УДК 371.134.51+517.17 DOI: 10.25730/VSU.7606.21.004

О качестве подачи читателю методических материалов по выпуклым функциям в ряде опубликованных работ

С. И. Калинин
доктор педагогических наук, профессор, Вятский государственный университет.
Россия, г. Киров. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Аннотация. Внимание читателя акцентируется на решении такой научно-методической проблемы, как качество представления учебных материалов по теме «Выпуклые функции» в журнальных статьях. Подробно анализируется содержание четырех ранее опубликованных работ разных авторов, посвященных конкретным аспектам изучения данной темы со студентами и школьниками. Эти аспекты восходят к вопросам работы с определениями понятия выпуклой функции, исследованию функций и их графиков на выпуклость/вогнутость элементарными средствами без обращения к методам дифференциального исчисления, а также применению свойств выпуклых функций при решении уравнений.

Упоминаемые работы анализируются именно с позиций качества подачи читателю методических материалов, в частности обсуждается корректность и целесообразность использования в образовательной практике выдвигаемых авторами положений, указывается на допускаемые ими математические и фактические ошибки, методические заблуждения и издержки, отмечается небрежность оформления текстов. Выносимая на суд читателя статья отстаивает принципы фундаментальности и преемственности в организации содержания обучения основам математического анализа в высшей и средней школах.

Ключевые слова: выпуклая функция, вогнутая функция, выпуклость по Иенсену, корректность метода, работа с определением понятия, уравнение.

0. Введение. В настоящей статье внимание читателя будет акцентировано на содержании четырех статей с методическими материалами, опубликованных в различных журналах в разные годы и посвященных вопросам обучения выпуклым функциям студентов и школьников. Мы намерены охарактеризовать корректность или целесообразность рассуждений авторов в некоторых фрагментах упоминаемых работ с точки зрения пользы для читателя и возможности применения представляемых положений в практике обучения математике, то есть остановиться на качестве данных материалов.

При достижении своих целей условимся следовать, во-первых, общедидактическому принципу преподавания – принципу фундаментальности, обеспечивающему высокий научный уровень, системность и глубину содержания математического образования. Кроме того, при конструировании содержания обучения выпуклым функциям будем соблюдать принцип преемственности, который учитывает традиции, присущие ведущим российским вузам и общеобразовательным школам в обучении математике, и использует положительный опыт, накопленный на сегодня в отечественном и зарубежном математическом образовании.

С позиций отмеченных принципов сначала напомним читателю принятые в математических курсах классические определения понятия выпуклой функции и воспроизведем некоторые важные свойства таких функций.

Определение А. Функция $f: l \to \mathbf{R}$ называется *выпуклой* на промежутке l числовой прямой Ox, если для любых чисел a и b из l и любого $\lambda \in [0;1]$ выполняется неравенство

$$f\big(\lambda a + (1-\lambda)b\big) \le \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \qquad (0.1)$$

Если вместо (1) для любых различных чисел a и b из l и любого $\lambda \in (0;1)$ выполняется неравенство

$$f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)<\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b), \tag{0.2}$$

то функция *f* называется *строго выпуклой* на рассматриваемом промежутке *l*.

Очевидно, строго выпуклая функция является выпуклой.

Аналогично определяются *вогнутая* и *строго вогнутая* функции – для этого в неравенствах (0.1)–(0.2) следует использовать знаки $\geq$ и > соответственно.

График выпуклой функции называют выпуклым, или выпуклой кривой. Аналогичный перенос терминологии реализуется в отношении графиков вогнутой функции, строго выпуклой, строго вогнутой функций.

С геометрической точки зрения свойство выпуклости (строгой выпуклости) функции *f* на промежутке *l* означает следующее: для любого отрезка $\left[a;b\right]\subset l$ внутренние точки графика сужения $f\big|_{[a;b]}$ данной функции на этот отрезок лежат не выше (ниже) соответствующих точек хорды, стягивающей концы графика $A\left(a;f(a)\right)$, $B\left(b;f(b)\right)$ (см. рис. 1–2). Отмечаемое следует из оценок

$$f(x)=f\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right)\leq(<)\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b),\ x\in(a;b),$$

поскольку уравнение $y=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$ задает прямую, проходящую через точки $A\left(a;f(a)\right)$ и $B\left(b;f(b)\right)$.

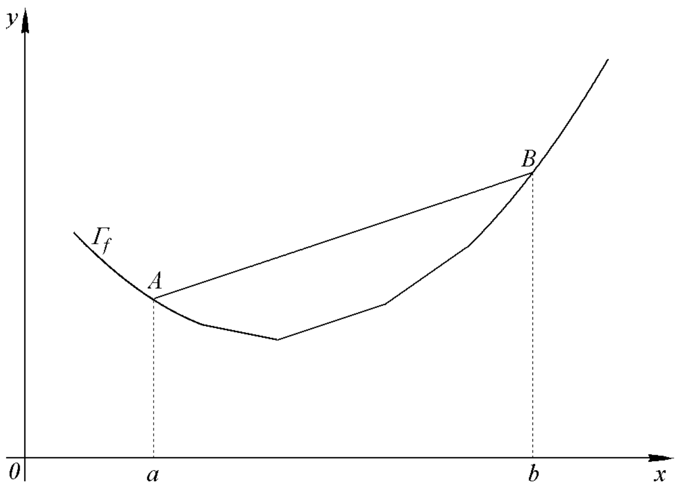

Рис. 1

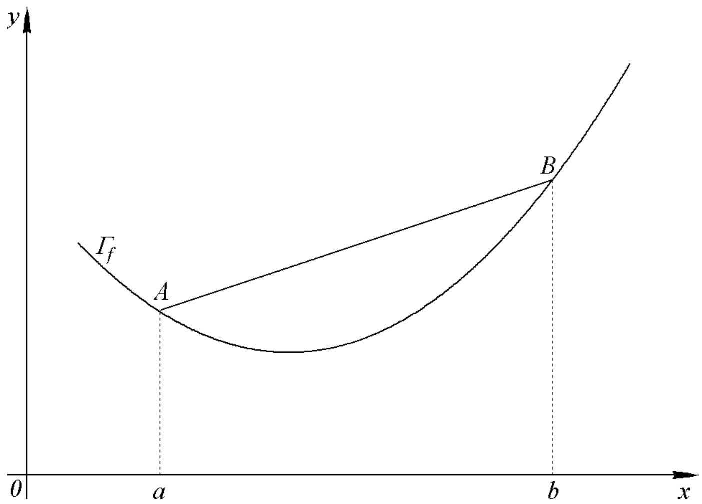

Рис. 2

Если же f – вогнутая (строго вогнутая) на промежутке l функция, то для любого отрезка $[a;b]\subset l$ внутренние точки графика сужения $f|_{[a;b]}$ будут находиться не ниже (выше) точек хорды, стягивающей концы этого графика $A\left(a;f(a)\right)$, $B\left(b;f(b)\right)$ (см. рис. 3–4).

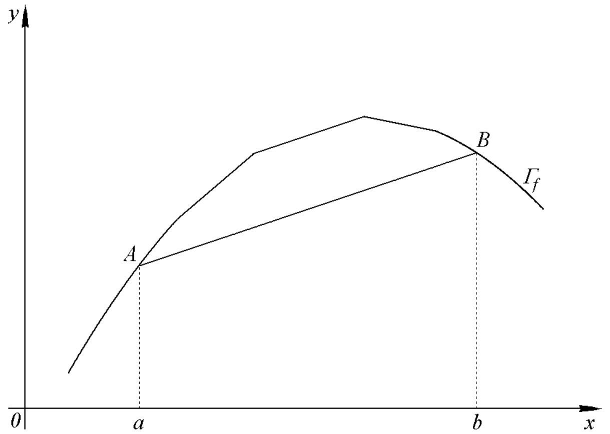

Рис. 3

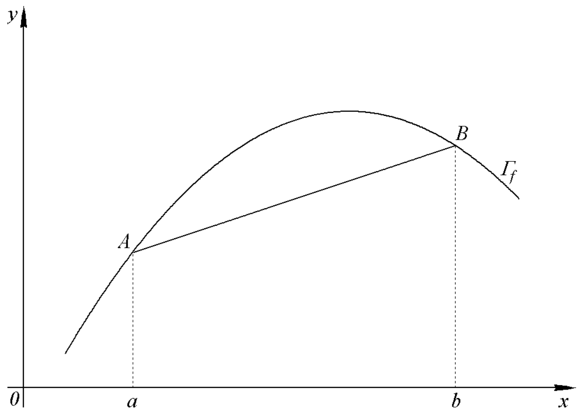

Рис. 4

Рассмотрим ряд примеров.

На всей числовой прямой функция $f_1(x)=|x|$ – выпуклая, а функция $f_2(x)=x^2$ – строго выпуклая.

На промежутке $(-\infty;0]$ функция $f_3(x)=x^3$ – строго вогнутая, а на промежутке $[0;+\infty)$ она будет строго выпуклой.

Функция $sign\ x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ является выпуклой на промежутке $(-\infty;0]$ и вогнутой на промежутке $[0;+\infty)$.

Функция $f_4(x)=\begin{cases}x^3+1, x<0\\ 0, x=0\\ x^2-1, x>0\end{cases}$ будет строго вогнутой на промежутке $(-\infty;0]$ и строго выпуклой на промежутке $[0;+\infty)$.

Обратим внимание читателя на то, что в приведенных примерах функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ на соответствующих промежутках их выпуклости или вогнутости являются непрерывными, чего нельзя сказать о функции $sign\ x$ и функции $f_4(x)$.

Подчеркнем, приведенное выше определение понятия выпуклой функции используется, например, в таких авторитетных монографиях, как [10], [15], [16], [21], [22], а также многочисленных статьях по тематике выпуклости (см., напр., [12–14], [19–20], [23], [25]).

Замечание 1. Нередко (см., скажем, [6]) выпуклую функцию называют выпуклой вниз, а вогнутую – выпуклой вверх.

Из определения А следует, что если *f* – выпуклая на промежутке *l* функция, то для любых чисел *a* и *b* из *l* справедливо, в частности, неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{0.3}$$

которое при $a \ne b$ будет строгим, если *f* – строго выпуклая на *l* функция.

Из монографии [15] можно узнать, что датский математик Иенсен (J.L.W.V. Jensen) в своей работе [18] от 1906 г. понятие выпуклой функции ввел именно через посредство соотношения (0.3). В этой связи сформулируем

Определение Б. Функцию $f(x)$ назовем *выпуклой по Иенсену* на промежутке *l*, если для любых чисел *a* и *b* из *l* выполняется неравенство (0.3).

Вогнутая по Иенсену на рассматриваемом промежутке функция будет характеризоваться сменой знака неравенства в (0.3) на знак $\ge$.

Геометрически выпуклость (строгая выпуклость) по Иенсену функции *f* на промежутке *l* означает следующее: для любого отрезка $[a;b] \subset l$ точка $C\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ графика данной функции лежит не выше (ниже) середины отрезка, соединяющего точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ этого графика.

Аналогично характеризуется вогнутость (строгая вогнутость) по Иенсену функции *f* на промежутке *l*: точка $C\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ будет лежать не ниже (выше) середины отрезка, соединяющего точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ графика функции.

Очевидно, требование выполнения неравенства (0.3) более слабое, чем требование выполнения неравенства (0.1). Иными словами, выпуклая функция является выпуклой и по Иенсену.

Можно также заключить, что понятие выпуклости функции по Иенсену является более общим понятием, нежели понятие выпуклости в смысле определения 1.

Замечание 2. Из статьи «Выпуклая функция» Математической Энциклопедии [8, столбец 793] читатель может извлечь для себя такую информацию: существуют разрывные выпуклые по Иенсену функции, неограниченные на каждом внутреннем интервале из интервала выпуклости, т. е. такие функции могут быть «очень нерегулярными».

Известно, что если функция *f* непрерывна на промежутке *l* числовой прямой и является выпуклой по Иенсену на этом промежутке, то она выпукла на *l* и в смысле определения 1. С доказательством данного факта читатель может познакомиться, обратившись, например, к недавней статье [5]. Таким образом, для непрерывных функций определения А и Б являются *эквивалентными*. Настроим читателя помнить о данном факте при осмыслении текста, следующего ниже.

Перейдем к характеризации методических материалов, посвященных выпуклым функциям и представленных в соответствующих публикациях.

1. К вопросу об исследовании элементарных функций на выпуклость без обращения к производным. В работе [1] предпринимается попытка описания процедуры исследования функций на монотонность и выпуклость без использования средств дифференциального исчисления. Аспект, связанный с монотонностью, мы здесь опустим; остановимся только на выпуклости, следуя теме настоящей статьи.

Автор цитируемой статьи предлагает читателю к рассмотрению следующий алгоритм исследования функций на выпуклость, опираясь на определение 2 выпуклости функции по Иенсену.

Составляется величина

$$\Delta(x_1,x_2)=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

которую нужно попытаться представить в виде

$$\Delta(x_1,x_2)=B(x_1,x_2)\cdot A(x_1,x_2),$$

где *A* и *B* – такие множители, что при $x_1=x_2$ множитель *B* обращается в нуль, а *A* – нет, при этом при $x_1\neq x_2$ для *B* должно выполняться неравенство $B(x_1,x_2)>0$. В приведенных условиях от знака *A* будет зависеть знак величины Δ, и по этому знаку можно тогда судить о выпуклости или вогнутости в строгом смысле исследуемой функции *f*.

Поиск промежутков строгой выпуклости или строгой вогнутости функции предлагается осуществлять следующим образом. Автором вводится в рассмотрение величина $\varphi(x)=A(x,x)$, называемая функцией обобщения, при этом констатируется, что «решение неравенства $\varphi(x)>0$ определяет промежутки выпуклости вверх графика функции» *f*, а «решение неравенства $\varphi(x)<0$ определяет промежутки выпуклости вниз графика функции». Нули функции φ автор почему-то называет точками перегиба.

Описанный алгоритм исследования функции на выпуклость в статье [1] называется звучно «методом обобщения». Подчеркнем, что никакого строгого обоснования справедливости такого «метода» в статье не приводится, что, естественно, не является допустимым.

«Работу» метода обобщения автор иллюстрирует исследованием на строгую выпуклость или вогнутость таких основных элементарных функций, как x^2, x^3, x^{-1}, a^x, $\sin x$ [1, с. 6–7]. Анализ представленных в статье рассуждений позволяет заключить, что все перечисленные функции на строгую выпуклость по Иенсену исследуются по определению совершенно просто, – прибегать к искусственному выделению множителей типа $A(x_1,x_2)$ и $B(x_1,x_2)$ совсем не требуется. Покажем это.

Возьмем, к примеру, функцию $y=x^3$. Для нее величина

$$\Delta(x_1,x_2)=y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{y(x_1)+y(x_2)}{2}$$

имеет вид

$$\Delta(x_1,x_2)=(x_2-x_1)^2\cdot\left(-\frac{3}{8}(x_1+x_2)\right). \tag{1.1}$$

Из (1.1) следует, что если значения x_1 и x_2 принадлежат интервалу $(0;+\infty)$, то величина $\Delta(x_1,x_2)$ – отрицательная, т. е. на этом интервале функция $y=x^3$ будет строго выпуклой. Если же данные значения принадлежат интервалу $(-\infty;0)$, то на нем $\Delta(x_1,x_2)>0$, и, следовательно, функция $y=x^3$ на этом промежутке будет строго вогнутой.

Подчеркнем, для сформулированного вывода в отношении рассмотренной функции не нужно выделять описанные выше множители $A(x_1,x_2)$ и $B(x_1,x_2)$, а также искусственно вводить «функцию обобщения» $\varphi(x)$.

Для остальных функций рассуждения точно такие же.

Заметим, автор для иллюстрации своего метода не рассматривает степенных функций с большим показателем, например, функций типа $y=x^{2021}$. В этом случае расщепление величины $\Delta(x_1, x_2)$ на подходящие сомножители технически реализовать крайне затруднительно (читатель может убедиться в этом). Не удастся ввести и функцию $\varphi(x)$.

В заключение данного раздела приведем доказательство строгой вогнутости основной элементарной функции $y = \ln x$, почему-то не рассмотренной автором обсуждаемой статьи.

Для любых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 \neq x_2$ имеем:

$$\ln\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} = \ln\frac{x_1 + x_2}{2\sqrt{x_1 x_2}} > 0.$$

Следовательно, функция $y = \ln x$ является строго вогнутой на интервале $(0;+\infty)$.

Как видим, реализованное доказательство строгой вогнутости функции $y = \ln x$ по определению является чрезвычайно простым.

2. О работе с определениями понятия выпуклой функции. В данном разделе статьи остановимся на работе [3], авторы которой, опираясь на учебники по математическому анализу для студентов инженерно-технических и физико-математических специальностей, воспроизводят для обсуждения с читателем следующие три определения понятия строгой выпуклости вверх (т. е. строгой вогнутости) графика функции.

«**Определение 1.** График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) в данном промежутке, если он целиком расположен ниже (выше) касательной в его произвольной точке».

«**Определение 2.** График функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) в данном промежутке, если каждая хорда кроме ее концов) лежит ниже (выше) соответствующей части графика этой функции».

«**Определение 3.** График функции $y = f(x)$, определенной на интервале (a,b), называется выпуклым вверх в данном интервале, если для любых точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и любого числа $t \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) > tf(x_1) + (1-t)f(x_2), \tag{1}$$

в частности, если имеет место неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{2}$$

Вогнутость вниз определяется аналогично, но при этом изменяется знак неравенства на противоположный».

Все три определения мы приводим в редакции авторов статьи [3, с. 30], которые определения 1 и 2 относят к так называемому первому подходу введения определения понятия выпуклости или вогнутости графика функции, а определение 3 – ко второму подходу.

Вдумчивое осмысление приведенных определений сразу обнаруживает следующие издержки.

Подчеркнем, определение 1 может применяться только к дифференцируемым функциям. Данное ограничение сужает класс рассматриваемых функций. Кроме того, оно в самом конце должно содержать оговорку: «кроме точки касания», поскольку точка касания касательной к графику функции принадлежит и графику, и касательной.

Логично отметить, что определение 2 есть геометрическая характеризация строго вогнутой функции (см. Введение), а определение 1 есть ни что иное, как свойство гладкой строго вогнутой функции.

В формулировании определения 3 необходимо дополнительное условие на точки $x_1, x_2 \in (a,b)$ – они должны быть различными, т. е. $x_1 \neq x_2$, иначе неравенство (1) обратится в равенство. В этом аналитическом определении авторы используют сразу два неравенства – (1) и (2).

В данном месте позволим себе не согласиться с их высказыванием о том, что «многие авторы учебников для физико-математических специальностей определяют» понятия выпуклости графика функции вверх (вниз) «только с аналитической точки зрения (определение 3)», т. е. по определению, цитируемому выше. Конечно же, это не так. В упоминаемых учебниках понятия строгой выпуклости вверх функции (с использованием в определении неравенства (1)) и строгой выпуклости вверх функции по Иенсену (с использованием в определении неравенства (2)), как правило, четко разводятся.

При чтении статьи [3] создается впечатление, что ее авторы не понимают сути вводимого ими определения 3. Такой вывод подтверждает следующий фрагмент на с. 32 (второй абзац) цитируемой работы: «Функция, удовлетворяющая неравенству (2), удовлетворяет и неравенству (1), но класс функций, удовлетворяющих неравенству (1), шире». Нет! Это не так, авторы допускают грубейшую ошибку: во Введении мы отмечали, что шире класс выпуклых (вогнутых) по Иенсену функций.

Остановимся сейчас на теореме 1, которая обсуждается в статье [3, с. 32]. Она авторами формулируется так.

«**Теорема 1.** Если функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале (a,b), то определения 2 и 3 выпуклости графика функции $y=f(x)$ эквивалентны».

Анализ приводимого в статье доказательства этой теоремы позволяет сказать, что в его реализации при характеризации выпуклости графика функции *f* по определению 3 авторы пользуются неравенством (1), т. е. они рассматривают строго выпуклую по определению А функцию.

Обратим внимание читателя на то, что с учетом только что сделанного замечания условие непрерывности в формулировке теоремы 1 можно опустить, т. е. оно является совершено лишним.

Действительно, очевидно, что если функция *f* на интервале (a,b) является строго выпуклой в смысле определения А, то она будет такой и в смысле определения 2. Это следует из геометрической характеризации строгой выпуклости функции на интервале (см. Введение).

Покажем, что справедливо и обратное. Пусть *f* – выпуклая функция в смысле определения 2. Установим, что для произвольных различных точек $x_1, x_2 \in (a,b)$ и произвольного $t \in (0;1)$ тогда будет выполняться неравенство

$$f\left(tx_1+(1-t)x_2\right)<tf(x_1)+(1-t)f(x_2). \tag{2.1}$$

Для этого положим $x=tx_1+(1-t)x_2$. В силу условия $t\in(0;1)$ точка *x* принадлежит отрезку *L* с концами в точках x_1 и x_2 и для нее будет иметь место неравенство

$$f(x)<\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2), \tag{2.2}$$

ибо уравнение

$$y=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2),\ x\in L,$$

порождаемое правой частью (2.2), есть уравнение хорды, соединяющей точки $A_1\left(x_1; f(x_1)\right)$ и $A_2\left(x_2; f(x_2)\right)$ графика функции *f*.

Так как $t=\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}$, $1-t=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$, то из (2.2) следует (2.1). Нужное показано.

Предложенное доказательство теоремы 1 при более слабых ограничениях существенно короче, нежели ее обоснование в [3].

В конце статьи авторы помещают такой абзац [3, с. 34]: «Итак, предложенная методика изложения материала по теме выпуклости и вогнутости графика функции на промежутке, как показывает многолетний опыт работы, дает высокие результаты в качестве освоения данной темы, что означает ценность и полезность данной работы».

Возможно, авторам в своей педагогической деятельности действительно удается хорошо научить студентов основам математического анализа, только вот представленная в статье методика подачи материала о выпуклых функциях страдает изъянами, в частности математическими ошибками.

3. Еще о работе с определениями понятия выпуклой функции. Выше рассмотренная нами статья [3] о подходах к определению понятия выпуклости графика функции восходит к 2010 году. На нее ссылается автор «родственной» работы [11], вышедшей из печати совсем недавно. В свежей работе, в частности, (с нарушением норм цитирования) воспроизводится рассмотренное нами определение 3 из [3], на которое автор смотрит как на компромиссное решение вопроса «несогласованности в трактовке понятия выпуклости» в учебной литературе, как на попытку «совместить классический подход к определению выпуклости функции с общепринятой в большинстве учебников и сборников задач по математике для технических вузов терминологией» [11, с. 52]. Здесь же указывается, что эта попытка допускает «некорректность», заключающуюся «в том, что неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ по Йенсену определяет строго вогнутую функцию», в то время, как у авторов статьи [3] «данное неравенство имеет место для точек графика функции, выпуклой вверх» [11, с. 52].

Прямо скажем, усмотрена странная некорректность, при этом никаких издержек по существу в формулировании определения 3 и его осмыслении в [3] автором новой статьи не обнаруживается.

В части характеризации в [11] многообразия подходов к введению определения понятия выпуклой функции (именно это отражает название статьи) никакой новизны нет: автором просто воспроизводятся известные определения из известных учебных пособий и монографии [10], к тому же, не всегда корректно. Последнее, например, можно проиллюстрировать (см. два абзаца снизу на с. 49 статьи [11]) определением Г. М. Фихтенгольца. Во-первых, Г. М. Фихтенгольц, формулируя свое определение [9, с. 294–295], вовсе не опирается на понятие выпуклого множества, а во-вторых, он использует не условие $x_1<x_2$, а то, что точки x_1,x_2 – просто различные.

В данном месте заострим внимание читателя на следующем абзаце работы [11, с. 49].

«Выпуклые функции как объект исследования впервые появились в работах И. Йенсена. Вводя понятие “выпуклая функция”, И. Йенсен опирался на понятие “выпуклое множество”. А именно: функция действительного переменного $f(x)$, определенная на некотором интервале $(a;b)$, называется выпуклой на этом интервале, если для любых $x_1,x_2\in(a;b)$, $a<x_1<x_2<b$ выполняется условие $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$».

Обсудим данный фрагмент. В его первом предложении присутствует важнейшее ключевое слово – «впервые». А так ли это?

Во Введении отмечалось, что определение понятия выпуклой функции Иенсен ввел в работе [18] от 1906 г. (см. определение Б), при этом в определении Иенсена, заметим, никакой опоры на понятие выпуклого множества нет. Да и ограничение $x_1<x_2$, используемое автором, является искусственным, ибо точки x_1,x_2 – совершенно равноправные.

Доподлинно известно, что Эрмит свои знаменитые неравенства (их сейчас называют неравенствами Эрмита–Адамара) для выпуклых функций сформулировал в 1883 г. в следующем виде

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.1}$$

На самом деле функция *f* в (3.1) – строго выпуклая. Видимо, данный результат был получен Эрмитом еще раньше – в 1881 г., который с этим результатом отправлял письмо в журнал элементарной математики Mathesis 22 ноября 1881 года (упоминаемый факт отмечается в монографии [15], которая для читателя доступна на сайте).

Далее. В 1889 г. немецкий математик О. Гельдер (в возрасте 30 лет) доказал знаменитое неравенство для выпуклых функций [17]

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f\left(x_k\right)\ \left(x_k\in l;k=1,\ldots,n\right),\qquad(3.2)$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ – положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$, а *l* – промежуток, на котором функция *f* выпукла. Равенство в (3.2) достигается только тогда, когда либо функция *f* – линейная, либо $x_1=\ldots=x_n$.

Неравенство (3.2), как мы видим, в современной терминологии есть знаменитое неравенство Иенсена. Почему его так именуют? Видимо, причина в следующем: Иенсен в 1906 г. установил интегральный аналог неравенства (3.2) – неравенство

$$f\left(\int_D\lambda(t)x(t)dt\right)\le\int_D\lambda(t)f(x(t))dt\,,\qquad(3.3)$$

где $f(x)-$ выпуклая на множестве *C* функция, $x(D)\in C$, $\lambda(t)\ge0$ при $t\in D$, $\int_D\lambda(t)dt=1$. Равенство в (3.3) достигается только тогда, когда либо $x(t)=const$ на промежутке D, либо $f(x)-$ линейная на $x(D)$ функция.

В 1898 г. вышло учебное пособие Штольца [24], в котором имеет место упоминание о выпуклых функциях. Об этом можно узнать из статьи [7, с. 129].

Таким образом, статья [11] содержит фактическую ошибку, которая может вводить в заблуждение и знакомящихся с тематикой выпуклых функций, и начинающих преподавателей математики.

4. О применении свойств выпуклых функций при решении уравнений. Остановимся сейчас на работе [2], посвященной использованию свойств выпуклых функций при решении уравнений. Сразу отметим, что текст данной работы оформлен автором крайне небрежно, в нем читатель обнаружит и опечатки, и пунктуационные ошибки, и погрешности стиля. К примеру, уже во второй строке статьи неправильно выписывается уравнение, о котором должна пойти речь ниже в статье; во втором ее абзаце из четырех строк пропущены три запятые; в списке литературы первый источник указывается с искаженным названием (вместо слова «целях» следует писать «условиях»).

Ниже внимание читателя мы акцентируем на принципиальных издержках статьи [2] – на допускаемых автором математических ошибках.

Условимся не следовать специфической терминологии автора характеризуемой работы, который вогнутую (выпуклую вверх) функцию называет выпуклой, а выпуклую (выпуклую вниз) – вогнутой. Чтобы не запутать читателя, мы будем использовать терминологию Введения нашей работы.

Первый момент. На странице 94 статьи [2] приводятся рассуждения, сводящиеся к тому, что строго выпуклая на отрезке $[a;b]$ функция является на нем и строго выпуклой по Иенсену. Автор в конце отмеченной страницы говорит, что справедливо и обратное утверждение.

Но читатель уже знает по Введению, что, вообще говоря, декларируемое положение не выполняется, если упоминаемая функция не является непрерывной на отрезке $[a;b]$.

Второй момент. Обсудим сейчас ту задачу, которую автор рассматривает на с. 95 своей статьи [2]. В ней предлагается к рассмотрению уравнение

$$\sqrt[10]{7+x}+2\sqrt[10]{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}x}=\sqrt[10]{2}+2\sqrt[10]{8}\,,\qquad(4.1)$$

при этом требуется найти его неотрицательные корни.

Отрезок $[-7;11]$, являющийся областью определения уравнения (4.1), автор называет «решением системы» неравенств, описывающих неотрицательность подкоренных выражений левой части данного уравнения. Отнесем это к случайной оговорке опытнейшего методиста.

При решении уравнения (4.1) используется следующая теорема из [4, с. 212].

Теорема. Если в уравнении

$$pf(u)+qf(v)=pf(u_1)+qf(v_1), \tag{4.2}$$

функция *f* является непрерывной строго выпуклой или строго вогнутой на промежутке *X* функцией, а функции $u=u(x)$, $v=v(x)$, $u_1=u_1(x)$, $v_1=v_1(x)$ такие, что при всех *x* из области определения *D* неизвестного уравнения (4.2) их значения содержатся в *X* и выполняется условие

$$pu+qv=pu_1+qv_1, \tag{4.3}$$

то уравнение (4.2) на множестве $D_1=D\bigcap\{x:u(x)\le v(x);u_1(x)\le v_1(x)\}$ равносильно уравнению

$$u(x)=u_1(x) \tag{4.4}$$

(вместо уравнения (4.4) можно брать уравнение

$$v(x)=v_1(x)\,). \tag{4.5}$$

При решении уравнения (4.2) с помощью сформулированной теоремы величины *u* и *v*, удовлетворяющие условию (4.3), сначала в [2, с. 95] выбираются неправильно, но затем при отыскании уже области D_1 эта ошибка исправляется. Только вот дальше область D_1 находится неправильно: автор указывает, что D_1 «есть множество» $[-7;0]$. На самом деле решения неравенства $7+x\le\frac{11}{2}-\frac{1}{2}x$ дают отрезок $[-7;-1]$. В него попадает единственный корень $x=-5$ уравнения $7+x=2$, соответствующего (4.4), или уравнения $\frac{11}{2}-\frac{x}{2}=8$, соответствующего (4.5), каждое из которых на отрезке $[-7;-1]$ равносильно исходному уравнению (4.2).

Заметим, в [2, с. 95] составляется уравнение $\frac{11}{2}-\frac{x}{2}=8$, хотя в формулировке воспроизведенной теоремы условие (4.5) не упоминается совсем. Это наверняка у читателя вызовет недоумение.

Таким образом, в контексте требования рассматриваемой задачи вывод автора о том, что «найденный корень единственный искомый отрицательный корень исходного уравнения», является поспешным. Им не изучается вопрос о том, имеет или нет уравнение корни на промежутке $(-1;0]$. Данный вопрос не является тривиальным.

В статье [2] приводится лишь одна иллюстрационная задача, которая, как мы видим, является неудачной. В конце работы автор предлагает читателю шесть заданий для самостоятельного решения, среди которых нет ни одной авторской.

В заключение выразим надежду на то, что авторы представленных здесь работ [1–3], [11] отреагируют на сделанные по данным работам критические замечания и вступят в содержательную дискуссию.

Позволим себе также высказать пожелание молодой читательской аудитории – школьникам, студентам, магистрантам, аспирантам, начинающим преподавателям математики: читайте методические материалы без спешки, вдумчиво, критично, чтобы при их использовании не попасть впросак. Как показал анализ охарактеризованных выше материалов, могут ошибаться, допускать небрежность в своих текстах и авторы с высокими учеными степенями и званиями.

Список литературы

1. *Гилев В. Г.* Методика исследования элементарных функций на монотонность и выпуклость графика методом обобщения // Концепт. 2015. № 04 (апрель). ART 15102. URL: http://e-kon-cept.ru/2015/15102.htm. Гос. рег. Эл № ФС 77-49965. ISSN 2304-120X.

2. *Далингер В. А.* Решение уравнений на основе свойства выпуклости функции // Междунар. журнал экспериментального образования. № 3. 2017. С. 93–96.

3. *Зубова И. К., Рассоха Е. Н.* Подходы к определению понятия выпуклости и вогнутости графика функции // Вестник Оренбургского государственного университета. 2010. № 9 (115). С. 30–34.

4. *Калинин С. И.* Обучение студентов математическому анализу в условиях фундаментализации высшего педагогического образования : монография. Киров : Изд-во ВятГГУ, 2008. 353 с.

5. *Калинин С. И., Панкратова Л. В.* Об интегрируемости выпуклой на отрезке функции // Математика в школе. 2020. № 4. С. 36–45.

6. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. I–II. М. : Высш. шк., 1970. 588 с. ; 420 с.

7. *Кутателадзе С. С., Рубинов А. М.* Двойственность Минковского и ее приложения // УМН. 1972. 27:3(165). С. 127–176.

8. Математическая Энциклопедия. Т. 1. А–Г. М. : Советская энциклопедия, 1977.

9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М. : Наука, 1966. 607 с.

10. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М. : ГИИЛ, 1948. 456 с.

11. *Шабалина М. Р.* Определение понятия «выпуклая функция», многообразие подходов // Advanced science, VyatSU. 2020. № 2. С. 49–53.

12. *Bo-Yan Xi and Feng Qi.* Integral inequalities of Simpson type for logarithmically convex functions, Advanced Studies in Contemporary Mathematics. № 23. 2013. No. 4. Pp. 559–566.

13. *Ciobotariu-Boer V.*, Refinements of some Hermite-Hadamard and Fej´er inequalitites for convex functions, Octogon Mathematical Magazine. № 16 (1). 2008. Pp. 147–156.

14. *Dragomir S. S.* New refinements of the Hermite-Hadamard integral inequality for convex functions and applications, Soochow Journal of Mathematics. № 28 (4). 2002. Pp. 357–374.

15. *Dragomir S. S., Pearce C. E. M.* Selected Topics on Hermite–Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA monographs, Victoria University, 2002. 361 p.

16. *Hardy G. H., Littlewood J. E. and P´olya G.* Inequalities, 1st ed. and 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, England (1934, 1952).

17. *Hölder O.* Über einen mittelwertsatz, Gottingen Nachrichten. 1889. Pp. 38–47.

18. *Jensen J. L. W. V.* Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les voleurs mogernmes, Acta. Math. 30. 1906. Pp. 175–193.

19. *Jü Hua, Bo-Yan Xi, and Feng Qi*, Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions, Afrika Matematika. 26. 2015. No. 5-6. Pp. 741–752. DOI: 10.1007/s13370-014-0242-2.

20. *Muhamet Emin Ozdemir, Cetin Yıldız, Ahmet Ocak Akdemir and Erhan Set*. On some inequalities for *s*-convex functions and applications. Journal of Inequalities and Applications. 2013. 2013:333. URL: http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2013/1/333.

21. *Niculescu C. P. and Persson L.-E.* Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics), Springer-Verlag. New York, 2005.

22. *Pečaric J., Proschan F. and Tong Y. L.* Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc., 1992, 467 p.

23. *Rajba T.* On some relative convexities / J. Math. Anal. Appl. 411. 2014. Pp. 876–886.

24. *Sto1z O.* Grundzuge der differential und integralrechung, Teubner, L., 1898.

25. *Zeki Sarikaya M., Erhan Set, and Hatice Ögülmüs*. Some New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Mappings Whose Derivatives Are *s*-Convex in the Second Sense. International Journal of Modern Mathematical Sciences. 2013. № 8 (3). Pp. 212–218.

On the quality of the presentation of methodological materials on convex functions to the reader in a number of published works

S. I. Kalinin
Doctor of Pedagogical Sciences, professor, Vyatka State University.
Russia, Kirov. ORCID: 0000-0001-5439-9414. E-mail: kalinin_gu@mail.ru

Abstract. The reader's attention is focused on solving such a scientific and methodological problem as the quality of presentation of educational materials on the topic "Convex functions" in journal articles. The content of four previously published works by different authors devoted to specific aspects of studying this topic with students and schoolchildren is analyzed in detail. These aspects go back to the issues of working with the definitions of the concept of a convex function, the study of functions and their graphs for convexity/concavity by elementary means without resorting to the methods of differential calculus, as well as the application of the properties of convex functions in solving equations.

The mentioned works are analyzed precisely from the standpoint of the quality of the presentation of methodological materials to the reader, in particular, the correctness and expediency of using the provisions put forward by the authors in educational practice are discussed, the mathematical and factual errors, methodological errors and costs are indicated, the carelessness of the text design is noted. The article, submitted to the reader, defends the principles of fundamentality and continuity in the organization of the content of teaching the basics of mathematical analysis in higher and secondary schools.

Keywords: convex function, concave function, Jensen convexity, method correctness, working with the definition of the concept, equation.

References

1. *Gilev V. G. Metodika issledovaniya elementarnykh funktsii na monotonnost 'i vypuklost' grafika metodom generalizatsii* [Methodology for the study of elementary functions on monotonicity and convexity of a graph by the generalization method] // *Koncept* – Concept. 2015. No. 04 (April). ART 15102. Available at: http://e-koncept.ru/2015/15102.htm. State Reg. El No. FS 77-49965. ISSN 2304-120X.

2. *Dalinger V. A. Reshenie uravnenij na osnove svojstva vypuklosti funkcii* [Solution of equations based on the convexity property of a function] // *Mezhdunar. zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya* – International journal of experimental education. No. 3. 2017. Pp. 93–96.

3. *Zubova I. K., Rassoha E. N. Podhody k opredeleniyu ponyatiya vypuklosti i vognutosti grafika funkcii* [Approaches to the definition of the concept of convexity and concavity of the graph of a function] // *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta* – Herald of Orenburg State University. 2010. No. 9 (115). Pp. 30–34.

4. *Kalinin S. I. Obuchenie studentov matematicheskomu analizu v usloviyah fundamentalizacii vysshego pedagogicheskogo obrazovaniya : monografiya* [Teaching students mathematical analysis in the conditions of fundamentalization of higher pedagogical education : monograph]. Kirov. VyatSHU. 2008. 353 p.

5. *Kalinin S. I., Pankratova L. V. Ob integriruemosti vypukloj na otrezke funkcii* [On integrability of a convex function on a segment]. 2020. No. 4. Pp. 36–45.

6. *Kudryavcev L. D. Matematicheskij analiz. T. I–II* [Mathematical analysis. Vol. I-II]. M. Higher School of Economics. 1970. 588 p.; 420 p.

7. *Kutateladze S. S., Rubinov A. M. Dvojstvennost' Minkovskogo i ee prilozheniya* [Minkowski Duality and its applications] // *UMN* – UMN. 1972. 27:3(165). Pp. 127–176.

8. *Matematicheskaya Enciklopediya* – Mathematical Encyclopedia. Vol. 1. A–G. M. Sovetskaya Entsiklopediya. 1977.

9. *G. M. Fichtenholz Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [Course in differential and integral calculus]. Vol. 1. M. Nauka. 1966. 607 p.

10. *Hardi G. G., Littlewood D. E., Polia G. Neravenstva* [Inequations]. M.: GIIL. 1948. 456 p.

11. *Shabalina M. R. Opredelenie ponyatiya "vypuklaya funkciya", mnogoobrazie podhodov* [Definition of the concept "convex function", variety of approaches] // *Advanced science, VyatSU* – Advanced science, VyatSU. 2020. No. 2. Pp. 49–53.

12. *Bo-Yan Xi and Feng Qi.* Integral inequalities of Simpson type for logarithmically convex functions, Advanced Studies in Contemporary Mathematics. No. 23. 2013. No. 4. Pp. 559–566.

13. *Ciobotariu-Boer V.*, Refinements of some Hermite-Hadamard and Fej´er inequalitites for convex functions, Octogon Mathematical Magazine. № 16 (1). 2008. Pp. 147–156.

14. *Dragomir S. S.* New refinements of the Hermite-Hadamard integral inequality for convex functions and applications, Soochow Journal of Mathematics. No. 28 (4). 2002. Pp. 357–374.

15. *Dragomir S. S., Pearce C. E. M.* Selected Topics on Hermite–Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA monographs, Victoria University, 2002. 361 p.

16. *Hardy G. H., Littlewood J. E. and P´olya G.* Inequalities, 1st ed. and 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, England (1934, 1952).

17. *Hölder O.* Über einen mittelwertsatz, Gottingen Nachrichten. 1889. Pp. 38–47.

18. *Jensen J. L. W. V.* Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les voleurs mogernmes, Acta. Math. 30. 1906. Pp. 175–193.

19. *Jü Hua, Bo-Yan Xi, and Feng Qi*, Some new inequalities of Simpson type for strongly s-convex functions, Afrika Matematika. 26. 2015. No. 5-6. Pp. 741–752. DOI: 10.1007/s13370-014-0242-2.

20. *Muhamet Emin Ozdemir, Cetin Yıldız, Ahmet Ocak Akdemir and Erhan Set.* On some inequalities for *s*-convex functions and applications. Journal of Inequalities and Applications. 2013. 2013:333. Available at: http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2013/1/333.

21. *Niculescu C. P. and Persson L.-E.* Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics), Springer-Verlag. New York, 2005.

22. *Pečaric J., Proschan F. and Tong Y. L.* Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc., 1992, 467 p.

23. *Rajba T.* On some relative convexities / J. Math. Anal. Appl. 411. 2014. Pp. 876–886.

24. *Sto1z O.* Grundzuge der differential und integralrechung, Teubner, L., 1898.

25. *Zeki Sarikaya M., Erhan Set, and Hatice Ögülmüs*. Some New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Mappings Whose Derivatives Are *s*-Convex in the Second Sense. International Journal of Modern Mathematical Sciences. 2013. No. 8 (3). Pp. 212–218.