a, b \in A$

$$a \rho b \Leftrightarrow a=b \text{ или } (a < b \text{ и } a \text{ расположено раньше } b \text{ в этом ряду}).$$

Ясно, что ρ является отношением порядка на множестве A , т. е. ρ рефлексивно ($x \rho x$), транзитивно ($x \rho y \text{ и } y \rho z \Rightarrow x \rho z$) и антисимметрично ($x \rho y \text{ и } y \rho x \Rightarrow x=y$). Рассмотрим полученное упоря-

доченное множество $\langle A, \rho \rangle$. Элементы $a, b \in A$ называются сравнимыми, если arb или bra , и несравнимыми – в противном случае. Непустое подмножество в A называется цепью (антицепью), если любые два его элемента сравнимы (любые два его различных элемента несравнимы). Посмотрим, что представляют собой цепи и антицепи в упорядоченном множестве A . Очевидно, что цепи (антицепи) в A суть в точности возрастающие (соответственно, убывающие) последовательности чисел множества (ряда) A при заданном его упорядочении.

Тем самым мы свели нашу задачу к следующей задаче:

доказать, что в любом 101-элементном упорядоченном множестве существует 11-элементная цепь или 11-элементная антицепь.

Нетрудно показать, что если бы это было не так, то есть все цепи и антицепи 101-элементного множества имели бы не более 10 элементов, то число его элементов не превышало бы $10 \cdot 10 = 100$ элементов. Подробности в [4, с. 123–124].

Очевидно, эта задача допускает обобщение для чисел $m=n^2+1$ и $n+1$ при любом натуральном n .

8. Заключение. Обучать математике просто и сложно. Абстрактные разделы математики усваиваются студентами особенно трудно. Причина в объективной природе математики, выступающей и как модель, и как теория. Поэтому для продуктивного обучения высшей математике необходимо иметь в виду базовые дидактические и методологические принципы. В первую очередь следует опираться на задачный и структурный подходы в обучении, а также психологический принцип чувства меры. В работе предпринята попытка раскрыть методологические принципы обучения высшей алгебре будущих учителей математики, обеспечивающие понимание предмета.

Список литературы

1. Вечтомов Е. М. Изучение начал теории групп // Труды Международной научной конференции «Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство». Плоцк (Польша), 2010. С. 91–100.
2. Вечтомов Е. М. Натуральный ряд // Математика в высшем образовании. 2012. Вып. 10. С. 15–34.
3. Вечтомов Е. М. Философия математики. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 317 с.
4. Вечтомов Е. М. Математика: основные математические структуры. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 296 с.
5. Вечтомов Е. М. Нужно ли обучать высшей математике будущих учителей математики? // Настоящее и будущее физико-математического образования : материалы V Всерос. науч.-практ. конф. Киров : Кировский физ.-мат. лицей ; Радуга-ПРЕСС, 2018. С. 10–14.
6. Вечтомов Е. М. Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. № 3. С. 36–45.
7. Вечтомов Е. М. Кировской научной алгебраической школе – 30 лет // Материалы Всероссийской научной конференции «Город на Вятке: история, культура, люди (К 650-летию Хлынова – Вятки – Кирова)». Киров : КОУНБ им. А. И. Герцена, 2024. С. 141–147.
8. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Широков Д. В. Курс теории чисел. М. : Грифон, 2026. 304 с.
9. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. СПб. : Лань, 2022. 180 с.
10. Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Абстрактная алгебра. Базовый курс. Киров : Радуга-ПРЕСС, 2014. 260 с.
11. Вечтомов Е. М., Широков Д. В. Математика: логика, множества, комбинаторика. 2-е изд. М. : Юрайт, 2018. 243 с.
12. Вечтомов Е. М., Широков Д. В. Упорядоченные множества и решетки. СПб. : Лань, 2024. 248 с.
13. Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Изучение алгебраической структуры // Вестник Вятского государственного гуманитарного университета. 2012. № 1 (3). С. 41–48.
14. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М. : Высш. шк., 1979. 559 с.
15. Куликов Л. Я., Москаленко А. И., Фомин А. А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М. : Просвещение, 1993. 288 с.
16. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Изд. девятое. М. : Наука, 1968. 432 с.
17. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. Изд. второе. М. : Наука, 1973. 400 с.
18. Лубягина Е. Н., Вечтомов Е. М. Линейная алгебра. 2-е изд. М. : Юрайт, 2019. 150 с.
19. Сотникова О. А. Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания. Архангельск : Поморский университет, 2004. 356 с.
20. Сотникова О. А. Методологический подход к изучению теоретического материала курса алгебры педагогического вуза. 2021. Елец : Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2021. 177 с.
21. Учебные программы блока дисциплин «Алгебра», «Теория чисел», «Числовые системы» и кафедральных дисциплин (кафедра алгебры) / сост. Е. М. Вечтомов. Киров : Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2002. 24 с.

On the Methodology of Teaching Higher Algebra to Future Mathematics Teachers

Vechtomov Evgeniy Mikhailovich

Doctor of Physics and Mathematics, professor, Chief Researcher of the Institute of Exact Sciences
and Information Technologies, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University.
Russia, Syktyvkar. E-mail: vecht@mail.ru

Abstract. The article examines and analyzes methodological questions and questions of teaching method in the instruction of higher algebra within the system of training mathematics teachers. In today's world, the questions of teaching mathematics at university and in secondary school are more relevant than ever. For Russia, high-quality mathematical education is the foundation of its sovereignty.

The aim of our work is to draw the attention of university mathematics lecturers and of students of mathematical specialties to the most important didactic and methodological principles and propositions in the study of higher algebra, which ensure an understanding of algebraic material.

The article discusses the principles of completeness, of integrity, and of the substantive connections of the higher algebra course with other mathematical courses. Within the didactics of university algebra, the structural and problem-based approaches, the principle of harmony, the axiomatic method, and the fundamental ideas of isomorphism, coordinatization, and factorization are singled out. The role of the introductory algebra course is noted as a kind of "bridge" between the school algebra course and the university course of higher algebra. Such continuity will also have a beneficial effect on the successful solution of problems in elementary algebra, which is so important for the mathematics teacher.

The problem-based and structural approaches to teaching students higher algebra are regarded as particularly significant. The importance of developing cycles of interrelated problems and exercises for each topic of the course is emphasized. In solving each specific mathematical problem, one must strive to identify the abstract structure hidden within it and to use the information about this structure to solve the problem. This, in turn, requires a knowledge of the fundamental mathematical structures, their properties, and their basic models.

At the end of the article, examples of educational-research and scholarly-research problems are analyzed that illustrate the structural approach and the significance of basic logical and mathematical ideas and methods.

The implementation of these propositions, taken together, is the path to the understanding and high-quality assimilation of algebraic knowledge. The significance and necessity of algebraic education in the training of the modern mathematics teacher are substantiated.

Keywords: higher algebra course, methodology and didactics of the course, algebraic training of mathematics teachers.

References

1. Vechtomov E. M. *Izuchenie nachal teorii grupp* [The Study of the Elements of Group Theory] // *Trudy Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Obrazovanie, nauka i ekonomika v vuzah. Integraciya v mezhdunarodnoe obrazovatel'noe prostranstvo"* [Proceedings of the International Scientific Conference "Education, Science and Economics in Universities. Integration into the International Educational Space"]. Plock (Poland), 2010. Pp. 91–100.
2. Vechtomov E. M. *Natural'nyj ryad* [The Natural Number Sequence] // *Matematika v vysshem obrazovanii* – Mathematics in Higher Education. 2012. Is. 10. Pp. 15–34.
3. Vechtomov E. M. *Filosofiya matematiki* [The Philosophy of Mathematics]. 2nd ed. M., Yurajt, 2018. 317 p.
4. Vechtomov E. M. *Matematika: osnovnye matematicheskie struktury* [Mathematics: The Basic Mathematical Structures]. 2nd ed. M., Yurajt, 2018. 296 p.
5. Vechtomov E. M. *Nuzhno li obuchat' vysshej matematike budushchih uchitelej matematiki?* [Should Future Mathematics Teachers Be Taught Higher Mathematics?] // *Nastoyashchee i budushchee fiziko-matematicheskogo obrazovaniya : materialy Vseros. nauch.-prakt. konf.* [The Present and Future of Physics and Mathematics Education : Proceedings of the 5th All-Russian Scientific-Practical Conference]. Kirov, Kirovskij fiz.-mat. licej ; Raduga-PRESS, 2018. Pp. 10–14.
6. Vechtomov E. M. *Studencheskij uchebno-issledovatel'skij seminar po algebre* [The Student Educational-Research Seminar in Algebra] // *Matematicheskij vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo universiteta* – Mathematical Bulletin of Vyatka State University. 2021. No. 3. Pp. 36–45.
7. Vechtomov E. M. *Kirovskoj nauchnoj algebraicheskoy shkole – 30 let* [The Kirov Scientific School of Algebra Turns 30] // *Materialy Vserossijskoj nauchnoj konferencii "Gorod na Vyatke: istoriya, kul'tura, lyudi (K 650-letiyu Hlynova – Vyatki – Kirova)"* [Proceedings of the All-Russian Scientific Conference "A City on the Vyatka: History, Culture, People (On the 650th Anniversary of Khlynov – Vyatka – Kirov)"]. Kirov, KOUNB im. A. I. Gercena, 2024. Pp. 141–147.
8. Vechtomov E. M., Lubyagina E. N., Shirokov D. V. *Kurs teorii chisel* [A Course in Number Theory]. M., Grifon, 2026. 304 p.

9. Vechtomov E. M., Petrov A. A. *Funkcional'naya algebra i polukol'ca. Polukol'ca s idempotentnym umnozheniem* [Functional Algebra and Semirings. Semirings with Idempotent Multiplication]. SPb., Lan', 2022. 180 p.
10. Vechtomov E. M., Sidorov V. V. *Abstraktnaya algebra. Bazovyy kurs* [Abstract Algebra. A Basic Course]. Kirov, Raduga-PRESS, 2014. 260 p.
11. Vechtomov E. M., Shirokov D. V. *Matematika: logika, mnozhestva, kombinatorika* [Mathematics: Logic, Sets, Combinatorics]. 2nd ed. M., Yurajt, 2018. 243 p.
12. Vechtomov E. M., Shirokov D. V. *Uporyadochennyye mnozhestva i reshetki* [Ordered Sets and Lattices]. SPb., Lan', 2024. 248 p.
13. Vechtomov E. M., Chermnyh V. V. *Izuchenie algebraicheskoy struktury* [The Study of Algebraic Structure] // *Vestnik Vyatskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta – Herald of Vyatka State University of Humanities*. 2012. No. 1 (3). Pp. 41–48.
14. Kulikov L. Ya. *Algebra i teoriya chisel* [Algebra and Number Theory]. M., Vysshaya shkola (Higher School), 1979. 559 p.
15. Kulikov L. Ya., Moskalenko A. I., Fomin A. A. *Sbornik zadach po algebre i teorii chisel* [A Collection of Problems in Algebra and Number Theory]. M., Prosveshchenie (Enlightenment), 1993. 288 p.
16. Kurosh A. G. *Kurs vysshej algebry* [A Course in Higher Algebra]. 9th ed. M., Nauka (Sciences), 1968. 432 p.
17. Kurosh A. G. *Lekcii po obshchej algebre* [Lectures on General Algebra]. 2nd ed. M., Nauka (Sciences), 1973. 400 p.
18. Lubyagina E. N., Vechtomov E. M. *Linejnaya algebra* [Linear Algebra]. 2nd ed. M., Yurajt, 2019. 150 p.
19. Sotnikova O. A. *Celostnost' vuzovskogo kursa algebry kak metodologicheskaya osnova ego ponimaniya* [The Integrity of the University Algebra Course as a Methodological Basis for Understanding It]. Arhangel'sk, Pomorskij universitet, 2004. 356 p.
20. Sotnikova O. A. *Metodologicheskij podhod k izucheniyu teoreticheskogo materiala kursa algebry pedagogicheskogo vuza* [A Methodological Approach to the Study of the Theoretical Material of the Algebra Course at a Pedagogical University]. Elec, Eleckij gosudarstvennyj universitet im. I. A. Bunina, 2021. 177 p.
21. *Uchebnye programmy bloka disciplin "Algebra", "Teoriya chisel", "Chislavye sistemy" i kafedral'nyh disciplin (kafedra algebry)* [Curricula for the Block of Disciplines "Algebra", "Number Theory", "Number Systems" and Departmental Disciplines (Department of Algebra)] / comp. by E. M. Vechtomov. Kirov, Izd-vo Vyatskogo gos. ped. un-ta, 2002. 24 p.

Поступила в редакцию: 30.04.2026

Принята к публикации: 03.06.2026