УДК 372.851: 514 DOI: 10.25730/VSU.7606.22.061

Методика обучения решению задач на построение в пространстве на основе расширенной схемы

Н. В. Леонтьева
кандидат педагогических наук, Глазовский государственный педагогический институт им. В. Г. Короленко. Россия, г. Глазов. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Аннотация. Изучение основ конструктивной геометрии на плоскости способствует формированию у школьников логического и пространственного мышления, создает условия для систематизации геометрических знаний. В систематический курс стереометрии данный круг вопросов практически не включается. Однако конструктивные представления позволяют углубить и расширить подготовку учащихся по математике. Создание элективного курса, направленного на обучение решению задач на построение в пространстве, дает возможность продолжить развитие пространственных и стереометрических представлений. Цель исследования заключается в изучении методики обучения решению задач на построение в пространстве на основе расширенной схемы. Для этого определим основные теоретические положения, дающие возможность выполнять пространственные построения. Введем в рассмотрение виртуальные инструменты, позволяющие строить три основных пространственных объекта: прямую, плоскость и сферу, а также базовые построения, обеспечивающие возможность находить их пересечение. При решении задач будем применять расширенную схему, включающую визуализацию, анализ, построение (описание и практическая реализация), доказательство, исследование и динамическое конструирование. Применение предложенной схемы рассмотрено на примере задачи на построение плоскости, перпендикулярной прямой и проходящей через точку, лежащую на этой прямой. Разделение логических и визуальных этапов определяет значимость образного представления искомых и исходных объектов, а также устанавливает соответствие между различными видами выполняемых в процессе решения задачи действий. Последовательное формирование на описанной основе конструктивных представлений позволяет систематизировать и обобщить изученный стереометрический материал, лучше понять взаимное расположение различных пространственных объектов как при стационарном, так и при динамическом моделировании.

Ключевые слова: стереометрия, задачи на построение в пространстве, методика обучения стереометрии, расширенная схема, пространственное мышление, конструктивная геометрия в пространстве.

Принятая Концепция развития математического образования в Российской Федерации определяет значимость математики для научно-технического прогресса [7]. К числу поставленных в ней задач относится обеспечение качественной подготовки обучающихся, интересующихся математикой и проявляющих к ней способности, что приводит к необходимости совершенствования методики обучения математике.

Наиболее сложным разделом школьного курса математики является стереометрия. Ее изучение в курсе средней школы направлено на формирование представлений о пространственных объектах. По мнению В. В. Шлыкова, именно стереометрия оказывает наибольшее влияние на формирование пространственного мышления школьников [19, с. 23]. Вместе с тем российские (В. А. Далингер [5], Н. Г. Подаева, М. В. Подаев, П. А. Агафонов [12; 13; 14], Ш. С. Зиядуллаева [6]) и зарубежные (Л. Руманова, Д. Валло, В. Дурис [22], П. Лебамовский [23; 24], Н. Заранис, Дж. Экзарчакос [25], С. Кристоу, М. Питаллис [21]) авторы отмечают сложность понимания и восприятия стереометрических объектов. Помимо этого, у обучающихся возникают затруднения с построением как заданных по условию, так и дополнительных пространственных объектов. Данный круг вопросов в явном виде практически не включается в курс стереометрии. Проведенный В. А. Далингером анализ показывает, что в основном задачи школьных учебников связаны с построением сечений, пересечений объектов и изображений пространственных тел [5, с. 10–16]. Подобные задания чаще всего являются вспомогательными, их результаты обычно применяют при решении более сложных задач. Основные подходы к их решению, в первую очередь, связаны с изображением пространственных фигур на проекционном чертеже. Однако конструктивные представления, связанные с необходимостью выполнять построения пространственных объектов, являются составной частью подготовки школьников, что приводит к необходимости изучения данного вопроса.

Цель исследования заключается в обосновании методики обучения решению задач на построение в пространстве на основе расширенной схемы.

Для достижения поставленной цели определим следующие задачи:

– обоснуем структуру расширенной схемы с подробной характеристикой каждого из этапов;

– приведем пример ее реализации на конкретной задаче.

В данной работе были использованы следующие методы исследования: обобщение теоретического опыта по теме исследования, метод аналогии.

Обучение решению задач на построение в пространстве будем рассматривать как отдельную тему, которая может изучаться дополнительно в рамках элективных курсов. Геометрической основой является материал о взаимном расположении прямых и плоскостей, о методах их изображения, а также о свойствах сферы. Он может быть изучен как на уроках стереометрии, так и в начале данного элективного курса. Примерное его содержание изложено, например, в главах 1, 2, в параграфе 3 главы 6 и в приложении «Изображение пространственных фигур» учебника Л. С. Атанасяна [9].

Обучение конструктивной геометрии на плоскости оказывает существенное влияние на математическую подготовку школьников. В. А. Далингер определяет значимость подобных заданий для повторения и систематизации геометрического материала, развития логического и пространственного мышления, формирования межпредметных связей [4, с. 40]. Аналогичной позиции придерживаются Н. Г. Подаева, М. В. Подаев, П. А. Агафонов. В своих работах [12; 14] авторы обращают внимание на то влияние, которое оказывает обучение решению конструктивных задач на развитие обучающихся, и отмечают, что при определенных условиях геометрические построения обеспечивают формирование способов мысленного воспроизведения геометрических объектов [14, с. 23]. В дальнейшем возможно использование формируемых конструктивных представлений при решении сложных планиметрических задач в процессе подготовки чертежей, выполнения дополнительных построений. Вполне возможен перенос указанных представлений и в стереометрию. В частности, в своей работе Л. Л. Тухолко акцентирует внимание на том, что необходимо постепенное формирование конструктивной деятельности, позволяющей более осознанно освоить курс геометрии [17, с. 39]. Изучение вопросов, связанных с решением задач на построение в пространстве, способствует развитию пространственного и логического мышления, конструктивных представлений, которые возможно применять при решении различных стереометрических задач.

Однако прямой перенос методики обучения решению задач на построение на плоскости не учитывает особенностей стереометрии. В связи с этим обратим внимание на совершенствование методических положений.

Решение задачи на построение предполагает применение различных инструментов. На плоскости обычно используют циркуль и линейку. Как отмечают Л. Н. Габеева и Л. Б. Лубсанова, не существует чертежных инструментов, позволяющих выполнять построение в пространстве [2, с. 102]. В свою очередь, А. Д. Семушин указывает, что в таком случае достаточно описать последовательность операций, выполнение которых при наличии возможностей привело бы к построению искомого элемента [16, с. 3]. Шаги построения могут сопровождаться воображаемой иллюстрацией, позволяющей представить промежуточные и итоговые результаты. Вопросами построения в пространстве достаточно активно занимались в первой половине XX в. В работах П. С. Александрова, А. И. Маркушевича [20], А. Н. Костовского [8], М. И. Орленко [10], А. Л. Пикус [11], Я. П. Понарина [15], Л. С. Горшковой и Е. В. Мариной [3] рассматриваются аксиоматические основы построений в пространстве. Обобщение положений, высказанных перечисленными выше авторами, а также теоретических представлений, изложенных в работах Н. Ф. Четверухина [18], Б. И. Аргунова и М. Б. Балка [1] на пространственный случай, позволяют выделить совокупность виртуальных инструментов для выполнения построений. За основу возьмем инструменты, предложенные П. С. Александровым и А. И. Маркушевичем [20, с. 201].

Линейка: через две различные точки можно провести прямую.

Плоскограф: через три различные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость.

Сферограф: можно построить сферу с центром в данной точке и радиусом, равным заданному отрезку.

В начальном курсе стереометрии доказывается ряд теорем, на основании которых можно расширить список случаев применимости выделенных инструментов [20] (таблица 1).

Таблица 1

Различные случаи применения основных инструментов

Инструмент	Построения	Обоснование
Линейка	Через две различные точки проведем прямую	Аксиома существования прямой
	Через две различные точки проведем отрезок	Определение отрезка
	Построим луч, исходящий из одной данной точки и проходящий через другую точку	Определение луча
Плоскограф	По трем различным точкам, не лежащим на одной прямой, построим плоскость	Аксиома существования плоскости
	Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость	Теорема о пересекающихся прямых
	Построим плоскость, проходящую через прямую и точку, не лежащую на этой прямой	Теорема о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку
	Построим плоскость, проходящую через две параллельные прямые	Определение параллельных прямых
Сферограф	Построим сферу с центром в данной точке и с радиусом, равным заданному отрезку	Определение сферы
	Построим сферу с центром в одной точке и проходящую через другую заданную точку	

С помощью описанных в таблице 1 инструментов можно строить различные пространственные объекты. Дополним их совокупность так называемыми базовыми построениями. К ним отнесем ряд утверждений, описанных Б. И. Аргуновым и М. Б. Балком, которые будем применять при решении задач на построение [1, с. 15–16]. Кроме того, в их число включим построение линии пересечения фигур, получаемых в результате применения основных инструментов. Условия, определяющие взаимное расположение построенных объектов, подробно описаны П. С. Александровым и А. И. Маркушевичем в [20]. Общая совокупность базовых построений представлена в таблице 2.

Таблица 2

Базовые построения в пространстве

Построение	Содержание построения	Результат построения
БП1	Можно построить точку, принадлежащую построенной фигуре	Произвольная точка фигуры
БП2	Можно построить точку, не принадлежащую построенной фигуре	Некоторая точка, лежащая вне фигуры
БП3	Можно построить любое конечное число точек, принадлежащих пересечению двух построенных фигур	Некоторое конечное число точек, принадлежащее пересечению фигур
БП4	Можно построить прямую пересечения двух плоскостей	Прямая
БП5	Можно построить линию пересечения двух сфер	Окружность (допустим случай вырождения окружности в точку)
БП6	Можно построить линию пересечения сферы и плоскости	

Описанные выше инструменты и базовые построения определяют минимальный набор действий, позволяющих выполнять построение пространственных объектов.

При обучении решению задач на построение на плоскости применяют стандартную схему, включающую анализ, построение, доказательство и исследование, подробное описание которой приведено, например, в работе В. А. Далингера [4, с. 25–28]. Адаптируем ее к пространственным построениям.

При решении задач существенное значение имеет описание множества исходных и искомых объектов. В своей работе Н. Г. Подаева, М. В. Подаев и П. А. Агафонов отмечают, что в процессе решения стереометрических задач необходимо создавать, преобразовывать и развивать наглядные или мысленные образы [13, с. 91]. Определение заданных условиями задачи основных пространственных фигур позволяет сформировать набор данных, с которыми обучающимся предстоит работать. Наглядное представление множества исходных и искомых объектов создает базу для дальнейшего решения задачи и дает возможность проверить правильность ее первичного понимания.

Ш. С. Зиядуллаева указывает, что при изучении стереометрии требуется: читать изображения фигур, мысленно представлять соответствующую конфигурацию, а также взаимодействовать одновременно с несколькими пространственными объектами [6, с. 30]. Соответственно требуется изучить взаимное расположение исходных объектов, что обосновывает появление различных вариантов решения задачи. С этой целью можно выполнить несколько различных иллюстративных чертежей как пространственных, так и плоскостных, позволяющих представить конфигурацию заданных и искомых фигур. Изображения могут быть выполнены любым способом, понятным учащимся. Кроме того, желательно обратить внимание школьников на те случаи, когда объекты лежат в одной плоскости, что дает возможность лучше соотнести плоскостные представления с пространственными.

Подготовленный на основе исходных данных чертеж с включенными в него искомыми элементами позволяет наглядно представить условия задачи, с помощью которого можем выполнять поиск ее решения. Этот этап назовем визуализацией.

Полученные результаты используем для проведения анализа, позволяющего составить план построения. Данный этап традиционно применяется при решении задач на построение, его основное содержание характеризуют Б. И. Аргунов, М. Б. Балк [1], В. А. Далингер [4], Н. Ф. Четверухин [18]. Поиск решения представляет собой творческий процесс, который не может быть описан однозначно. Его целью, как отмечал Н. Ф. Четверухин, является установление связей искомых элементов фигуры с данными по условию [18, с. 26]. Для того чтобы проведение анализа было более организованным, можно предложить следующий список вопросов.

1. Какими свойствами обладают исходные фигуры (описать список известных свойств)?
2. Какие фигуры могут быть добавлены к ним на основании указанных ранее свойств (построить эти фигуры)?
3. Какие фигуры могут быть построены с помощью ранее построенных фигур (описать результаты возможных операций над построенными фигурами)?
4. Если предположить, что задача решена и искомое построено, то можно изучить, результатом пересечения каких фигур может быть построенная фигура.
5. Если предположить, что искомое построено, то какими признаками оно обладает (описать список соответствующих признаков)?
6. Существует ли известная задача, решение которой можно использовать в процессе решения текущей?
7. Какие инструменты и базовые построения можно использовать для построения искомых объектов, а также применить по отношению к уже построенным объектам?

Указанный список вопросов не является полным и всеобъемлющим, однако он позволяет систематизировать и структурировать пространственные объекты, получаемые при поиске решения.

Каждое выполняемое при этом действие лучше рассматривать с точки зрения применимости инструментов и базовых построений, то есть конструктивно. Полученные при визуализации изображения объектов могут быть подвергнуты в ходе анализа изменениям и дополнениям. Особое внимание учащихся следует обратить на установление связи между известными теоремами школьного курса геометрии и описанными ранее инструментами, позволяющей обосновать возможность проведения построения.

По результатам анализа составляем план построения, основанный на последовательном применении инструментов и базовых построений и приводящий к искомому объекту. Как отмечают Б. И. Аргунов и М. Б. Балк [1], обоснование каждого шага ссылкой на соответствующее действие, определенное в таблицах 1 и 2, обеспечивает возможность его реализации. Кроме того, необходимо именовать каждый получаемый объект, что упрощает их восприятие.

Процесс построения в пространстве по своей сути является воображаемым, его физическая реализация невозможна. Обоснование корректности созданного плана позволяет говорить о том, что решение задачи найдено.

С. Кристоу, М. Питаллис и другие в своей работе [21] отмечают, что наглядность представляет собой важную часть подготовки школьников в процессе обучения стереометрии. Воплощение составленного плана построения дает возможность продемонстрировать взаимосвязи между стереометрическими объектами и изучить их взаимное расположение, что способствует лучшему пониманию решения задачи. Соответственно этап построения можно разделить на две части: описание шагов построения и их практическая реализация различными средствами. Для этого можно выполнить серию схематических чертежей, аналогичных тем, что создавались при визуализации и анализе. Подобные чертежи А. Д. Семушин называет иллюстративными и отмечает, что они закрепляют промежуточные этапы проводимых рассуждений и облегчают работу воображения [16, с. 155]. В результате формируется первичное представление о процессе построения. Современный уровень развития информационных технологий дает возможность описать основные инструменты и базовые построения в цифровом виде с помощью прикладных математических пакетов, что приводит к наглядной реализации созданного плана построения.

На этапе доказательства нужно обосновать тот факт, что объект, полученный в результате построения, действительно является искомым и удовлетворяет всем заданным условиям. Б. И. Аргунов и М. Б. Балк отмечают следующую особенность проведения доказательства в конструктивной геометрии: оно осуществляется в предположении, что каждый шаг построения может быть выполнен [1, с. 35]. Выделение признаков геометрических объектов, полученных при построении, и применение известных определений, аксиом, теорем, следствий из них дает возможность обосновать тот факт, что искомые объекты обладают всеми требуемыми свойствами. Как указывает В. А. Далингер, доказательство требуется в тех случаях, когда исходные условия задачи заменялись эквивалентными [4, с. 28]. Обоснование допустимости подобной замены значимо не только с математической, но и с методической точки зрения. Решение простейших задач на построение, когда доказательство фактически следует из составленного плана, может создать впечатление о формальности и ненужности данного этапа. Рассмотрение задач, требующих дополнительного обоснования построения, дает возможность не только изучить различные способы и стратегии доказательства, но и продемонстрировать различия между поиском решения и доказательством справедливости сделанных предположений.

При проведении визуализации, анализа, собственно построения и доказательства могут возникнуть ситуации, когда от положения или значений исходных объектов существенно меняется положение искомого. Их изучение осуществляется при проведении исследования, во время которого чаще всего ищут ответы на следующие вопросы [1; 4].

1. При каких условиях определен результат выполнения очередного шага, имеются ли ограничения? Если таковые существуют, то их нужно описать.

2. Сколько различных вариантов расположения объектов возникает при выполнении очередного шага?

3. Какие варианты расположения начальных данных возможны?

Пункты 2 и 3 в большинстве случаев позволяют ответить на вопрос о числе решений задачи. В случае пространственных построений процесс исследования осложняется в силу большего числа вариантов расположения, а также более разнообразных условий поиска их пересечения.

При проведении исследования не всегда очевидны изменения искомых объектов в зависимости от условий, накладываемых на исходные фигуры. Дополним схему этапом динамического конструирования, направленным на демонстрацию преобразований объектов, получаемых в процессе построения. Для этого в простейших случаях возможно применение иллюстративных чертежей. Кроме того, применение различных математических пакетов позволяет реализовать построение пространственных объектов и наглядно представить изменения искомых объектов в зависимости от положения или размеров исходных. Динамическое конструирование дает возможность проиллюстрировать процесс исследования, увидеть структуру отношений между пространственными объектами.

Приведем пример использования описанной выше расширенной схемы.

Задача. Постройте плоскость, перпендикулярную к данной прямой и проходящую через данную точку.

Визуализация. Выделим исходные данные и введем для них обозначения. По условию задачи дана прямая a и точка A. Требуется построить плоскость α.

В первую очередь нужно определить взаимное расположение точки A и прямой a. В данной работе изучим случай, когда точка A лежит на прямой a. Предположим, что плоскость построена. Для наглядности представления положения прямой и плоскости проведем в ней через точку A прямую и отметим прямой угол (рисунок 1).

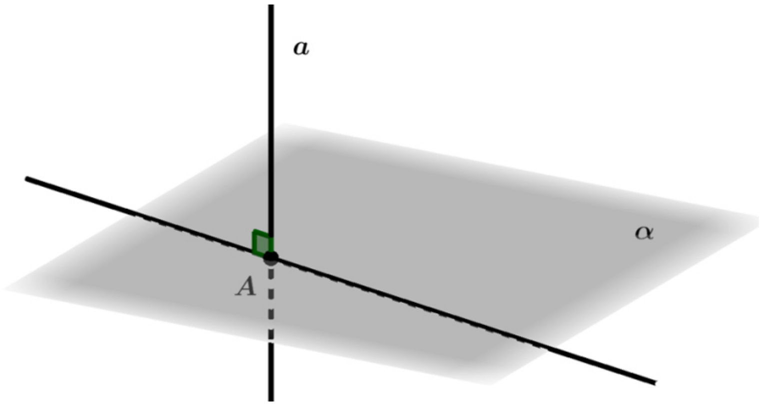

Рис. 1. Первичная модель задачи
с уточнением расположения прямой и плоскости

Построение дополнительной прямой основано на определении перпендикулярности прямой и плоскости. При выполнении визуализации желательно обратить внимание обучающихся на необходимость обоснования взаимного расположения изображаемых объектов.

Анализ. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости заключаем: если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости [9, с. 36]. Теорема позволяет сделать вывод, что достаточно построить две прямые перпендикулярные к данной и проходящие через точку *A*. Предположим, что такие прямые *b* и *c* построены (рис. 2). Тогда прямые *b* и *c* задают плоскость.

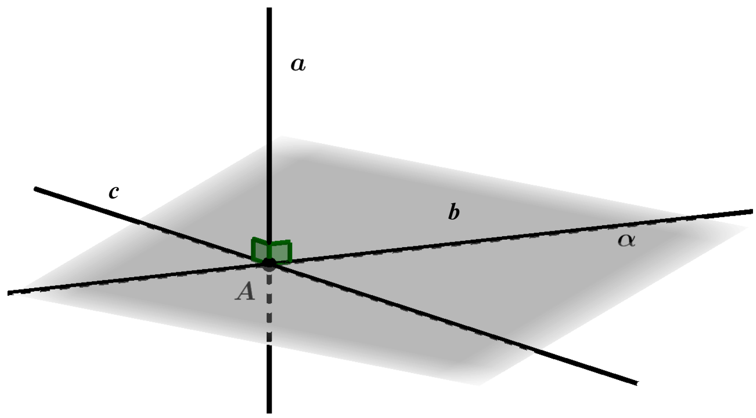

Рис. 2. Прямые, проходящие через точку А
и перпендикулярные к прямой а

Определим, как построить в плоскости прямую, перпендикулярную к данной и проходящую через заданную точку, лежащую на этой прямой. Известно, как решается данная задача на плоскости циркулем и линейкой. Найдем равноудаленные точки *P* и *Q* от точки *A* на данной прямой. Построим две окружности с центрами в этих точках и радиусом *PQ*. Прямая, проходящая через точки пересечения этих окружностей, является искомой. Воспользуемся такой идеей для нашей задачи. Заменим построение окружностей построением сфер. В плоскости, проходящей через окружность, образованную пересечением двух сфер, построенных на отрезке как на радиусе, концы которого равноудалены от точки *A*, будут лежать прямые, перпендикулярные к данной прямой *a*.

В процессе проведения анализа каждый шаг необходимо обсуждать с учащимися с точки зрения возможности построения рассматриваемых объектов. Последовательное создание иллюстраций, выполняемых как при визуализации, так и в процессе анализа, позволяет наглядно представить поиск решения.

Построение. Шаги можно реализовать практически с помощью специализированного математического пакета GeoGebra.

1. Построим исходную прямую *a* и точку *A*, лежащую на этой прямой (Линейка, БП1) (рис. 3).

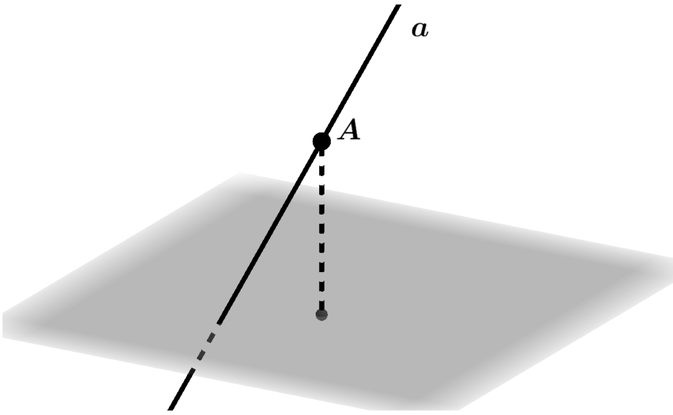

Рис. 3. Исходные данные

2. Построим сферу $\Omega(A,r)$, где *r* – произвольный радиус (Сферограф).

3. Найдем точки $\{P,Q\} = \Omega \cap a$ (БП3) (рис. 4).

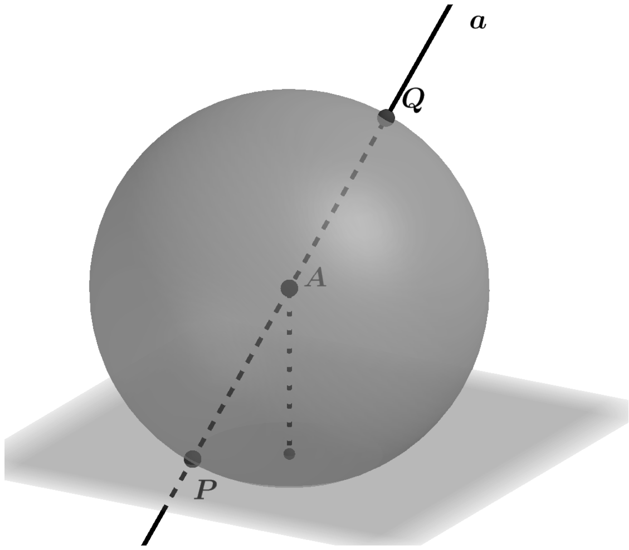

Рис. 4. Построение на прямой а равноудаленных от А точек

4. Построим сферы $\Omega_1(P,PQ)$ и $\Omega_2(Q,PQ)$ (Сферограф).

5. Построим окружность $\omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$ (БП5) (рис. 5).

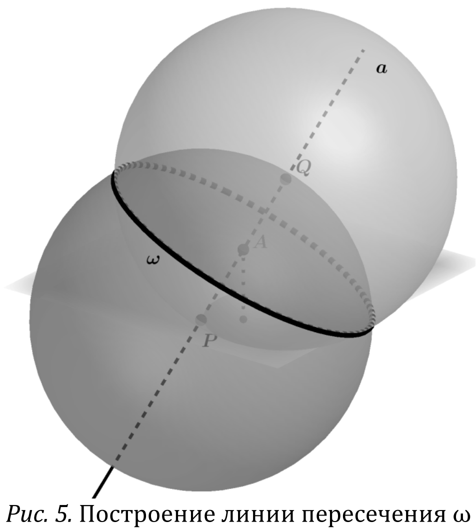

Рис. 5. Построение линии пересечения ω

6. Выберем три произвольные точки X, Y, Z, принадлежащие окружности ω (БП1).
7. Проведем плоскость α через данные точки (Плоскограф) (рис. 6).

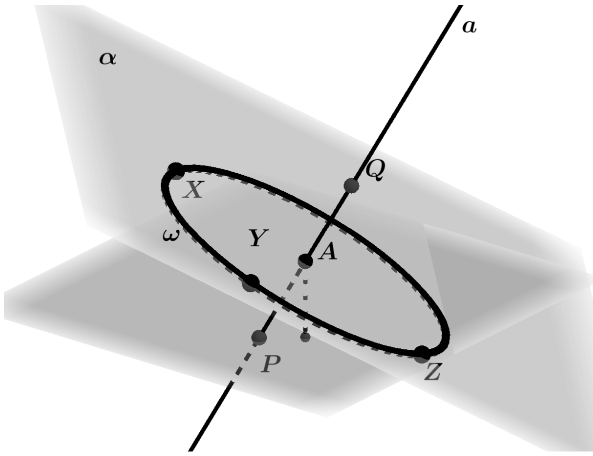

Рис. 6. Искомая плоскость

Плоскость α искомая.

Каждый шаг построения сопровождаем пояснением, какой инструмент или базовое построение было использовано, что обосновывает допустимость выполняемого действия.

Доказательство. Покажем, что построенная плоскость α действительно перпендикулярна данной прямой a и проходит через заданную точку A.

На построенной окружности ω выберем произвольные точки S и T. По построению треугольники PSQ и PTQ – равнобедренные и равные, их высоты проходят через середину основания – точку A. Тогда каждая точка окружности равноудалена от A. По определению она является центром окружности ω и принадлежит плоскости α. Прямые SA и ST перпендикулярны данной прямой и лежат в построенной плоскости. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая a перпендикулярна плоскости α.

Желательно акцентировать внимание учащихся на том факте, что доказательство не следует непосредственно из построения. Необходимо определить, какие выводы можно сделать из шагов построения, а какие на основе известных теорем школьного курса геометрии.

Исследование. Построение точек P и Q, а также окружности ω всегда возможно. С учетом теоремы о единственности перпендикуляра, содержащего данную точку, к плоскости задача всегда имеет единственное решение.

Основой для проведения исследования является оценка выполнимости отдельных шагов построения. В тех случаях, когда отдельный шаг не всегда может быть реализован, нужно описать условия, от которых зависит существование получаемых на нем объектов.

Динамическое конструирование. Поскольку задача всегда имеет единственное решение, то имеет смысл продемонстрировать учащимся данный факт. Смена положения прямой a и точки A приводит только к изменению положения искомой плоскости (рис. 7).

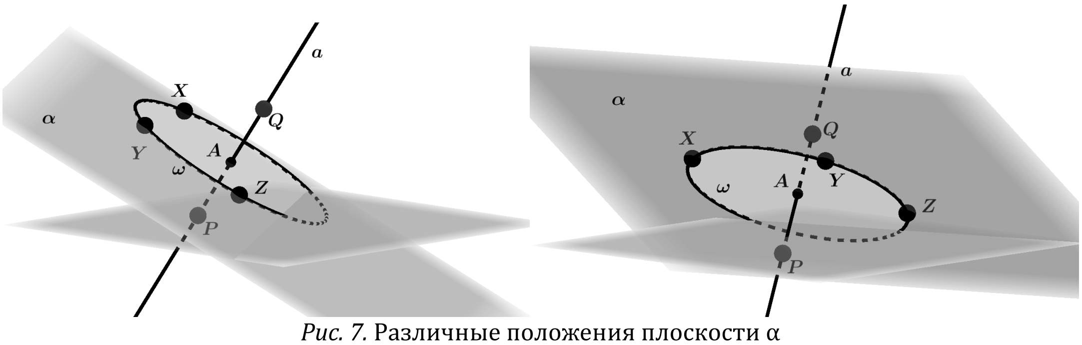

Рис. 7. Различные положения плоскости α

Итак, пространственные построения будем выполнять с помощью трех виртуальных инструментов, позволяющих получить прямую, плоскость и сферу. Дополним их базовыми построениями, направленными на отыскание результатов пересечения имеющихся в пространстве объектов, а также дающими возможность осуществить выбор точек, определенных различными условиями. Последовательное применение указанных простейших действий фактически представляет собой решение любой задачи на построение.

Дополнение традиционной схемы обучения, описанной в работах В. А. Далингера [4], Б. И. Аргунова, М. Б. Балка [1], Н. Ф. Четверухина [18] и других авторов, позволяет не только наглядно описать исходные и искомые объекты, но и выполнять над ними различные преобразования. Расширенная схема включает в себя следующие этапы:

1) визуализация;
2) анализ;
3) построение (описание и практическая реализация);
4) доказательство;
5) исследование;
6) динамическое конструирование.

Визуализация направлена на подробное изучение множества исходных и искомых объектов, а также их взаимного расположения. Сложность восприятия пространственных фигур требует более подробного изучения условий задачи и по возможности их наглядного представления. Тем самым формируется первоначальная база для проведения анализа. Разделение построения на две составные части обусловлено невозможностью физического выполнения построения с помощью инструментов в реальном пространстве, как это происходит на плоскости циркулем и линейкой. Практическая реализация в таком случае представляет собой желательный, но не обязательный шаг в решении задачи. Динамическое конструирование позволяет охарактеризовать преобразования, которые могут произойти с искомыми объектами при изменении положения начальных фигур. Кроме того, можно проиллюстрировать условия, определяющие существование искомых объектов.

Особенности практической реализации каждого из описанных выше этапов показаны на конкретной задаче. Применение расширенной схемы дополняет традиционно используемые этапы, что способствует формированию конструктивных и стереометрических представлений обучающихся.

Список литературы

1. *Аргунов Б. И., Балк М. Б.* Геометрические построения на плоскости. М. : Государственное учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1957. 268 с.

2. *Габеева Л. Н., Лубсанова Л. Б.* Развитие умений геометрических построений у учащихся старших классов посредством компьютерного моделирования // Общество: социология, психология, педагогика. 2021. № 6. С. 101–106. DOI: 10.24158/spp.2021.6.16.

3. *Горшкова Л. С., Марина Е. В.* Геометрические построения : учеб. пособие для студ. и преп. пед. вузов. Пенза : Изд-во ПГПУ имени В. Г. Белинского, 2008. 140 с.

4. *Далингер В. А.* Геометрия: планиметрические задачи на построение : учеб. пособие для вузов. М. : Юрайт, 2021. 155 с. URL: https://urait.ru/bcode/473822 (дата обращения: 28.03.2022).

5. *Далингер В. А.* Геометрия: стереометрические задачи на построение : учеб. пособие для среднего профессионального образования. М. : Юрайт, 2021. 189 с. URL: https://urait.ru/bcode/473295 (дата обращения: 28.03.2022).

6. *Зиядуллаева Ш. С.* Развитие пространственного воображения школьников в курсе геометрии с помощью интерактивных средств // International Independent Scientific Journal. 2020. № 15–3. С. 30–33.

7. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. URL: https://docs.cntd.ru/document/499067348?marker=6540IN (дата обращения: 28.03.2022).

8. *Костовский А. Н.* Геометрические построения одним циркулем на плоскости и одним лишь сферографом в пространстве. М. : Наука, 1989. 108 с.

9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Л. С. Атанасян [и др.]. М. : Просвещение, 2018. 256 с.

10. *Орленко М. И.* Решение геометрических задач на построение : пособие для учителей средней школы. Минск : Государственное учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения БССР, 1958. 440 с.

11. *Пикус А. Л.* Вопросы теории и методики геометрических построений в пространстве : дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.00. Ленинград, 1955. 344 с.

12. *Подаева Н. Г., Агафонов П. А.* Геометрические задачи на построение в электронной образовательной среде как средство развития понятийных психических структур обучающихся: социокультурный подход // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Гуманитарные науки. 2020. № 12–2. С. 103–109.

13. *Подаева Н. Г., Подаев М. В., Агафонов П. А.* Развитие деятельности одаренных школьников по овладению геометрическими понятиями в образных структурах // Психология образования в поликультурном пространстве. 2021. № 2 (54). С. 89–96.

14. *Подаева Н. Г., Подаев М. В., Агафонов П. А.* Формирование понятий в процессе обучения геометрии школьников в электронной образовательной среде // Научно-методический электронный журнал "Концепт". 2019. № 6. С. 10–25. URL: https://e-koncept.ru/2019/June.htm (дата обращения: 28.03.2022).

15. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия : Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. М. : МЦНМО, 2006. 256 с.

16. *Семушин А. Д.* Методика обучения решению задач на построение в пространстве. М. : Изд-во академии педагогических наук РСФСР, 1959. 156 с.

17. *Тухолко Л. Л.* Условия развития конструктивной деятельности учащихся X–XI классов при обучении геометрии // Весцi БДПУ. Серыя 3. 2013. № 2. С. 39–44.

18. *Четверухин Н. Ф.* Методы геометрических построений : учеб. пособие для пед. институтов. М. : Государственное учебно-педагогическое изд-во Министерства просвещения РСФСР, 1952. 148 с.

19. *Шлыков В. В.* Структурные и методические особенности курса стереометрии // Матэматыка: праблемы выкладання. 2008. № 4. С. 20–30.

20. Энциклопедия элементарной математики. Книга 4. Геометрия. М. : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1953. 568 с.

21. Developing an Active Learning Environment for the Learning of Stereometry / Christou C., Pittalis M., Mousoulides N., Pitta D., Jones K., Sendova E., Boytchev P. Paper presented at the 8 th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT8), Hradec Králové, Czech Republic, July 1–4, 2007.

22. *Rumanova L., Vallo D., Duris V.* Didactical Phenomena of Unusual Geometry Tasks in Teaching of Stereometry // Procedia – Social and Behavioral Sciences. May 2015. Vol. 186. Pp. 354–358.

23. *Lebamovski P.* Model of a stereoscopic system for stereometry training in middle and upper course // Science Series Innovative STEM Education. 2020. Vol. 2. Pp. 70–78.

24. *Lebamovski P., Petkov E.* Usage of 3d technologies in stereometry training. Proceedings of CBU in Social Sciences. № 1. Pp. 139–145. DOI: 10.12955/pss.v1.61.

25. *Zaranis N., Exarchakos G. M.* How ICT Affects the Understanding of Stereometry Among University Students // International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies (IJWLTT). № 13 (1). Pp. 37–49. DOI: 10.4018/IJWLTT.2018010103.

Teaching methods for solving problems for building in space based on an extended scheme

N. V. Leontieva
PhD in Pedagogical Sciences, Glazov State Pedagogical Institute n. a. V. G. Korolenko.
Russia, Glazov. ORCID: 0000-0001-9716-907X. E-mail: leonteva-natalia-0812@yandex.ru

Abstract. The study of the basics of constructive geometry on the plane contributes to the formation of logical and spatial thinking among schoolchildren, creates conditions for the systematization of geometric knowledge. This range of issues is practically not included in the systematic course of stereometry. Some constructive ideas make it possible to deepen and expand the training of students in mathematics. The creation of an elliptical course aimed at solving problems of construction in space makes it possible to continue the development of spatial and stereometric representations. The purpose of the study was to study the teaching methods for solving problems on building in space based on an extended scheme. To do this, we will define the main theoretical provisions that make it possible to perform spatial constructions. We will introduce into consideration virtual tools that allow you to build three main spatial objects: a straight line, a plane and a sphere, as well as basic constructions that make it possible to find their intersections. When solving the problem, an extended scheme is used, including visualization, analysis, construction (description and practical implementation), proof, research and dynamic design. The application of the proposed scheme is considered by the example of the problem of constructing a plane perpendicular to a straight line and passing through a point lying on this straight line. The separation of logical and visual stages determines the significance of the figurative representation of the initial and initial objects, and also establishes the relationship between the various types of actions performed in the process of solving the problem. The consistent formation of constructive representations on the basis described above makes it possible to systematize and generalize the studied stereometric material, to better understand the mutual arrangement of various spatial objects both in stationary and dynamic modeling.

Keywords: stereometry, tasks for building in space, stereometry teaching methodology, extended scheme, spatial thinking, constructive geometry in space.

References

1. *Argunov B. I., Balk M. B. Geometricheskie postroeniya na ploskosti* [Geometric constructions on a plane]. M. State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR. 1957. 268 p.

2. *Gabeeva L. N., Lubsanova L. B. Razvitie umenij geometricheskih postroenij u uchashchihsya starshih klassov posredstvom komp'yuternogo modelirovaniya* [The development of geometric construction skills in high school students using computer modeling] // *Obshchestvo: sociologiya, psihologiya, pedagogika* – Society: sociology, psychology, pedagogy. 2021. No. 6. Pp. 101–106. DOI: 10.24158/sPp.2021.6.16.

3. *Gorshkova L. S., Marina E. V. Geometricheskie postroeniya : ucheb. posobie dlya stud. i prep. ped. vuzov* [Geometric constructions : textbook. a manual for students. and prep. ped. universities]. Penza. PSPU n. a. V. G. Belinsky. 2008. 140 P.

4. *Dalinger V. A. Geometriya: planimetricheskie zadachi na postroenie : ucheb. posobie dlya vuzov* [Geometry: planimetric problems for construction : textbook for universities]. M. Yurayt. 2021. 155 p. Available at: https://urait.ru/bcode/473822 (date accessed: 28.03.2022).

5. *Dalinger V. A. Geometriya: stereometricheskie zadachi na postroenie : ucheb. posobie dlya srednego professional'nogo obrazovaniya* [Geometry : stereometric tasks for construction: studies. manual for secondary vocational education]. M. Yurayt. 2021. 189 p. Available at: https://urait.ru/bcode/473295 (date accessed: 28.03.2022).

6. *Ziyadullaeva Sh. S. Razvitie prostranstvennogo voobrazheniya shkol'nikov v kurse geometrii s pomoshch'yu interaktivnyh sredstv* [Development of spatial imagination of schoolchildren in the course of geometry using interactive means] // *International Independent Scientific Journal* – International Independent Scientific Journal. 2020. No. 15-3. Pp. 30–33.

7. *Koncepciya razvitiya matematicheskogo obrazovaniya v Rossijskoj Federacii* – The concept of the development of mathematical education in the Russian Federation. Available at: https://docs.cntd.ru/document/499067348?marker=6540IN (date accessed: 28.03.2022).

8. *Kostovskij A. N. Geometricheskie postroeniya odnim cirkulem na ploskosti i odnim lish' sferografom v prostranstve* [Geometric construction is represented by one compass on the plane and one extra spherograph in space]. M. Nauka (Science). 1989. 108 p.

9. *Matematika: algebra i nachala matematicheskogo analiza, geometriya. Geometriya. 10–11 klassy : ucheb. dlya obshcheobrazovat. organizacij: bazovyj i uglublennyj urovni* – Mathematics: algebra and the beginning of mathematical analysis, geometry. Geometry. Grades 10–11: textbook for general educational organization: basic and advanced levels / L. S. Atanasyan [et al.]. M. Prosveshchenie (Enlightenment). 2018. 256 p.

10. *Orlenko M. I. Reshenie geometricheskih zadach na postroenie : posobie dlya uchitelej srednej shkoly* [Solving geometric problems for construction : manual for secondary school teachers]. Minsk. State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the BSSR. 1958. 440 p.

11. *Pikus A. L. Voprosy teorii i metodiki geometricheskih postroenij v prostranstve : diss. ... kand. ped. nauk: 13.00.00* [Questions of theory and methodology of geometric construction in space : diss. ... PhD in Pedagogical Sciences: 13.00.00]. L. 1955. 344 p.

12. *Podaeva N. G., Agafonov P. A. Geometricheskie zadachi na postroenie v elektronnoj obrazovatel'noj srede kak sredstvo razvitiya ponyatijnyh psihicheskih struktur obuchayushchihsya: sociokul'turnyj podhod* [Geometric tasks for building in an electronic educational environment as a means of developing conceptual mental structures of students: a socio-cultural approach] // *Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya: Gumanitarnye nauki* – Modern science: actual problems of theory and practice. Series: Humanities. 2020. No. 12-2. Pp. 103–109.

13. *Podaeva N. G., Podaev M. V., Agafonov P. A. Razvitie deyatel'nosti odarennyh shkol'nikov po ovladeniyu geometricheskimi ponyatiyami v obraznyh strukturah* [Development of the activity of gifted schoolchildren in mastering geometric concepts in figurative structures] // *Psihologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve* – Psychology of education in multicultural space. 2021. No. 2 (54). Pp. 89–96.

14. *Podaeva N. G., Podaev M. V., Agafonov P. A. Formirovanie ponyatij v processe obucheniya geometrii shkol'nikov v elektronnoj obrazovatel'noj srede* [Formation of concepts in the process of teaching geometry to schoolchildren in an electronic educational environment] // *Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal "Koncept"* – Scientific and methodological electronic journal "Concept". 2019. No. 6. Pp. 10–25. Available at: https://e-koncept.ru/2019/June.htm (date accessed: 28.03.2022).

15. *Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya : T. 2: Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva* [Elementary geometry : vol. 2: Stereometry, space transformation]. M. ICNMO. 2006. 256 p.

16. *Semushin A. D. Metodika obucheniya resheniyu zadach na postroenie v prostranstve* [Teaching methods for solving problems on construction in space]. M. Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR. 1959. 156 p.

17. *Tuholko L. L. Usloviya razvitiya konstruktivnoj deyatel'nosti uchashchihsya X–XI klassov pri obuchenii geometrii* [Conditions for the development of constructive activity of students of grades X–XI when teaching geometry] // *Vesci BDPU* – News of BSPU. Series 3. 2013. No. 2. Pp. 39–44.

18. *Chetveruhin N. F. Metody geometricheskih postroenij : ucheb. posobie dlya ped. institutov* [Methods of geometric constructions : textbook for ped. institutions]. M. State Educational and Pedagogical Publishing House of the Ministry of Education of the RSFSR. 1952. 148 p.

19. *Shlykov V. V. Strukturnye i metodicheskie osobennosti kursa stereometrii* [Structural and methodological features of the course of stereometry] // *Matematyka: prablemy vykladannya* – Mathematics: problems of construction. 2008. No. 4. Pp. 20–30.

20. *Enciklopediya elementarnoj matematiki. Kniga 4. Geometriya* – Encyclopedia of Elementary Mathematics. Book 4. Geometry. M. State Publishing House of Physical and Mathematical literature. 1953. 568 p.

21. Developing an Active Learning Environment for the Learning of Stereometry / Christou C., Pittalis M., Mousoulides N., Pitta D., Jones K., Sendova E., Boytchev P. Paper presented at the 8 th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT8), Hradec Králové, Czech Republic, July 1–4, 2007.

22. *Rumanova L., Vallo D., Duris V.* Didactical Phenomena of Unusual Geometry Tasks in Teaching of Stereometry // Procedia – Social and Behavioral Sciences. May 2015. Vol. 186. Pp. 354–358.

23. *Lebamovski P.* Model of a stereoscopic system for stereometry training in middle and upper course // Science Series Innovative STEM Education. 2020. Vol. 2. Pp. 70–78.

24. *Lebamovski P., Petkov E.* Usage of 3d technologies in stereometry training. Proceedings of CBU in Social Sciences. No. 1. Pp. 139–145. DOI: 10.12955/pss.v1.61.

25. *Zaranis N., Exarchakos G. M.* How ICT Affects the Understanding of Stereometry Among University Students // International Journal of Web-Based Learning and Teaching Technologies (IJWLTT). No. 13 (1). Pp. 37–49. DOI: 10.4018/IJWLTT.2018010103.