Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Вятский государственный университет»

А. И. Агапов

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ

Киров
2019

УДК 674.09(07)
ББК 37.13я73
А233

Печатается по рекомендации Научного совета Вятского государственного университета

Рецензенты:
С. Н. Рыкунин, профессор, доктор технических наук, профессор кафедры древесиноведения и технологии деревообработки Мытищенского филиала МГТУ им. Н. Э. Баумана;
А. В. Шатров, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой физики и медицинской информатики Кировского государственного медицинского университета

Агапов, А. И.
А233 Оптимизация раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев : [монография] / А. И. Агапов. – Киров : Вятский государственный университет, 2019. – 478 с.

ISBN 978-598228-195-1

Рассмотрены вопросы оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев при различном сочетании количества пар боковых обрезных досок. Разработаны математические модели для определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок с учетом ширины пропила, сбеговой зоны и последующего раскроя брусьев на обрезные доски. Выполнен анализ влияния различных факторов на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок.

УДК 674.09(07)
ББК 37.13я73

ISBN 978-598228-195-1

© Вятский государственный университет (ВятГУ), 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩЕПРИНЯТЫЕ ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ 5
ВВЕДЕНИЕ 8
1. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ПОЛУЧЕНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ТРЕХ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК 16
1.1. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины [58]. 16
1.2 Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок 30
1.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины 41
1.4 Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила 54
1.5. Влияние последующего раскроя брусьев на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок 70
1.6. Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны 78
1.7. Основные выводы по главе 115
2. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ЧЕТЫРЕХ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК 118
2.1. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины 118
2.2 Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок 132
2.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины 145
2.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила 162
2.5. Определение оптимальных размеров брусьев разной толщины и боковых обрезных досок с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски 181
2.6. Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны 193
2.7 Основные выводы по главе. 230
3. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ПЯТИ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК 233
3.1. Общая постановка и математическая модель задачи оптимизации. 233
3.2. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок 249
3.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины 257
3.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила 268

3.5 Раскрой пиловочника с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски 287
3.6 Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны и ширины пропила 301
Основные выводы по главе. 337
4. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ШЕСТИ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК 340
4.1. Общая постановка и математическая модель задачи оптимизации. 340
4.2. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок 358
4.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины 367
4.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила 380
4.5 Раскрой пиловочника с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски 400
4.6 Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны и ширины пропила 415
4.7 Основные выводы по главе. 452
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 455
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 456
Приложение 3.1 469
Приложение 3.2 471
Приложение 4.1 474
Приложение 4.2 476

ОБЩЕПРИНЯТЫЕ ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Z – целевая функция, площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны пиловочника;

$Z_{бр}$ – площадь поперечного сечения брусьев, получаемых при раскрое пиловочника;

$Z_{д}$ – площадь поперечного сечения боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны;

$Z_{ц}$ – площадь поперечного сечения досок, получаемых при распиловке центрального бруса;

$Z_{б}$ – площадь поперечного сечения досок, получаемых при распиловке боковых брусьев;

$Z_{о}$ – площадь поперечного сечения древесины, превращаемой в опилки, образуемых при распиловке брусьев на обрезные доски;

$H_{б} = H$ – толщина бокового бруса;

$H_{ц} = cH$ – толщина центрального бруса;

c – коэффициент соотношения (отношения) толщины центрального бруса к толщине бокового бруса;

A_1 – ширина пласти центрального бруса;

A_2 – ширина наружной пласти бокового бруса;

T – толщина доски, выпиливаемой из пифагорической зоны пиловочника;

$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ – толщина соответственно первой, второй, третьей, четвертой, пятой и шестой пар боковой обрезной доски, выпиливаемой из пифагорической зоны пиловочника;

$T_{ц}$ – толщина обрезной доски, выпиливаемой из центрального бруса, с припуском на усушку;

$T_{б}$ – толщина обрезной доски, получаемой при раскрое бокового бруса, с припуском на усушку;

b – ширина доски, выпиливаемой из пифагорической зоны пиловочника;

$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ – ширины соответственно первой, второй, третьей, четвертой, пятой и шестой пар боковой обрезной доски, выпиливаемой из пифагорической зоны пиловочника;

$b_{к}$ – ширина наружной пласти доски в нижнем (комлевом) сечении, получаемой из пифагорической зоны пиловочника;

$n_{б}$ – количество выпиливаемых обрезных досок при раскрое бокового бруса;

$n_{ц}$ – количество выпиливаемых обрезных досок при раскрое центрального бруса;

L – функция Лагранжа;

λ – множитель (коэффициент) Лагранжа;

λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, λ_7, λ_8, – множители (коэффициенты) Лагранжа соответственно для первого, второго и так далее уравнений связи;

e – ширина пропила;

E – величина пифагорической зоны пиловочника;

$T_с$ – толщина обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

$b_с$ – ширина обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

$l_с$ – длина доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

$l_п$ – длина наружной (внешней) параболы, формирующей размеры (длину и ширину) обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

l – длина пиловочника (бревна);

d – диаметр пиловочника в вершинном торце;

D – диаметр пиловочника в нижнем комлевом торце;

$d_с$ – диаметр поперечного сечения пиловочника, с которого начинается выпиливание обрезной доски из сбеговой зоны;

$C_б$ – сбег бревна (пиловочника) по длине;

$K_с$ – относительный сбег пиловочника по диаметру;

m_H – относительная толщина бокового бруса;

m_T – относительная толщина боковой обрезной доски;

m_{T1}, m_{T2}, m_{T3}, m_{T4}, m_{T5}, m_{T6} – относительная толщина соответственно первой, второй, третьей, четвертой, пятой и шестой пар боковой обрезной доски, выпиливаемой из пифагорической зоны пиловочника;

$m_{Tц}$ – относительная толщина обрезной доски, получаемой при раскрое центрального бруса;

$m_{Tб}$ – относительная толщина обрезной доски, получаемой при раскрое бокового бруса;

m_b – относительная ширина боковой обрезной доски;

m_{b1}, m_{b2}, m_{b3}, m_{b4}, m_{b5}, m_{b6} – относительная ширина соответственно первой, второй, третьей, четвертой, пятой и шестой пар боковой обрезной доски, выпиливаемой из пифагорической зоны пиловочника;

cm_H – относительная толщина центрального бруса;

m_e – относительная ширина пропила;

m_{A1} – относительная ширина пласти центрального бруса;

m_{A2} – относительная ширина наружной пласти бокового бруса;

m_E – относительная величина пифагорической зоны пиловочника;

m_{Tc} – относительная толщина обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

m_{bc} – относительная ширина обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

m_{lc} – относительная длина обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника;

V – общий объем пиломатериалов, получаемых при раскрое пиловочника;

Vп – объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны пиловочника;

Vс – объем пиломатериалов, получаемых из сбеговой зоны пиловочника;

$V_{бр}$ – объем пиломатериалов, получаемых из брусьев;

$V_{д}$ – объем боковых обрезных досок, получаемых при раскрое пиловочника из пифагорической зоны;

Vо – объем древесины, превращаемой в опилки, образующиеся в процессе раскроя пиловочника (бревна);

Vоп – общий объем пиловочника (бревна);

$m_{Vоп}$ – общий относительный объем пиловочника (бревна);

$m_{Vо}$ – относительный объем потери древесины в опилки, образующиеся в процессе раскроя пиловочника;

$m_{Vп}$ – относительный объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны пиловочника;

$m_{Vс}$ – относительный объем обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника;

$m_{Vбр}$ – относительный объем брусьев, получаемых при раскрое пиловочника;

$m_{Vд}$ – относительный объем боковых обрезных досок, получаемых при раскрое пиловочника из пифагорической зоны;

$П_{v}$ – общий полезный выход пиломатериалов, получаемых при раскрое пиловочника;

$П_{V_{П}}$ – полезный выход пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны пиловочника;

$П_{V_{с}}$ – полезный выход пиломатериалов, получаемых из сбеговой зоны пиловочника;

$П_{V_{бр}}$ – полезный выход брусьев, получаемых при раскрое пиловочника из пифагорической зоны;

$П_{V_{д}}$ – полезный выход боковых обрезных досок, получаемых при раскрое пиловочника из пифагорической зоны;

$П_{V_{о}}$ – относительный объем потери древесины в опилки, образующиеся при раскрое пиловочника.

ВВЕДЕНИЕ

Раскрой пиловочника на пиломатериалы относится к ресурсосберегающей технологии изготовления изделий из древесины. Поэтому на этой стадии технологического процесса прежде всего ставится задача получить максимальный выход пилопродукции в соответствии с качественными и размерными характеристиками как сырья, так и пиломатериалов. Существенный вклад в разработку теории раскроя пиловочника сделали Х. Л. Фельдман, Н. П. Анучин, Д. Ф. Шапиро, А. Н. Песоцкий, Г. Д. Власов, Г. Г. Титков, М. Н. Гутерман, П. П. Аксенов, Н. А. Батин, Л. В. Канторович, А. А. Пижурин, В. Ф. Ветшева, Р. Е. Калитеевский, В. С. Ясинский, М. В. Соболев, В. Г. Турушев, С. Н. Рыкунин, В. С. Шалаев, В. Г. Уласовец, Г. И. Стоев и другие ученые России и зарубежных стран.

Сложность проблемы состоит в многообразии размерно-качественных характеристик как пиловочника, так и пиломатериалов, а также схем раскроя. Кроме того, следует учитывать и различные технологические варианты лесопильных линий.

Было предложено большое количество способов раскроя пиловочника [99, 107, 115]. Наибольшее распространение получили способы раскроя вразвал и с брусовкой. В последние годы рассматриваются альтернативные варианты раскроя пиловочника. Наибольшее внимание уделяется круговому, брусово-сегментному, а также секторному способам раскроя. При брусовом способе раскроя пиловочника исследователи в первую очередь искали оптимальные размеры бруса, а затем и досок, при которых получается максимальный выход пилопродукции [99]. В соответствии с теорией максимальных поставов толщину бруса при брусово-развальном способе раскроя пиловочника рекомендуется выбирать в пределах (0,6…0,8) от диаметра бревна в его вершинном торце d. Такой вывод был получен при рассмотрении схемы раскроя бревна с выпиливанием бруса максимального размера по площади поперечного сечения, вписываемого в окружность равную диаметру бревна в его вершинном торце d. При этом рекомендуется еще выпиливать боковые доски толщиной $0{,}1d$ (Х. Л. Фельдман) [124]. На практике используется множество других схем раскроя пиловочника, в которых кроме бруса выпиливаются две, три и более пар боковых обрезных досок [61]. Но данную рекомендацию по выбору толщины выпиливаемого бруса продолжают распространять на все виды схем раскроя пиловочника с брусовкой. При брусовом способе раскроя пиловочника часто ставится задача прежде

всего получить брус определенных размеров, при которых не всегда получается максимальный объем выпиливаемых пиломатериалов. В этом случае толщина бруса не всегда будет совпадать с вариантом, когда дополнительно из пиловочника выпиливается еще не одна, а несколько пар боковых обрезных досок. В таком случае получаются сегменты разных размеров, для которых необходимо определить оптимальные размеры обрезных досок [61].

Особое внимание представляет пиловочник больших и крупных размеров, для которых предлагается раскрой с выпиливанием двух или трех брусьев. При этом также дополнительно рассматривается получение еще двух, трех и более пар боковых обрезных досок. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев рекомендуется для средних, больших и крупных диаметров без учета количества и размеров боковых обрезных досок [101]. При экспериментальных проверках в поставах размеры боковых обрезных досок указываются [103, 115]. При этом выбор их размеров не обосновывается.

Раскрой пиловочника средних, больших и крупных размеров наиболее обстоятельно рассмотрен в работе В. Ф. Ветшевой [101]. В своей работе В. Ф. Ветшева делает ряд выводов и дает следующие рекомендации.

1. Распиловка с брусовкой обеспечивает лучшее использование сырья по сравнению с распиловкой вразвал.

2. Для бревен диаметром $40 \le d \le 60$ см при коэффициенте сбега $к \le 1{,}2$ толщина бруса $H = (0{,}3\ldots0{,}5)d$. При коэффициенте сбега $к = 1{,}2$ толщина бруса $0{,}3 \le H \le 0{,}4d$.

3. Для самых толстых бревен диаметром ($d > 60$ см) с коэффициентом сбега $к \le 1{,}2$ приемлемы схемы с двумя и тремя брусьями при $H = (0{,}3\ldots0{,}4)d$. Суммарную толщину брусьев можно брать до $(0{,}2\ldots0{,}5)d$.

4. Для бревен диаметром $d = 20\ldots80$ см с коэффициентом сбега $к \ge 1{,}3$ наиболее эффективна схема с тремя брусьями. Рекомендуемая толщина бруса составляет $(0{,}3\ldots0{,}4)d$.

Для самых толстых бревен диаметром ($d \ge 60$ см) следует строить специализированные поточные линии раскроя пиловочника с тремя брусьями.

В работе отмечается, что схемы раскроя пиловочника с тонким брусом $H = 0{,}3d$ эффективнее, чем с более толстым брусом.

В работе рассматривались схемы раскроя толщиной бруса (0,2; 0,3; 0,4)d. При этом суммарная толщина двух или трех брусьев составляла в пределах $(0{,}6\ldots0{,}7)d$.

В работе проводились и анализировались опытные распиловки со следующими поставами [101].

Для диаметров	Первый проход	Второй проход
50…52 см	25 – 50 – 160 – 50 – 25 2 1 2 1 2 25 – 110 – 130 – 110 – 25 3 1 1 1 3	25 – 50 – 25 3 7 3 25 – 70 – 25 3 5 3
58…60 см	25 – 50 – 170 – 50 – 25 3 1 2 1 3 25 – 150 – 130 – 150 – 25 3 1 1 1 3	25 – 55 – 25 4 7 4 25 – 50 – 80 – 50 – 25 4 3 1 3 4
62…62 см	25 – 50 – 200 – 50 – 25 3 1 2 1 3 25 – 50 – 160 – 100 – 160 – 50 – 25 2 1 1 1 1 1 2	25 – 50 – 25 3 9 3 25 – 50 – 25 3 9 3
66 и выше	25 – 50 – 240 – 50 – 25 3 1 2 1 3 25 – 130 – 240 – 130 – 25 3 1 1 1 3	25 – 50 – 80 – 50 – 25 3 4 1 4 3 25 – 50 – 80 – 50 – 25 3 4 1 4 3

Таким образом, опытные распиловки проводились с суммарной толщиной брусьев 0,6…0,7 от диаметра бревна, тогда как в рекомендациях приводятся и другие соотношения размеров брусьев.

В работе [101] В. Ф. Ветшева отмечает, что С. А. Баранов рекомендует следующие схемы раскроя пиловочника.

1. Для бревен диаметром до 30 см – один брус толщиной (0,6…0,8)*d*.

2. Для бревен диаметром 30…46 см – два бруса.

3. Для бревен диаметром свыше 46 см – три бруса при суммарной толщине двух и трех брусьев 0,7*d*.

В то же время в работе [101] рекомендуются и другие конкретные схемы раскроя по выбору толщины бруса.

Диаметр бревна 40 см – толщина бруса 200…250 мм или два бруса по 110 или 130 мм.

Диаметр бревна 50 см – толщина двух брусьев по 150 или по 180 мм.

Диаметр бревна 60 см – толщина двух брусьев по 180, 200 или по 220 мм.

Анализируя эти рекомендации по выбору толщины брусьев, следует отметить, что во многих случаях суммарную толщину брусьев рекомендовалось принимать в пределах (0,6…0,7)*d*.

Следует также отметить, что в рекомендуемых поставах для экспериментальных проверок толщина центрального бруса по отношению к толщине бокового бруса имеет большой разброс, а именно меньше единицы и больше в 3…4 раза. Такой большой разброс выбора толщины центрального бруса по отношению к толщине бокового бруса или к толщине боковой обрезной доски пока не обоснован.

В работах СибНИИЛП [101] (г. Красноярск) отмечается, что при распиловке крупномерных бревен диаметром 38…50 см с выпиливанием одного бруса толщиной 0,4*d* получаются лучшие показатели, чем при схеме раскроя с выпиливанием двух брусьев суммарной толщиной 0,7*d*. Поэтому рекомендуется применять схему раскроя с тонким брусом.

Заслуживают одобрения работа Г. Д. Власова [103], где указывается, что оптимальные размеры боковых обрезных досок зависят от их количества в поставе.

По этим работам можно отметить следующее. В таком большом наборе различных противоречивых рекомендаций трудно ориентироваться. Учет влияния коэффициента сбега бревен затрудняет выбор схем раскроя и оптимальных размеров пилопродукции. Обоснование влияния коэффициента сбега бревна на выбор размеров брусьев и досок не приводится. В теории максимальных поставов используется в основном графоаналитический метод расчета оптимальных размеров пилопродукции.

Предлагаемые рекомендации по выбору схем раскроя, а также рациональные соотношения размеров брусьев и досок опираются, как правило, на экспериментальные исследования. Теория раскроя пиловочника базируется в основном на работах Х. Л. Фельдмана, подтвержденных экспериментальными исследованиями [124]. Имеются высказывания по уменьшению толщины бруса до 0,3…0,4 от диаметра бревна. Но при этом в предлагаемых схемах раскроя и конкретных рекомендациях поставов используется существующее до сих пор утверждение, что суммарная толщина брусьев должна составлять (0,6…0,8)*d*. Количество пар боковых досок при первом проходе брусово-развального способа раскроя пиловочника до сих пор строго не регламентируется и не учитывается при выборе рациональных соотношений размеров брусьев и досок [58, 95]. Отсутствуют рекомендации по согласованию необходимых размеров брусьев и досок, которые требуются по спецификации, с размерами пиловочника.

Анализируя работы в области раскроя пиловочника, можно сделать вывод, что многие рекомендации были получены на основании экспериментальных исследований [100, 103, 111, 115, 119, 123]. Используя такой подход и учитывая многообразие факторов, найти оптимальные размеры пиломатериалов для различных вариантов схем раскроя пиловочника весьма сложно.

Таким образом, теоретического обоснования оптимальных размеров брусьев и досок для брусово-развального способа раскроя пиловочника крупных размеров до сих пор не сделано и не разработаны алгоритмы решения таких оптимизационных задач [58, 59].

В работах автора данной монографии было ранее установлено, что при брусово-развальном способе раскроя пиловочника объем пилопродукции суммируется из двух частей – бруса (брусьев) и досок [57], причем с увеличением толщины бруса объем его возрастает, а объем досок уменьшается и наоборот. Поэтому была выдвинута гипотеза, что имеется такое соотношение размеров брусьев и досок, при котором суммарный объем выхода пилопродукции будет максимальным. Этот результат и должен быть оптимальным. В работе также учитывается вывод о том, что оптимальные соотношения размеров бруса (брусьев) и досок зависят от количества в поставе как брусьев, так и досок. Поэтому задачи оптимизации раскроя пиловочника следует ставить и решать с учетом всех этих факторов.

В данной работе рассматривается постановка и решение задач определения оптимальных размеров брусьев и досок при распиловке пиловочника крупных размеров брусово-развальным способом с выпиливанием трех брусьев одинаковой и разной толщины и различном сочетании количества пар боковых обрезных досок.

На практике приходится осуществлять раскрой пиловочника различных размеров. В соответствии со стандартом диаметр пиловочника начинается с диаметра в вершинном торце d = 14 см. Наибольший диаметр пиловочника не ограничивается. Классификация пиловочника по диаметру пока строго не подразделяется. Полагают, что пиловочник диаметром в вершинном торце до 18 см включительно не рекомендуется распиливать с брусовкой, и поэтому он считается очень малых размеров.

Пиловочник диаметром от 20 см до 30 см полагают малых размеров. Далее предварительно можно принять следующую классификацию пиловочника по диаметру в вершинном торце:

20…30 см – малых размеров,

32…44 см – средних размеров,

46…60 см – больших размеров,

60 см и более – крупных размеров.

Такая классификация пиловочника по размеру диаметра условная, но она необходима для общего представления и принятия рекомендуемых схем раскроя с брусовкой. Так, можно предварительно рекомендовать из пиловочника малых и средних размеров диаметром 20…44 см выпиливать один брус и различное количество боковых обрезных досок. Пиловочник больших размеров с диаметром 46…60 см можно рекомендовать распиливать с получением двух брусьев. Пиловочник крупных размеров d = 60 см и более рекомендуется распиливать с получением трех брусьев. Такой подход предварительный, и имеются, конечно, переходные зоны от одного размера к другому. Следовательно, возможны переходные схемы раскроя пиловочника. Но общая концепция постановки классификации пиловочника по диаметру зависит, прежде всего, от рационального количества выпиливаемых брусьев, а также от рационального (оптимального) количества выпиливаемых боковых обрезных досок.

В данной работе представляется анализ схем раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и нескольких пар боковых обрезных досок в их различном сочетании [36, 40, 43]. Только в таком случае можно определить варианты размеров брусьев и боковых обрезных досок, при которых получается наибольший (максимальный) выход пиломатериалов.

Кроме того, в работе использовался метод последовательной оптимизации [107]. Вначале рассматривались задачи оптимизации с меньшим количеством факторов, а затем в задачи оптимизации добавлялись другие факторы. Благодаря такому подходу удалось установить влияние различных факторов на выход пиломатериалов.

При решении задач оптимизации оказалось, что уравнений связи в общем виде меньше, чем неизвестных факторов. В связи с этим использовался метод множителей Лагранжа [2]. Кроме того, применялся численный метод, для чего составлялся алгоритм решения задач оптимизации в относительных единицах [1, 2, 3, 59]. В результате использования метода последовательной оптимизации и методического набора различных вариантов методик решения задач оптимизации удалось раскрыть особенности поставленных конкретных задач оптимизации для различных более сложных схем раскроя пиловочника [91, 94, 95].

Первые работы по оптимизации раскроя пиловочника автором данной монографии начались в рамках методической подготовки к

изучению курса «Математическое моделирование и оптимизация технологических процессов деревообработки» [1–6].

Вначале рассматривались и анализировались более простые и конкретные задачи по определению оптимальных размеров брусьев и досок, которые были опубликованы в конце прошлого века [1, 2]. В этих задачах прежде всего рассматривались и решались вопросы определения оптимальных размеров брусьев и досок, получаемых из пифагорической зоны [3–5]. Сбеговая зона пиловочника учитывалась в более поздних работах автора [6, 17, 66, 87, 90]. На первом этапе изучались схемы раскроя пиловочника малых и средних размеров с выпиливанием одного бруса и нескольких пар боковых обрезных досок [3–5].

Затем, на основании этих работ, началось изучение и исследование более сложных схем раскроя пиловочника с выпиливанием двух и трех брусьев и нескольких пар боковых обрезных досок [27, 29, 30, 32, 97]. Анализ результатов решения задач оптимизации раскроя пиловочника больших и крупных размеров показал, что эта область науки и техники недостаточно изучена. Поэтому в данной работе изучаются основные методические подходы к постановке и решению задач раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и нескольких пар боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны без учета и с учетом ширины пропила, а также с учетом параболической (сбеговой) зоны [34, 35, 36, 40].

Отдельно рассматривались работы по раскрою сегмента с выпиливанием одной, двух и трех обрезных досок. Такие исследования также нужны и важны при выпиливании брусьев заданной (требуемой) толщины, не совпадающей с оптимальными размерами, получаемыми при решении задачи оптимизации по алгоритму общей схемы раскроя пиловочника [37, 38, 41, 61].

Таким образом, была поставлена цель исследовать в задачах оптимизации раскроя пиловочника взаимосвязь количества брусьев и боковых обрезных досок в их различном сочетании.

Для этого использовалась разработанная автором методика постановки решения задач оптимизации раскроя пиловочника, которая позволяет определить одновременно оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок как без учета, так и с учетом ширины пропила, а также с последующим раскроем брусьев на обрезные доски. Зная эти оптимальные соотношения размеров брусьев и боковых обрезных досок, можно составить постав с выпиливанием досок стандартных размеров, близких к оптимальному варианту [97].

В данной монографии обобщены и изложены работы автора по раскрою пиловочника крупных размеров с получением трех брусьев и трех и более пар боковых обрезных досок, без учета и с учетом ширины пропила, а также с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски [54, 55, 56, 72].

Такой спектр исследований позволяет выяснить взаимосвязь брусьев и досок, а также установить влияние основных технологических факторов на оптимальные размеры этих брусьев и боковых обрезных досок [81].

1. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ПОЛУЧЕНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ТРЕХ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК

1.1. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины [58]

Постановка задачи. При раскрое пиловочника больших и крупных размеров [91] в вершинном торце диаметром (60…100 см) брусово-развальным способом целесообразно выпиливать три одинаковых по толщине бруса, а из боковой части бревна можно получить еще три пары обрезных досок [101] (рис. 1.1). Рассматриваем данную схему раскроя пиловочника без учета ширины пропила. Такой вариант раскроя пиловочника получил широкое распространение в промышленности [98, 101], так как позволяет более полно использовать пифагорическую зону и тем самым обеспечить получение максимального выхода обрезных пиломатериалов [35, 36].

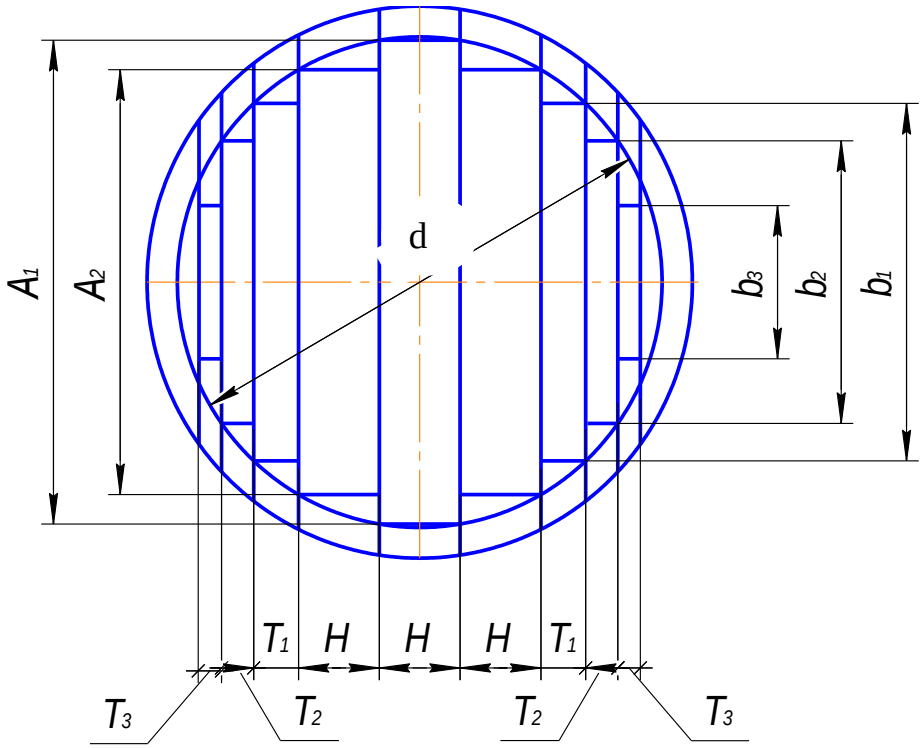


Рис. 1.1. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев одинаковой толщины и трех пар боковых обрезных досок.

Составление математической модели [35, 36]. Важно знать оптимальные размеры брусьев и досок, при которых получается максимальный выход пиломатериалов. Для решения поставленной задачи составляем математическую модель. В качестве критерия оптимальности выбираем объемный выход четырехкантных брусьев и боковых

обрезных досок, получаемых при первом проходе брусово-развального способа раскроя бревна [50]. В задаче оптимизации данной схемы раскроя рассматривается пифагорическая зона пиловочника. Согласно теории максимальных поставов в пифагорической зоне пиловочника длина получаемых пиломатериалов равна длине бревна. Следовательно, целевую функцию можно записать в виде суммы площадей поперечных сечений трех брусьев и трех пар боковых обрезных досок [35, 36]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3. \quad (1.1)$$

Написание целевой функции в таком варианте основывается на предположении (гипотезе), что с увеличением толщины брусьев площадь их поперечных сечений возрастает, а размеры боковых обрезных досок и, следовательно, площади их поперечных сечений уменьшаются, и наоборот. Следовательно, с определенной степенью вероятности можно предположить, что имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором, площади их поперечных сечений принимают максимальное (оптимальное) значение [72].

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора. Основными размерными параметрами пиловочника являются диаметр в вершинном торце, длина и сбег бревна. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и боковых обрезных досок можно представить следующими уравнениями.

Уравнение связи для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение связи для боковых брусьев:

$$d^2 - 9H^2 - A_2^2 = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение связи для первой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_1^2 - (3H + 2T_1)^2 = 0, \\ d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2 = 0. \end{gathered} \quad (1.4)$$

Уравнение связи для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2)^2 = 0, \\ d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \end{gathered} \quad (1.5)$$

Уравнение связи для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 = 0,$$
$$d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - \quad (1.6)$$
$$-8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0.$$

Полагаем, что математическая модель для данной задачи оптимизации составлена.

Решение математической модели. В данной математической модели неизвестных (размеров брусьев и досок) много, а уравнений связей недостаточно. В связи с этим решение этой задачи оптимизации классическим методом не представляется возможным. Поэтому для решения данной математической модели воспользуемся методом множителей Лагранжа [13]. Функцию Лагранжа представляем в следующем виде:

$$\begin{aligned} L = {} & HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + \lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \\ & + \lambda_2(d^2 - 9H^2 - A_2^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2) + \\ & + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2) + \\ & + \lambda_5(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - \\ & - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3), \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для определения экстремальных максимальных значений функции Лагранжа воспользуемся классическим методом.

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю [35, 36]:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial A_1} = H - 2\lambda_1 A_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial H} = A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 18\lambda_3 H - 12\lambda_3 T_1 - 18\lambda_4 H - 18\lambda_4 T_1 - \\ -12\lambda_4 T_2 - 18\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 12\lambda_3 H - 8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - 8\lambda_5 T_1 - \\ -12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Решаем систему уравнений (1.8) совместно с уравнениями связи. Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (1.8), из которого получаем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{1.9}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (1.8), которое можно представить в следующем виде:

$$b_3 = 6\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_2 + 4\lambda_5 T_3. \tag{1.10}$$

В равенство (1.10) подставим выражение (1.9), получим

$$\begin{aligned} b_3^2 &= 6T_3 H + 4T_1 T_3 + 4T_2 T_3 + 4T_3^2 = \\ &= 2T_3(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (1.8), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{1.12}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (1.8), у которого четыре последних слагаемых совпадают с членами равенства (1.10). Тогда это уравнение системы можно представить в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_1 + 6\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_2 + b_3. \tag{1.13}$$

В равенство (1.13) подставим выражение (1.12), получим:

$$b_2^2 = 4T_1 T_2 + 6T_2 H + 4T_2^2 + b_2 b_3. \tag{1.14}$$

Это равенство можно представить в виде

$$b_2 b_3 = b_2^2 - 4T_1 T_2 - 6T_2 H - 4T_2^2. \tag{1.15}$$

Зная ширину второй пары боковой обрезной доски, можно определить ширину третьей пары боковой обрезной доски по формуле:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2). \tag{1.16}$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (1.8), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{1.17}$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (1.8), которое представляем в следующем виде:

$$b_1 = 6\lambda_3 H + 4\lambda_3 T_1 + b_2. \tag{1.18}$$

Подставим в равенство (1.18) выражение (1.17), получим

$$b_1^2 - 6HT_1 - 4T_1^2 = b_1 b_2. \tag{1.19}$$

Из последнего равенства (1.19) можно определить ширину второй пары боковой обрезной доски:

$$b_2 = b_1 - \frac{6HT_1 + 4T_1^2}{b_1} = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \tag{1.20}$$

Зная ширину второй пары боковой обрезной доски b_2, используем уравнение связи (1.5), которое представляем в следующем виде:

$$2T_2^2 + 12HT_2 + 8T_1T_2 + 2T_1^2 + 12HT_1 + 9H^2 + b_2^2 = 0. \tag{1.21}$$

Решая это квадратное уравнение (1.21), получим

$$T_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \tag{1.22}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (1.8), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_1:

$$H = 2\lambda_1 A_1, \qquad \lambda_1 = \frac{H}{2A_1}. \tag{1.23}$$

Используя уравнение связи (1.2), можно написать:

$$\lambda_1 = \frac{H}{2\sqrt{d^2 - H^2}}. \tag{1.22}$$

Рассматриваем второе уравнение системы (1.8), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_2:

$$H = \lambda_2 A_2, \qquad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \tag{1.25}$$

Используя уравнение связи (1.3), можно написать:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - 9H^2}}. \quad (1.26)$$

Тогда отношение множителей Лагранжа λ_1/λ_2 определится по формуле:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{d^2 - 9H^2}}{2\sqrt{d^2 - H^2}}. \quad (1.27)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (1.8), в котором девять последних членов равны ($3b_1$) (1.18). Тогда это уравнение системы (1.8) представляем в следующем виде:

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 3b_1. \quad (1.28)$$

Подставим в последнее равенство (1.28) выражения для множителей Лагранжа λ_1 и λ_2, получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + 18\frac{H^2}{A_2} + 3b_1. \quad (1.29)$$

Из последнего равенства можно определить ширину первой пары боковой обрезной доски:

$$b_1 = \frac{1}{3}\left(A_1 + 2A_2 - H^2\left(\frac{1}{A_1} + \frac{18}{A_2}\right)\right). \quad (1.30)$$

Из уравнения связи (1.2) можно написать:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (1.31)$$

Из уравнения связи (1.3) можно написать:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (1.32)$$

Определив ширину пластей брусьев A_1 и A_2, можно определить по формуле (1.30) ширину первой пары боковой обрезной доски.

Пользуясь уравнением связи (1.2), можно определить толщину первой пары боковой обрезной доски по формуле:

$$T_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \quad (1.33)$$

По формуле (1.20) можно определить ширину второй пары боковой обрезной доски b_2. Для определения толщины третьей пары боко-

вой обрезной доски T_3 воспользуемся уравнением связи (1.6), которое представляем в виде

$$4T_3^2 + 12HT_3 + 8T_1T_3 + 8T_2T_3 + 9H^2 + 4T_1^2 + \\ +4T_2^2 + 12HT_1 + 12HT_2 + 8T_1T_2 + b_3^2 - d^2 = 0. \quad (1.34)$$

Решая это квадратное уравнение (1.34), получим:

$$T_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (1.35)$$

Ширину третьей пары боковой обрезной доски можно определить по формуле (1.16). Тогда можно определить и толщину этой обрезной доски по формуле (1.35).

Зная ширину третьей пары боковой обрезной доски b_3, можно воспользоваться равенством (1.35) и определить толщину этой обрезной доски по формуле:

$$T_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2b_3^2 + (3H + 2T_1 + 2T_2)^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (1.36)$$

Можно также в уравнение (1.35) подставить равенство (1.6), получим:

$$T_3 = \frac{1}{8}(\sqrt{8d^2 + (3H + 2T_1 + 2T_2)^2} - 3(3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (1.37)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (1.8), а также учтены все уравнения связи и получены формулы для определения размеров брусьев и досок. Однако в этих формулах размеры брусьев и досок взаимосвязаны, что затрудняет нахождение оптимальных размеров. Для решения поставленной задачи воспользуемся численным методом. Для этого изменяем толщину бруса, а остальные размеры брусьев и досок, а также целевую функцию будем определять по полученным формулам. По результатам расчетов можно найти вариант, при котором получается максимальное значение целевой функции. Это и будет соответствовать оптимальным размерам брусьев и досок.

Алгоритм решения задачи. Для облегчения расчетов и анализа результатов полученные ранее формулы представляем в относительных единицах, полагая отношение $H/d = m_н$.

Тогда алгоритмы решения задачи будут иметь следующий вид [35, 36].

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (1.38)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - 9m_H^2}. \quad (1.39)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H^2(\frac{1}{m_{A_1}} + \frac{18}{m_{A_2}})). \quad (1.40)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - 3m_H\right). \quad (1.41)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - 2m_{T_1}\frac{3m_H + 2m_{T_1}}{m_{b_1}}. \quad (1.42)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (3m_H + 2m_{T_1})\right). \quad (1.43)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - 2m_{T_2}\frac{3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}}{m_{b_2}}. \quad (1.44)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2})\right). \quad (1.45)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (1.46)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1}m_{b_1} + 2m_{T_2}m_{b_2} + 2m_{T_3}m_{b_3}. \quad (1.47)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (1.48)$$

Методика выполнения расчетов. Расчеты производятся в два этапа. На первом этапе расчеты производятся при изменении относительной толщины бруса с интервалом $\Delta = 0{,}01$ и по алгоритму находим величину целевой функции с максимальным значением. Далее по результатам расчетов определяем диапазон изменения толщины брусьев, в пределах которого целевая функция имеет максимальное значение [19].

Затем, на втором этапе, расчеты производятся при изменении толщины бруса в этом оптимальном диапазоне с интервалом $\Delta = 0{,}001$, и находим максимальное значение целевой функции. Этот результат расчета и будет являться оптимальным.

Результаты расчетов по алгоритму на первом этапе представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Относительные размеры брусьев и досок, а также площади их поперечных сечений при изменении относительной толщины бруса с интервалом 0,01

m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0,14	0,9902	0,9075	0,7989	0,0907	0,6622
0,15	0,9887	0,8930	0,7662	0,0963	0,6046
0,16	**0,9871**	**0,8773**	**0,7302**	**0,1016**	**0,5399**
0,17	0,9854	0,8602	0,6906	0,1066	0,4672
0,18	0,9837	0,8417	0,6470	0,1112	0,3849

Окончание табл. 1.1

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$Z_{\text{бр}}$	$Z_{\text{д}}$	Z
0,0739	0,495	0,0598	0,3927	0,3021	0,694797
0,0769	0,4018	0,0596	0,4162	0,2885	0,704723
0,0792	**0,2929**	**0,0572**	**0,4387**	**0,2675**	**0,70615**
0,0804	0,1627	0,0512	0,4599	0,2391	0,699109
0,0802	0,01	0,0385	0,4801	0,2057	0,685782

По результатам расчетов на первом этапе отмечаем, что целевая функция принимает максимальное значение при относительной толщине бруса $m_H = 0{,}16$, а диапазон максимальных значений целевой функции находится в пределах $m_H = 0{,}15 \ldots 0{,}16$.

Результаты расчетов по алгоритму на втором этапе при изменении относительной толщины бруса в оптимальном диапазоне представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Относительные размеры брусьев и досок, а также площади их поперечных сечений при изменении относительной толщины бруса в оптимальном диапазоне с интервалом 0,001

m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0,151	0,9885	0,8915	0,7627	0,0969	0,5984
0,152	0,9883	0,8899	0,7592	0,0974	0,5922
0,153	0,9882	0,8884	0,7557	0,0980	0,5859
0,154	0,9881	0,8869	0,7522	0,0985	0,5796
0,155	0,9879	0,8853	0,7586	0,0990	0,5732
0,156	0,9877	0,8837	0,7450	0,0996	0,5667
0,157	**0,9876**	**0,8821**	**0,7413**	**0,1001**	**0,5601**
0,158	0,9874	0,8805	0,7376	0,1006	0,5534
0,159	0,9873	0,8789	0,7339	0,1011	0,5467
0,16	0,9871	0,8773	0,7302	0,1016	0,5399

Окончание табл. 1.2

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$Z_{бр}$	$Z_д$	Z
0,0772	0,3917	0,0595	0,4185	0,2868	0,705273
0,0775	0,3814	0,0593	0,4208	0,2849	0,705717
0,0777	0,3710	0,0591	0,4231	0,2830	0,706074
0,0780	0,3603	0,0589	0,4253	0,2810	0,706345
0,0782	0,3496	0,0587	0,4276	0,2790	0,70653
0,0784	0,3386	0,0585	0,4298	0,2768	0,706627
0,0786	**0,3275**	**0,0582**	**0,4320**	**0,2746**	**0,706638**
0,0788	0,3161	0,0579	0,4342	0,2723	0,706561
0,0790	0,3056	0,0576	0,4365	0,2699	0,706399
0,0792	0,2929	0,0572	0,4387	0,2675	0,70615

Анализ результатов. Таким образом, по результатам расчетов при изменении относительной толщины бруса m_H с интервалом 0,01 и в пределах 0,14…0,18 оказалось, что целевая функция принимает максимальное значение при m_H = 0,16 [19]. Диапазон, в котором находится максимальное значение целевой функции, расположен в пределах m_H = 0,15…0,16. На втором этапе расчеты по алгоритму выполняются при изменении толщины бруса с интервалом Δ = 0,001. Оптимальное значение целевая функция принимает при относительной толщине бруса m_H = 0,157. Это и принимаем в качестве окончательного решения данной задачи оптимизации.

Анализируя результаты расчетов в табл. 1.1, можно отметить следующее. С увеличением относительной толщины бруса относительные площади поперечных сечений брусьев возрастают, а площади поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшаются (рис. 1.2) [60]. При этом уменьшение относительной площади поперечного сечения боковых обрезных досок происходит с небольшим ускорением. При увеличении относительной толщины бруса увеличение относительной площади поперечного сечения брусьев происходит практически прямолинейно. Суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок вначале возрастает, достигая максимального значения при относительной толщине бруса m_H = 0,157, а после достижения максимума при m_H = 0,157 величина целевой функции уменьшается.

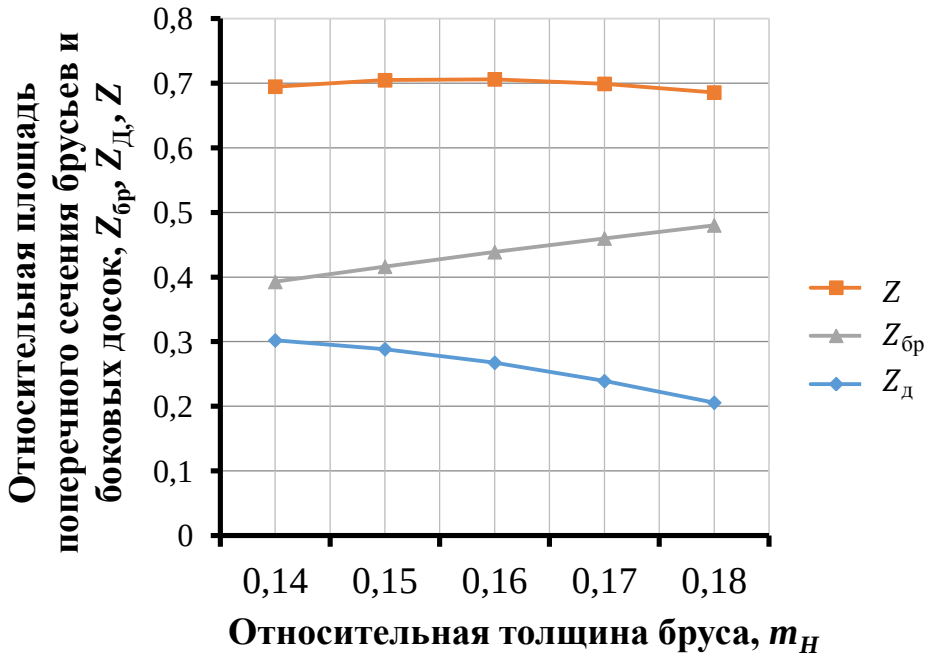


Рис. 1.2. Влияние относительной толщины выпиливаемых брусьев на площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок

Таким образом, расчетами по алгоритму решения задачи оптимизации данной схемы раскроя пиловочника подтверждается взаимосвязь площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, в которой при увеличении площади поперечных сечений брусьев площади поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшаются. Следовательно, установлено, что имеется такое сочетание этих площадей поперечных сечений, при котором сумма этих площадей брусьев и боковых обрезных досок становится максимальной (оптимальной) [81].

С увеличением относительной толщины бруса относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 1.3). При этом ширина крайней боковой доски уменьшается более интенсивно, чем другие боковые обрезные доски. При относительной толщине бруса m_H = 0,18 относительная ширина крайней (третьей) боковой обрезной доски принимает нулевое значение.

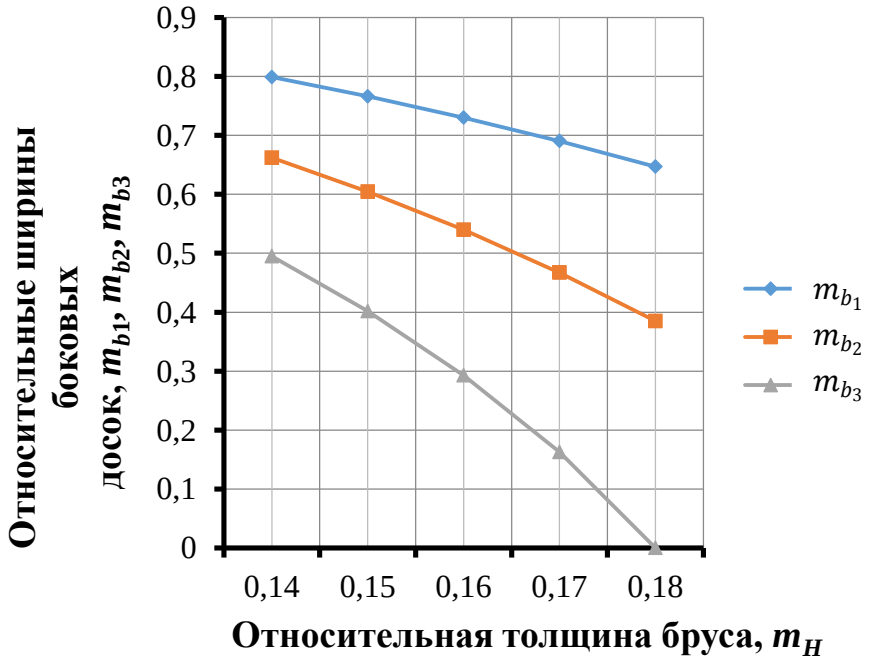


Рис. 1.3. Влияние относительной ширины выпиливаемого бруса на относительные ширины боковых обрезных досок

Анализируя этот график изменения относительной ширины боковых обрезных досок при изменении относительной толщины бруса, следует отметить, что относительную толщину бруса лучше выбирать в пределах 0,15…0,16 от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае относительные ширины боковых обрезных досок принимают значения более 0,3 от диаметра пиловочника.

С увеличением относительной толщины бруса m_H относительная толщина первой пары боковых обрезных досок увеличивается практически прямолинейно, а относительная толщина второй пары боковых обрезных досок замедленно возрастает и после m_H = 0,16 возрастает незначительно (см. рис. 1.4). Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок начинает уменьшаться после достижения относительной толщины бруса $m_H \geq 0{,}15$.

При этом уменьшение относительной толщины этой крайней боковой обрезной доски происходит ускоренно. Следует также отме-

тить, что, очевидно, размеры брусьев и боковых обрезных досок наиболее предпочтительно выбирать в диапазоне изменения m_H = 0,14…0,16 [97].

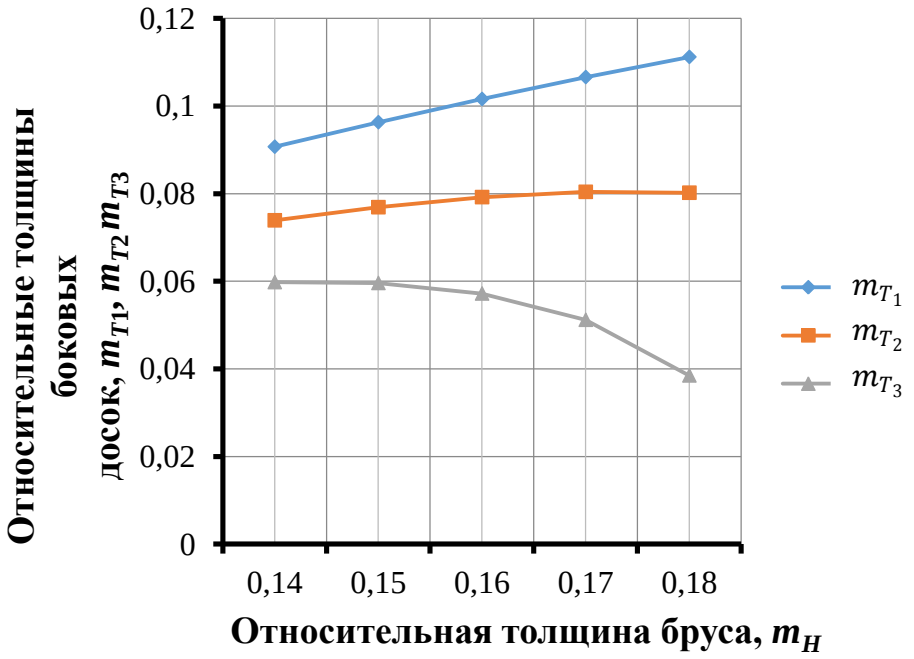


Рис. 1.4. Влияние относительной толщины выпиливаемого бруса на относительные толщины боковых обрезных досок

Таким образом, для данной схемы раскроя пиловочника определены оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок, при которых целевая функция принимает максимальное значение [97]. Расчеты показали, что целевая функция при изменении бруса изменяется плавно, но размеры брусьев и особенно боковых обрезных досок изменяются непропорционально и противоречиво. В наибольшей степени при увеличении относительной толщины бруса уменьшаются размеры третьей пары боковых обрезных досок.

Несмотря на уменьшение относительной площади поперечных сечений боковых обрезных досок, при увеличении относительной толщины бруса относительные размеры крайних боковых досок уменьшаются, а относительные размеры первой и второй пар боковых обрезных досок изменяются противоречиво. Их относительные толщины возрастают, а относительные ширины уменьшаются. Такая сложная закономерность затрудняет выбор размеров досок при расчете и составлении поставов.

Важно знать оптимальные соотношения размеров брусьев и досок при m_H = 0,157d, которые представлены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Оптимальные соотношения брусьев и боковых обрезных досок

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	$\frac{A_2}{A_1}$	$\frac{b_1}{A_2}$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_2}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{T_3}{T_2}$	$\frac{Z_{бр}}{Z}$	$\frac{Z_Д}{Z}$
0,0795	0,178	0,135	0,140	0,178	0,893	0,840	0,7551	0,585	0,786	0,74	0,61	0,39

Результаты табл. 1.3 показывают, что с увеличением расстояния выпиливаемого пиломатериала от центра бревна отношение размера последующего к предыдущему пиломатериалу уменьшается. Объем выпиливаемых досок составляет 39%, а объем брусьев – 61% от общего объема пиломатериалов. Размер пифагорической зоны составляет 0,945 от диаметра бревна в вершинном торце.

Зная эти оптимальные соотношения брусьев и досок, можно определить, а затем и выбрать оптимальные размеры бревна для получения требуемых (стандартных) размеров досок. Результаты расчетов представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Оптимальные расчетные размеры брусьев и боковых обрезных досок для различных диаметров бревен

Параметры брусьев и досок	Размеры брусьев и досок (мм) при диаметре бревна (см)										
	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
H	94,2	100,5	106,8	113,0	119,3	125,6	131,9	138,2	144,4	150,7	157,0
A_1	592,8	632,3	671,8	711,4	750,9	790,4	829,9	869,4	908,9	948,4	988,0
A_2	529,2	564,5	599,8	635,0	670,3	705,6	740,9	776,2	811,4	846,7	882,0
T_1	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100
b_1	444,6	747,2	503,9	5335	563,2	592,8	622,4	652,1	681,7	711,4	741,0
T_2	44,2	50,3	53,4	566,6	52,7	62,9	66,0	69,2	72,3	75,5	78,6
b_2	336	358	381	403	426	448	470	493	515	538	560
T_3	34,9	37,2	39,6	41,9	44,2	46,6	48,9	51,2	53,5	55,9	58,2
b_3	196,2	209,3	222,4	235,4	248,5	261,6	274,7	287,8	300,8	313,9	327,5

Данные табл. 1.4 показывают, что для получения брусьев толщиной 125…150 мм необходим пиловочник диаметром 80…100 см. В этом случае толщина боковых обрезных досок колеблется в пределах 40…100 мм. Можно констатировать, что такой способ распиловки пиловочника с выпиливанием трех брусьев и трех пар боковых досок вполне приемлем для определенных диаметров бревен и размеров досок [97].

Если осуществлять распиловку бревен диаметром 68 см, то можно рекомендовать выпиливание трех брусьев толщиной 100 мм, а толщины боковых обрезных досок стандартных размеров следует вы-

брать соответственно для первой пары 60 мм, второй – 50 мм, третьей – 32 (40) мм.

Брусья толщиной 150 мм можно выпиливать из пиловочника диаметром в вершинном торце 96 (100) см. В этом случае толщину боковых обрезных досок стандартных размеров можно рекомендовать соответственно: для первой пары 100 мм, для второй пары 75 мм, а для третьей пары 50 мм.

Таким образом, для данного варианта раскроя пиловочника определены оптимальные соотношения размеров брусьев и досок, при которых получается максимальный выход пилопродукции из пифагорической зоны. Относительная величина пифагорической зоны пиловочника при этом составляет 0,945 от диаметра бревна в вершинном торце.

1.2. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок

Постановка задачи. Данная задача оптимизации ранее была решена без учета ширины пропила. При разработке теории максимальных поставов принято определять оптимальные размеры брусьев и досок без учета ширины пропила и припуска на усушку. При этом полагают, что ширина пропила оказывает влияние на оптимальные размеры пиломатериалов прямо пропорционально размерам выпиливаемых пиломатериалов. Учет ширины пропила и припуска на усушку осуществляется при дальнейшем составлении поставов [98, 107, 117]. С учетом ширины пропила задачу оптимизации такой схемы раскроя пиловочника можно решить следующим образом (рис. 1.5) [54].

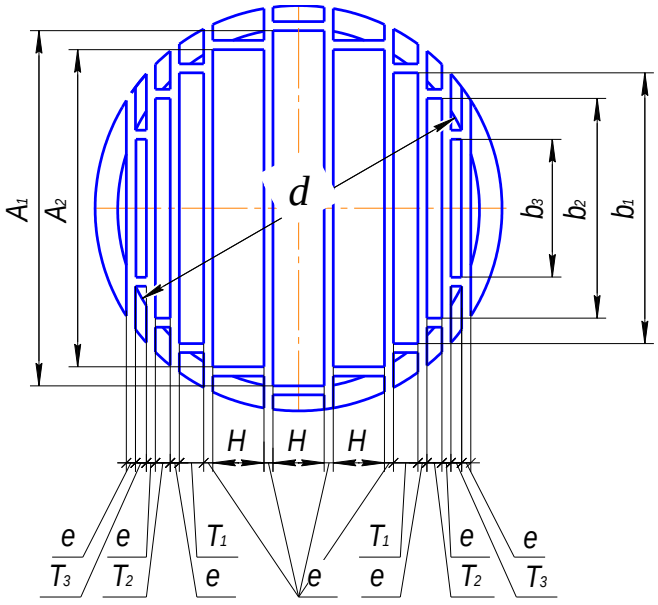


Рис. 1.5. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев и трёх пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила

Составление математической модели. Целевая функция остается прежней (1.1). Уравнения связи с учетом ширины пропила будут иметь следующий вид. Для сравнения формул, полученных с учетом ширины пропила, с формулами, полученными без учета ширины пропила, последующие формулы с учетом ширины пропила обозначены теми же цифрами, но со штрихами [31, 54].

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (1.2')$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - (3H + 2e)^2 - A_2^2 = 0. \quad (1.3')$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d - b_1^2 - (3H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (1.4')$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (1.5')$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0. \quad (1.6')$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующие уравнения [54].

Для боковых брусьев:

$$d^2 - 9H^2 - 4e^2 - 12He - A_2^2 = 0. \quad (1.3'')$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H - 4T_1^2 - 16e^2 - 12HT_1 - 24He - 16T_1e = 0. \quad (1.4'')$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 36He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e = 0. \end{gathered} \quad (1.5'')$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 48He - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e = 0. \end{gathered} \quad (1.6'')$$

Математическая модель задачи оптимизации с учетом ширины пропила составлена.

Решение математической модели. Для решения задачи оптимизации воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа с учетом ширины пропила будет иметь вид [31]:

$$\begin{aligned} L = {} & HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + \lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \\ & + \lambda_2(d^2 - 9H^2 - 4e^2 - 12He - A_2^2) + \\ & + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 12HT_1 - 24He - 16T_1e) + \\ & + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 12HT_1 - \\ & - 12HT_2 - 36He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - 9H^2 - \\ & - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 48He - \\ & - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2\ e - 32T_3e). \end{aligned} \tag{1.7'}$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю [35]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial A_1} = H - 2\lambda_1 A_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial H} = A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 12\lambda_2 \mathrm{e} - 18\lambda_3 H - \\ -12\lambda_3 T_1 - 24\lambda_3 \mathrm{e} - 18\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 T_2 - \\ -36\lambda_4 e - 18\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 - 48\lambda_5 e = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 8\lambda_3 T_1 - 12\lambda_3 H - 16\lambda_3 e - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - \\ -8\lambda_4 T_2 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_2 - \\ -12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 32\lambda_5 e = 0. \end{cases} \tag{1.8'}$$

Решаем систему уравнений (1.8') совместно с уравнениями связи [35, 36]. Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (1.8'), из которого получаем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{1.9'}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (1.8'), которое записываем в следующем виде:

$$b_3 = 6\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_2 + 4\lambda_5 T_3 + 16\lambda_5 e. \tag{1.10'}$$

В последнее равенство (1.10') подставляем выражение (1.9'), получим:

$$\begin{gathered} b_3^2 = 6HT_3 + 4T_1T_2 + 4T_2T_3 + 4T_3^2 + 16T_3e = \\ = 2T_3(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e). \end{gathered} \tag{1.11'}$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (1.8'), из которого получаем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$\mathrm{T}_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{1.12'}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (1.8'). Сравниваем его с равенством (1.10'), отмечаем, что последние пять членов седьмого уравнения совпадают с членами уравнения (1.10'). Тогда можно написать:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_2 + 6\lambda_4 H + 6\lambda_4 T_1 + 12\lambda_4 e + b_3. \tag{1.13'}$$

В равенство (3.13') подставляем выражение (1.12'), получим:

$$b_2^2 = 6HT_2 + 4T_1T_2 + 4T_2^2 + 12T_2e + b_2b_3. \tag{1.14'}$$

Это равенство представляем в виде

$$b_2b_3 = b_2^2 - 6HT_2 - 4T_1T_2 - 4T_2^2 - 12T_2e. \tag{1.15'}$$

Зная ширину второй пары боковых обрезных досок, можно определить ширину третьей пары обрезных досок по формуле:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 6e). \tag{1.16'}$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (1.8'), из которого получаем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{1.17'}$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (1.8'), у которого девять последних членов совпадают с членами равенства (1.13'). Тогда можно написать это уравнение в следующем виде:

$$b_1 = 6\lambda_3 H + 4\lambda_3 T_1 + 8\lambda_3 e + b_2. \tag{1.18'}$$

Подставляем в равенство (1.18') выражение (1.17'), получим:

$$b_1^2 = 6HT_1 + 4T_1^2 + 8T_1 e + b_1 b_2. \tag{1.19'}$$

Из последнего равенства (1.19') можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1 + 4e). \tag{1.20'}$$

Зная ширину второй пары обрезных досок b_2, воспользуемся уравнением связи (1.4'), которое представляем в виде

$$\begin{gathered} 4T_2^2 + 12HT_2 + 8T_1T_2 + 24eT_2 + 4T_1^2 + 12HT_1 + \\ +9H^2 + b_1^2 - d^2 + 36e^2 + 36He + 24T_1 e = 0. \end{gathered} \tag{1.21'}$$

Решая это квадратное уравнение (1.21'), получим:

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1 + 6e)\right). \tag{1.22'}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (1.8'), из которого получаем коэффициент Лагранжа λ_1:

$$H = 2\lambda_1 A_1, \qquad \lambda_1 = \frac{H}{2A_1}. \tag{1.23'}$$

Рассматриваем второе уравнение системы (1.8'), из которого получаем коэффициент Лагранжа λ_2:

$$H = \lambda_2 A_2, \qquad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \tag{1.24'}$$

Используя уравнение связи (1.2'), можно написать:

$$\lambda_1 = \frac{H}{2\sqrt{d^2 - H^2}}. \tag{1.25'}$$

Используя уравнение связи (1.3'), можно написать:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - (3H + 2e)^2}}. \quad (1.26')$$

Тогда отношение множителей Лагранжа λ_1/λ_2 можно определить по формуле:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{d^2 - (3H + 2e)^2}}{2\sqrt{d^2 - H^2}}. \quad (1.27')$$

Рассматриваем третье уравнение системы (1.8'), которое представляем в виде

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 12\lambda_2 e + 3b_1. \quad (1.28')$$

Подставим в последнее равенство (1.28') выражения для множителей Лагранжа λ_1 и λ_2, получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + 18\frac{H^2}{A_2} + 12\frac{He}{A_2} + 3b_1. \quad (1.29')$$

Из последнего равенства (1.29') можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3}(A_1 + 2A_2 - H(\frac{H}{A_1} + \frac{18H}{A_2} + \frac{12e}{A_2})). \quad (1.30')$$

Из уравнения связи (1.2') можно написать:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (1.31')$$

Из уравнения связи (1.3') можно написать:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (3H + 2e)^2}. \quad (1.32')$$

Определив ширину пластей брусьев A_1 и A_2, можно, пользуясь формулой (1.30'), определить ширину первой пары боковых обрезных досок. Пользуясь уравнением связи (1.4'), можно определить толщину первой пары боковых досок по формуле

$$T_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (3H + 4e)). \quad (1.33')$$

По формуле (1.20') можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок, а затем по формуле (1.22') можно определить

толщину второй пары боковых досок. Далее, используя формулу (1.16'), можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок. Используя уравнение связи (1.6'), можно определить толщину третьей пары боковых обрезных досок по формуле:

$$T_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 8e)). \quad (1.32')$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (1.8'), а также все уравнения связи. Получены формулы для определения размеров брусьев и досок с учетом ширины пропила. Однако в этих формулах размеры брусьев и досок взаимосвязаны, что затрудняет нахождение оптимальных размеров. Поэтому для решения задачи воспользуемся численным методом. Для этого задаемся шириной пропила и изменяем толщину бруса, а остальные размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции определяем по полученным выше формулам. По результатам расчетов находим максимальное значение целевой функции. Этот вариант и будет соответствовать оптимальным размерам брусьев и досок [19].

Алгоритм решения задачи. Для облегчения расчетов и анализа результатов полученные ранее формулы представляем в относительных единицах, полагая *H/d* = m_H и $e/d = m_e$.

Тогда алгоритм решения задачи будет иметь следующий вид [36].

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (1.35')$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (3m_H + 2e)^2}. \quad (1.36')$$

Относительная ширина первой боковой пары обрезных досок:

$$m_{b1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}(m_{A1} + 2m_{A2} - m_H(\frac{m_H}{m_{A1}} + \frac{18m_H}{m_{A2}} + \frac{12m_e}{m_{A2}})). \quad (1.37')$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T1} = \frac{T_1}{d} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - m_{b1}^2} - (3m_H + 4m_e)). \quad (1.38')$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b2} = \frac{b_2}{d} = m_{b1} - \frac{2m_{T1}}{m_{b1}}(3m_H + 2m_{T1} + 4m_e). \quad (1.39')$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T2} = \frac{T_2}{d} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - m_{b2}^2} - (3m_H + 2m_{T1} + 6m_e)). \quad (1.40')$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b3} = \frac{b_3}{d} = m_{b2} - \frac{2m_{T2}}{m_{b2}}(3m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 6m_e). \quad (1.41')$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T3} = \frac{T_3}{d} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - m_{b3}^2} - (3m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 8m_e)). \quad (1.42')$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$\mathrm{Z}_{\text{бр}} = m_H(m_{A1} + 2m_{A2}). \quad (1.43')$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T1}m_{b1} + 2m_{T2}m_{b2} + 2m_{T3}m_{b3}. \quad (1.44')$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (1.45')$$

Выполнение расчетов. Расчеты выполняются следующим образом. Для принятой относительной ширины пропила задаемся относительной толщиной бруса и выполняем все расчеты по алгоритму. Путем перебора расчетов с различной относительной толщиной бруса находим вариант решения с максимальной величиной целевой функции. Этот результат и считаем оптимальным.

В расчетах ширину пропила в относительных единицах принимаем равной m_e = 0; 0,005; 0,01; 0,015, 0,02. Результаты расчетов представлены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок, а также величина целевой функции при заданной относительной ширине пропила и относительной толщине бруса

m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}
0	0,157	0,987599	0,882133	0,741314	0,100079
0,005	0,160	0,987117	0,871722	0,721669	0,096119
0,01	0,165	0,986294	0,85719	0,692759	0,093084
0,015	0,17	0,985444	0,841665	0,661677	0,089895
0,02	0,176	0,98439	0,823029	0,6234	0,086952

Окончание табл. 1.5

m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$Z_{\text{бр}}$	$Z_{\text{д}}$	Z
0,560098	0,078634	0,327486	0,058215	0,432043	0,274595	0,706638
0,53727	0,075586	0,297146	0,045711	0,43689	0,247118	0,684008
0,498956	0,072729	0,240482	0,032013	0,445611	0,216945	0,662556
0,457946	0,069595	0,178625	0,017469	0,453692	0,188945	0,642636
0,40528	0,066145	0,093817	0,000698	0,462959	0,162157	0,625115

Анализ результатов расчетов. Данные табл. 1.5 показывают, что с увеличением ширины пропила оптимальная относительная толщина бруса возрастает, а относительные размеры боковых досок уменьшаются, и, следовательно, относительная площадь поперечных сечений брусьев возрастает, а относительная площадь поперечных сечений боковых досок уменьшается (см. рис. 1.6). С увеличением относительной ширины пропила относительные площади поперечных сечений брусьев возрастают, а площади поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшаются. Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок уменьшается [81].

Этот график показывает, что с увеличением относительной ширины пропила относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается более значительно, чем рост относительной площади поперечных сечений брусьев, так как в итоге суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается [81].

С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина каждого бруса возрастает, а оптимальная относительная ширина пласти центрального бруса уменьшается незначительно (см. рис. 1.7). При этом оптимальная относительная ширина наружной пласти боковых брусьев уменьшается более существенно.

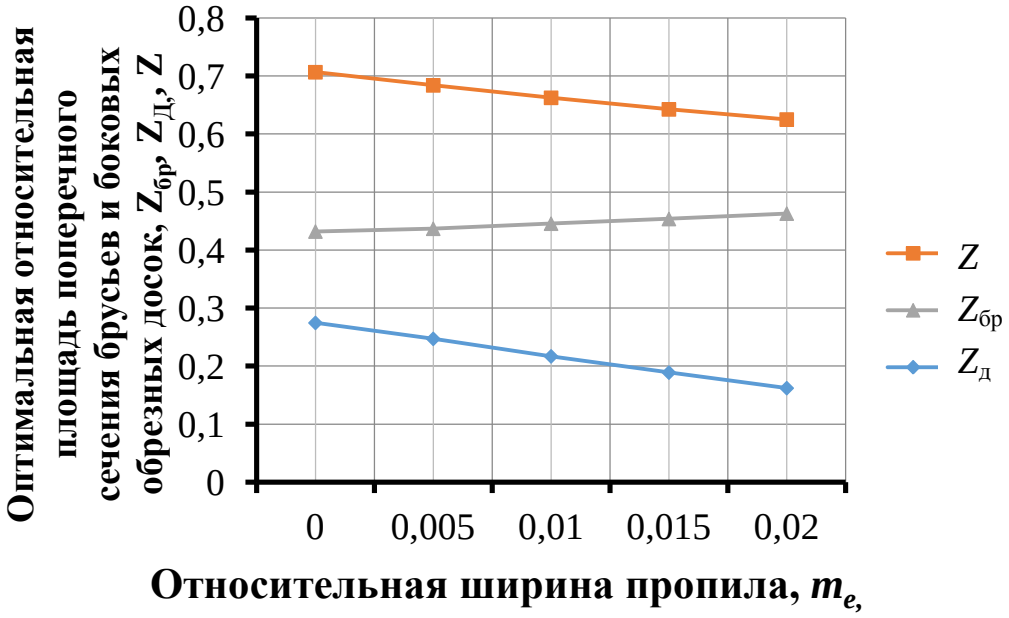


Рис. 1.6. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев
и боковых обрезных досок

Таким образом, установлена важная зависимость, которая показывает, что с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины брусьев возрастают. Ранее полагали, что с увеличением ширины пропила размеры брусьев и досок должны уменьшаться [100]. Такой вывод в наших расчетах не подтверждается.

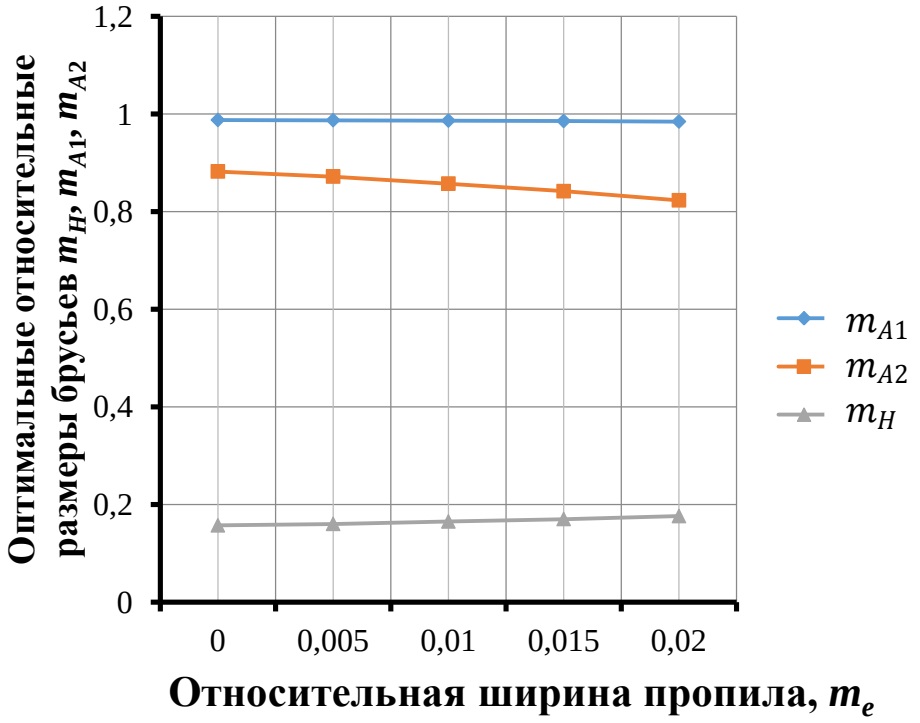


Рис. 1.7. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные размеры брусьев

С увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются ускоренно (см. рис. 1.8), причем наибольшее влияние относительная ширина пропила оказывает на оптимальную относительную ширину крайней боковой обрезной доски. Оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски при ширине пропила m_e = 0,020 уменьшается примерно в 3 раза по сравнению с вариантом, когда относительная ширина пропила равна нулю (m_e = 0). Целевая функция при увеличении относительной ширины пропила, конечно, уменьшается.

Такое изменение относительных ширин боковых обрезных досок при увеличении относительной ширины пропила затрудняет расчет и выбор оптимальных размеров, а также составление поставов с учетом получения досок стандартной ширины.

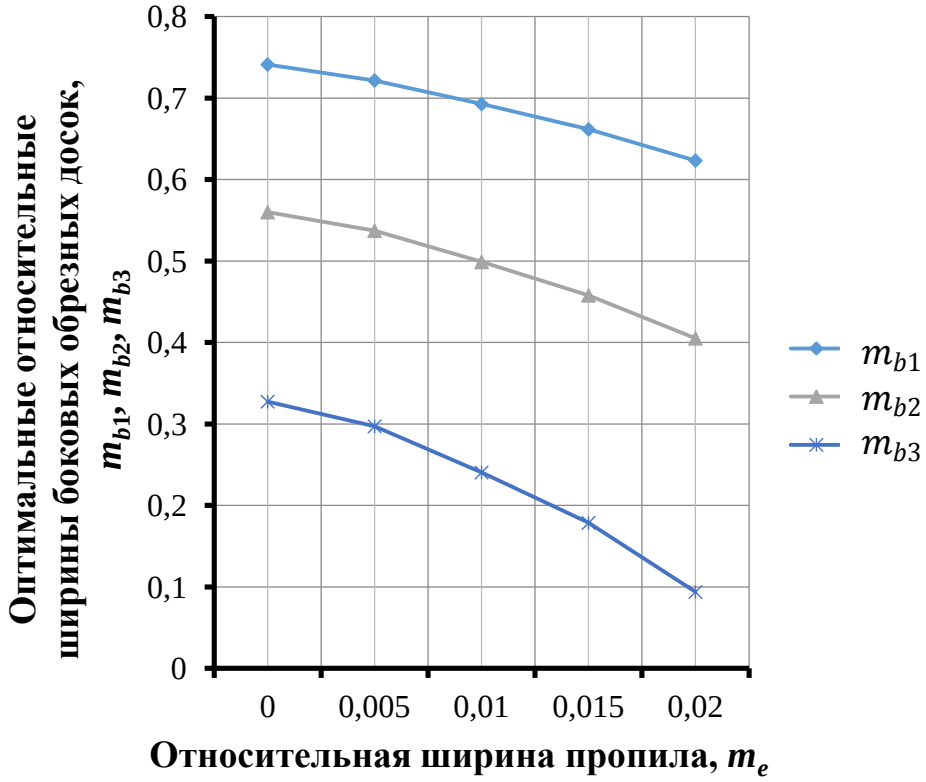


Рис. 1.8. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок

С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 1.9), причем относительная толщина крайней боковой доски при m_e = 0,02 становится близкой к нулю. Следовательно, ширина пропила оказывает влияние на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок не равнозначно. В большей степе-

ни при этом изменяются размеры боковых обрезных досок, особенно уменьшаются размеры крайней боковой обрезной доски [97].

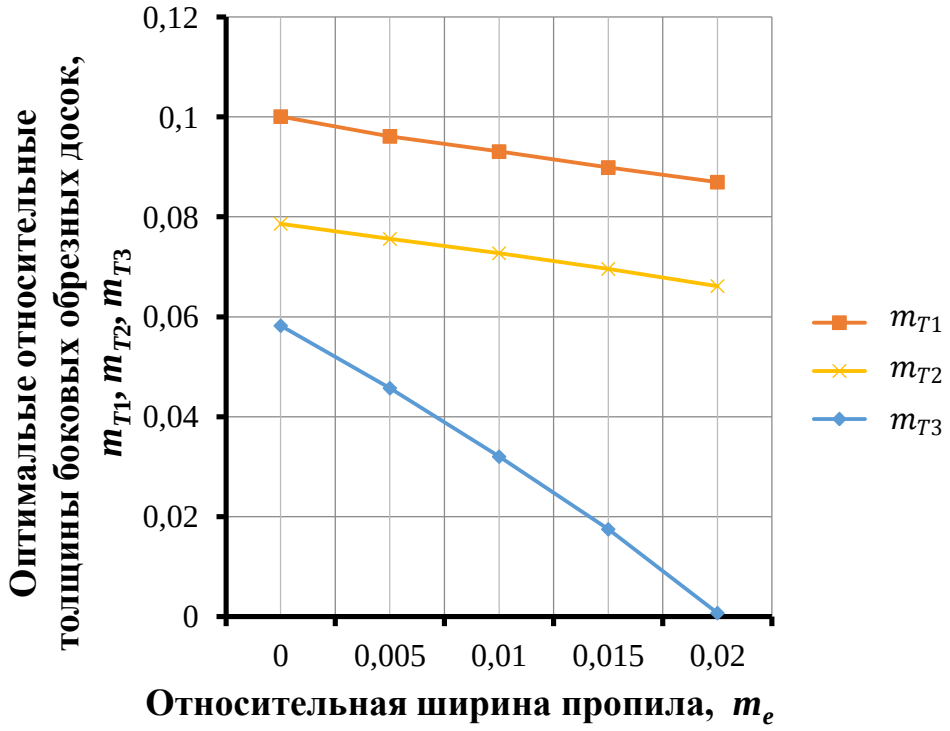


Рис. 1.9. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок

Таким образом, установлена сложная зависимость влияния относительной ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок. Поэтому относительную ширину пропила следует стремиться уменьшать путем применения пил с малой толщиной и не столь большим уширением зубьев на сторону (разводом).

Пользуясь предлагаемым алгоритмом решения задачи оптимизации данной схемы раскроя пиловочника или графиками, можно более точно определить оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок с учетом ширины пропила [61].

1.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины

Постановка задачи. Ранее задача оптимизации раскроя пиловочника решена для условия, когда толщины брусьев принимали одинаковыми. Рассмотрим задачу, когда центральный брус может быть по толщине и больше и меньше, чем боковые (см. рис. 1.10). В данной задаче рассматривается главный вопрос, при каком варианте

соотношения толщин брусьев получается максимальный выход пиломатериалов. В начале рассматриваем задачу оптимизации без учета ширины пропила [73].

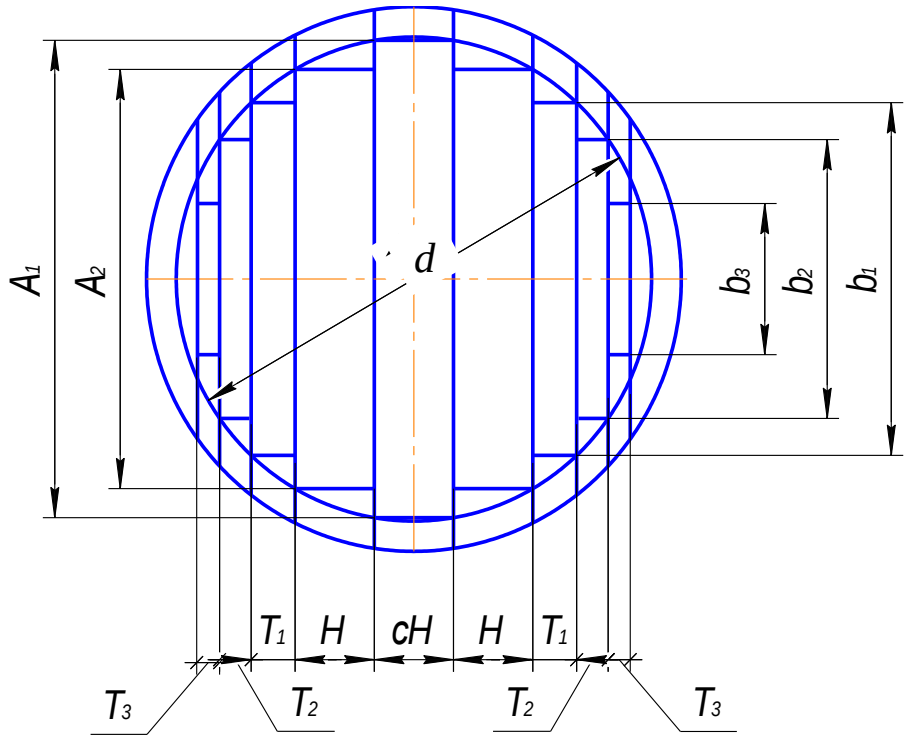


Рис. 1.10. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых обрезных досок

Составление математической модели. Для решения данной оптимизационной задачи составляем математическую модель. В задаче оптимизации рассматривается пифагорическая зона пиловочника. Следовательно, целевую функцию можно написать в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок [19]. С учетом разной толщины боковых и центрального брусьев целевую функцию можно представить в следующем виде:

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3. \quad (1.49)$$

В формуле (1.49) толщина центрального бруса определяется по выражению

$$H_{\text{ц}} = cH. \quad (1.50)$$

Уравнения связи можно записать в следующем виде [53].

Для центрального бруса:

$$d^2 - A_1 - c^2H^2 = 0. \quad (1.51)$$

Для боковых брусьев:

$$\begin{gathered} d^2 - A_2^2 - (cH + 2H)^2 = 0, \\ d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2 = 0. \end{gathered} \tag{1.52}$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1)^2 = 0, \\ d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1 = 0. \end{gathered} \tag{1.53}$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)^2 = 0, \\ d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \end{gathered} \tag{1.54}$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 = 0, \\ d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0. \end{gathered} \tag{1.55}$$

Полагаем, что математическая модель для данного варианта задачи оптимизации раскроя пиловочника составлена. Анализируя математическую модель данной оптимизационной задачи следует отметить, что неизвестных факторов больше чем уравнений связи. Следовательно, решить такую математическую модель задачи оптимизации классическим методом не представляется возможным.

Решение математической модели. Для решения этой задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа запишется в следующем виде:

$$\begin{gathered} L = cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + \lambda_1(d^2 - A_1^2 - c^2H^2) + \\ +\lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2) + \\ +\lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1) + \\ +\lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2) + \\ +\lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3). \end{gathered} \tag{1.56}$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю [77]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = cH - 2\lambda_1 A_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = cA_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 c^2 H - 2\lambda_2 c^2 H - 8\lambda_2 cH - 8\lambda_2 H - 2\lambda_3 c^2 H - \\
-8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_3 H - 8\lambda_3 cH - 4\lambda_3 cT_1 - 2\lambda_4 c^2 H - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 cH - \\
-4\lambda_4 cT_1 - 4\lambda_4 cT_2 - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_4 T_2 - 2\lambda_5 c^2 H - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 cH - \\
-4\lambda_5 cT_1 - 4\lambda_5 cT_2 - 4\lambda_5 cT_3 - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 8\lambda_3 T_1 - 4\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - \\
-8\lambda_4 T_2 - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - \\
-8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 = 0.
\end{cases}
\tag{1.57}
$$

Решаем полученную систему уравнений (1.57) совместно с уравнениями связи. Рассматриваем первое уравнение системы (1.57), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_1:

$$
cH = 2\lambda_1 A_1, \qquad \lambda_1 = \frac{cH}{2A_1}. \tag{1.58}
$$

Рассматриваем второе уравнение системы (1.57), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_2:

$$
2H = 2\lambda_2 A_2, \qquad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \tag{1.59}
$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (1.57), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$
T_1 = \lambda_3 b_1 \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{1.60}
$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (1.57), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{1.61}$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (1.57), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{1.62}$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (1.57), которое представляем в виде

$$b_3 = 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_2 + 4\lambda_5 T_3 + 2\lambda_5 cH + 4\lambda_5 H. \tag{1.63}$$

В последнее равенство (1.63) подставляем выражение (1.62), получим:

$$\begin{aligned} b_3^2 &= 4T_3^2 + 2cHT_3 + 4HT_3 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 = \\ &= 2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3). \end{aligned} \tag{1.64}$$

Последнее равенство (1.64) подставляем в уравнение связи (1.55). После преобразований получим:

$$\begin{aligned} T_3^2 + \frac{3}{4}(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)T_3 + \\ + \frac{1}{8}(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2) - \frac{d^2}{8} = 0. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Решая это квадратное уравнение (1.65), получим:

$$T_3 = \frac{1}{8}\left(\sqrt{8d^2 + (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)^2} - 3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)\right). \tag{1.66}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (1.57), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_2 + 2\lambda_4 cH + 4\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1 + b_3. \tag{1.67}$$

В последнее уравнение (1.67) подставляем равенство (1.61), получим:

$$b_2^2 = 4T_2^2 + 2cHT_2 + 4HT_2 + 4T_1T_2 + b_2b_3. \tag{1.68}$$

Это равенство можно представить в виде

$$b_2 b_3 \;=\; b_2^2 - 4T_1T_2 - 4T_2H - 4T_2^2 + 2cHT_2. \qquad (1.69)$$

Зная ширину второй пары боковых обрезных досок, можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_3 \;=\; b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2). \qquad (1.70)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (1.57), которое записываем в виде

$$b_1 \;=\; 4\lambda_3 T_1 + 2\lambda_3 cH + 4\lambda_3 H + b_2. \qquad (1.71)$$

Подставим в равенство (1.71) выражение (1.60), получим:

$$b_1^2 - 4HT_1 - 4T_1^2 - 2cHT_1 \;=\; b_1 b_2. \qquad (1.72)$$

Из последнего равенства (1.72) можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 \;=\; b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(cH + 2H + 2T_1). \qquad (1.73)$$

Зная ширину второй пары обрезных досок b_2, используя уравнение связи (1.54), можно определить толщину этой пары досок по формуле:

$$T_2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1)\right). \qquad (1.74)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (1.57), которое представляем в следующем виде:

$$cA_1 + 2A_2 \;=\; 2\lambda_1 c^2 H + 2\lambda_2 c^2 H^2 + 8\lambda_2 cH + 8\lambda_2 H + cb_1 + 2b_1. \qquad (1.75)$$

Подставим в последнее равенство (1.75) выражения для множителей Лагранжа λ_1 *и* λ_2 (1.58) и (1.59), получим:

$$cA_1 + 2A_2 \;=\; \frac{c^3H^2}{A_1} + \frac{2c^2H^2}{A_2} + \frac{8cH^2}{A_2} + \frac{8H^2}{A_2} + b_1(c + 2). \qquad (1.76)$$

Из последнего равенства (1.76) определяем ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 \;=\; \frac{cA_1^2 - c^3H^2}{(c+2)A_1} + \frac{2A_2^2 - 2c^2H^2 - 8cH^2 - 8H^2}{(c+2)A_2}. \qquad (1.77)$$

Последнее равенство (1.77) можно записать в следующем виде:

$$b_1 = \frac{c(A_1^2 - c^2H^2)}{(c+2)A_1} + 2\frac{A_2^2 - H^2(\mathrm{c}+2)^2}{(c+2)A_2}. \quad (1.78)$$

Пользуясь уравнением связи (1.53), можно определить толщину первой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$T_1 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H)\right). \quad (1.79)$$

Толщину третьей пары обрезных досок можно определить из уравнения связи (1.55):

$$T_3 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (cH + 2T_2 + 2T_2)\right). \quad (1.80)$$

Алгоритм решения задачи. Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (1.57) и все уравнения связи. Получены формулы для определения размеров брусьев и досок. Однако определить оптимальные размеры непосредственно по этим формулам не представляется возможным, так как эти размеры взаимосвязаны. Для решения задачи воспользуемся численным методом [35, 36]. Алгоритм решения задачи в относительных единицах приводится ниже, полагаем $m_H = \frac{H}{d}$.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2m_H^2}. \quad (1.81)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H)^2}. \quad (1.82)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + 2\frac{1 - 2(cm_H + 2m_H)^2}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (1.83)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H)\right). \quad (1.84)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1}\right). \quad (1.85)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1})\right). \quad (1.86)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}\right). \quad (1.87)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}\right)\right). \quad (1.88)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}. \quad (1.90)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{b_1} m_{T_1} + 2m_{b_2} m_{T_2} + 2m_{b_3} m_{T_3}. \quad (1.91)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (1.92)$$

Выполнение расчетов. Расчеты выполняются в следующей последовательности. Вначале задаемся величиной коэффициента отношения толщин брусьев *c*. Далее изменяем относительную толщину бокового бруса в определенных пределах и определяем по алгоритму все размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов отыскиваем вариант, в котором величина целевой функции принимает максимальное (оптимальное) значение [73]. Этот вариант и записываем в таблицу. Влияние коэффициента *c* на оптимальные размеры брусьев и досок, а также на величину целевой функции представлено в табл. 1.6 [50, 57].

Таблица 1.6

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции для различных значений коэффициента *c*

c	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0,6	0,166	0,995	0,9021	0,7624	0,1078	0,5794
0,8	0,161	0,9917	0,8926	0,7535	0,1033	0,5733
1	0,157	0,9876	0,8821	0,7413	0,1001	0,5601
1,2	0,152	0,9832	0,8737	0,7329	0,097	0,5528
1,4	0,146	0,9789	0,8681	0,7292	0,094	0,5528
1,5	0,144	0,9764	0,8637	0,7235	0,0932	0,5456
1,6	0,141	0,9742	0,8616	0,7223	0,092	0,5461
1,8	0,136	0,9696	0,8561	0,7164	0,0905	0,5402
2	0,131	0,9651	0,8517	0,7116	0,0893	0,5354
2,2	0,125	0,9614	0,8511	0,7135	0,0878	0,541
2,4	0,121	0,9569	0,8465	0,7064	0,0877	0,5307
2,5	0,118	0,9555	0,8474	0,709	0,0871	0,5356
2,6	0,115	0,9543	0,8486	0,712	0,0866	0,5412
2,7	0,112	0,9532	0,8502	0,7156	0,0861	0,5475
2,8	0,11	0,9514	0,8492	0,7139	0,0861	0,5449
3	**0,108**	**0,9441**	**0,8445**	**0,7043**	**0,0871**	**0,5287**
3,2	0,105	0,9419	0,8378	0,6912	0,0883	0,5065
3,4	0,099	0,9416	0,8451	0,7049	0,0874	0,5291
3,6	0,095	0,9397	0,8467	0,7071	0,0876	0,532
3,8	0,091	0,9383	0,8494	0,711	0,0877	0,5377
4	0,085	0,9374	0,8573	0,744	0,0884	0,5455

Продолжение табл. 1.6

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,0839	0,3432	0,0621	0,3986	0,3042	0,7028
0,081	0,3418	0,0602	0,4152	0,2897	0,7048
0,0786	0,3275	0,0582	0,432	0,2746	0,7066
0,0765	0,3222	0,0567	0,445	0,2632	0,7082
0,0745	0,3282	0,0556	0,4536	0,2559	0,7095
0,0738	0,3188	0,0549	0,4596	0,2504	0,71
0,0731	0,322	0,0545	0,4628	0,2478	0,7106
0,0719	0,3161	0,0536	0,4702	0,2412	0,7114
0,071	0,3112	0,0529	0,476	0,236	0,712
0,0702	0,3227	0,0527	0,4772	0,2353	0,7125
0,0699	0,3076	0,052	0,4827	0,2301	0,7128
0,0696	0,3061	0,0541	0,4839	0,2291	0,7129
0,0694	0,3257	0,0523	0,4805	0,2324	0,7129
0,0691	0,3363	0,0525	0,4787	0,2342	0,7129
0,0691	0,3322	0,0524	0,4799	0,2331	0,7129

Окончание табл. 1.6

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$z_{бр}$	$z_{д}$	z
0,0695	**0,3056**	**0,0517**	**0,4851**	**0,2282**	**0,713**
0,0698	0,3056	0,0517	0,4851	0,2278	0,7129
0,0696	0,3057	0,0518	0,4843	0,2285	0,7128
0,0698	0,3098	0,052	0,4823	0,2303	0,7126
0,07	0,3181	0,0525	0,4791	0,2333	0,7124
0,0717	0,3565	0,0528	0,4735	0,2347	0,7122

Анализ расчетов. Из табл. 1.6 видно, что с увеличением коэффициента *c* величина целевой функции вначале возрастает, а затем уменьшается, достигая максимального значения $Z = 0{,}7130$ при $c = 3{,}0$. При изменении коэффициента *c* в пределах 2,0…3,0 целевая функция изменяется не столь значительно. Следовательно, использование коэффициента *c* меньше единицы не целесообразно, так как выход пилопродукции снижается по сравнению с вариантом, когда $c \geq 1{,}0$. Поэтому центральный брус по толщине целесообразно выпиливать больших размеров по сравнению с боковыми [53].

С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. Таким образом, для каждого значения коэффициента изменения толщин брусьев *c* имеется свое оптимальное соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором целевая функция принимает максимальное (оптимальное) значение [53].

Следовательно, с увеличением коэффициента *c* относительная площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, принимает максимальное значение при коэффициенте $c = 3{,}0$ (см. рис. 1.11).

Таким образом, определено глобальное значение коэффициента изменения толщин брусьев, при котором целевая функция принимает максимальное значение.

Изменение относительных размеров центрального и боковых брусьев при увеличении коэффициента *c* представлено на рис. 1.12. С увеличением коэффициента *c* оптимальные относительные ширины пластей брусьев уменьшаются с замедлением и при коэффициенте $c = 3{,}0$ и более практически мало изменяются. Оптимальная относительная толщина центрального бруса с увеличением коэффициента *c* возрастает, а оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается. В результате суммарная оптимальная толщина всех трех брусьев Σm_H возрастает, и при $c = 2{,}5$ и более этот рост незначителен [53].

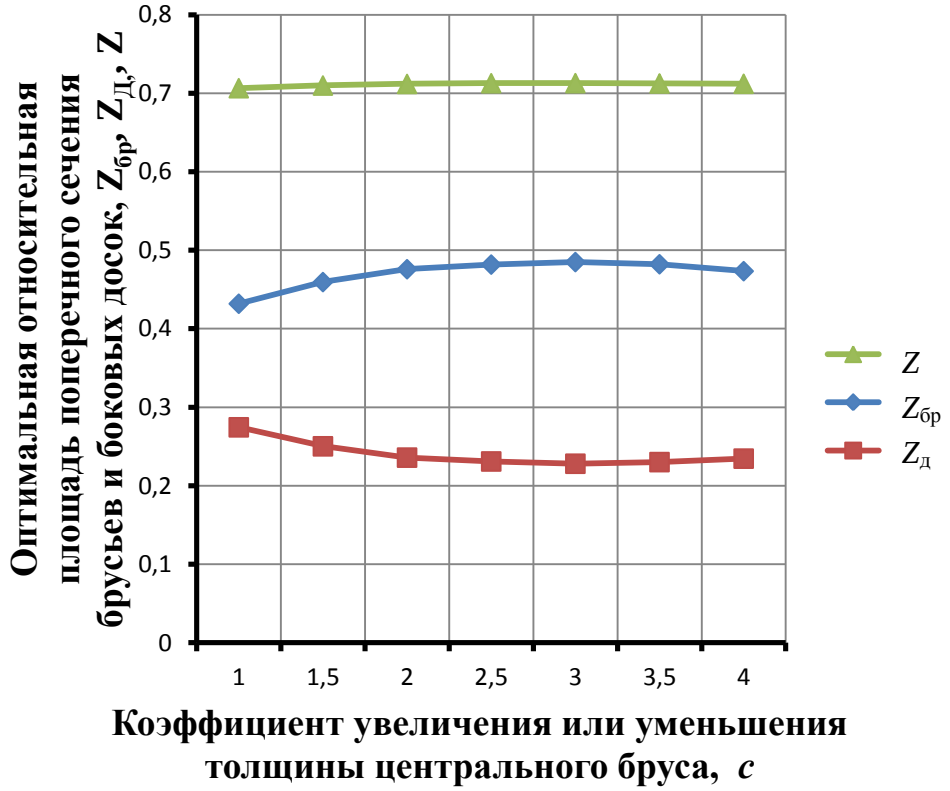


Рис. 1.11. Влияние коэффициента изменения толщины центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

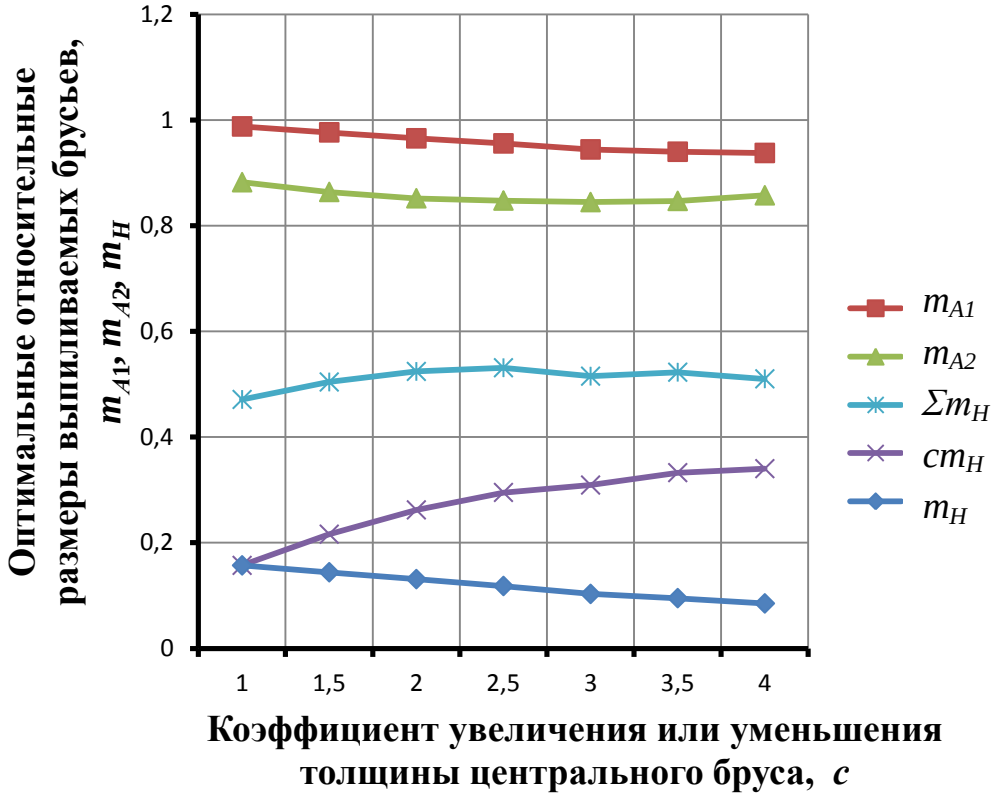


Рис. 1.12. Влияние коэффициента изменения толщины центрального бруса на относительные размеры выпиливаемых брусьев

Изменение относительных толщин боковых обрезных досок при увеличении коэффициента *c* представлено на рис. 1.13 [53]. С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная толщина боковых обрезных досок вначале уменьшается, причем уменьшение оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок происходит с замедлением и при *c* = 2,5 и более оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются.

Следовательно, при коэффициенте *c* = 2,5 и более оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок мало изменяются. Такая закономерность имеет очень важное значение, так как позволяет упрощать выбор толщин досок стандартных размеров.

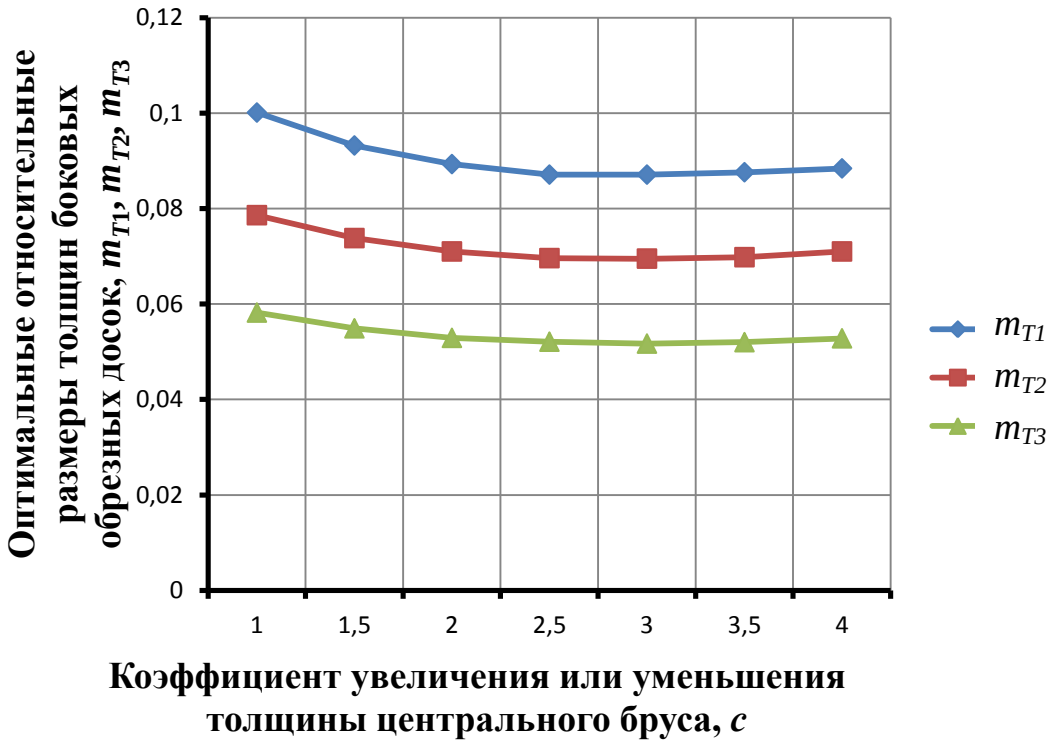


Рис. 1.13. Влияние коэффициента изменения толщины центрального бруса *c* на оптимальные относительные толщины выпиливаемых боковых обрезных досок

С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная ширина боковых обрезных досок вначале уменьшается незначительно (см. рис. 1.14) до *c* = 2,0, а далее практически сохраняется при изменении коэффициента до *c* = 3,5, а затем с увеличением коэффициента *c* немного возрастает. Следовательно, оптимальная относительная ширина боковых обрезных досок при изменении коэффициента в диапазоне *c* = 2,0…3,5 изменяется незначительно.

Полученная закономерность изменения относительной толщины и ширины боковых обрезных досок дает возможность выбирать стан-

дартные размеры боковых досок в различном сочетании толщин центрального и боковых брусьев.

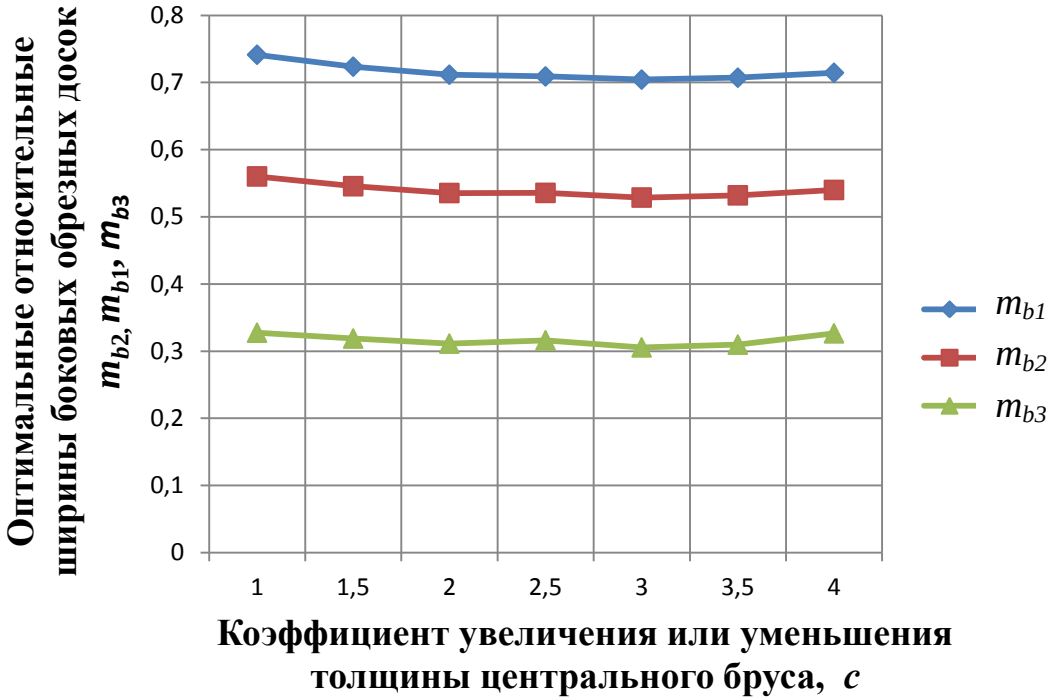


Рис. 1.14. Влияние коэффициента изменения толщины центрального бруса c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок

Расчеты показывают, что с увеличением коэффициента c значение целевой функции возрастает и при c = 3,0 принимает максимальную величину, а затем незначительно уменьшается. Таким образом, получено глобальное максимальное значение целевой функции, которое получается при коэффициенте изменения толщины центрального бруса c = 3,0 [50, 53]. Влияние коэффициента c на изменение суммарной толщины брусьев и досок представлено в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Влияние коэффициента c на оптимальные относительные суммарные толщины брусьев и боковых обрезных досок

c	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
m_H	0,168	0,157	0,144	0,131	0,118	0,108	0,098	0,09
cm_H	0,084	0,157	0,216	0,262	0,295	0,324	0,343	0,360
$\Sigma m_{Нб}$	0,336	0,314	0,288	0,262	0,236	0,216	0,196	0,180
Σm_H	0,42	0,471	0,504	0,524	0,53	0,54	0,54	0,54
Σm_T	0,516	0,474	0,426	0,416	0,417	0,416	0,418	0,420
Σm_E	0,936	0,945	0,93	0,94	0,948	0,956	0,958	0,96

Результаты табл. 1.7 показывают, что толщина центрального бруса с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c возрастает, а толщина боковых брусьев уменьшается. В итоге суммарная толщина всех трех брусьев с увеличением коэффициента c возрастает и принимает максимальное значение равное Σm_H = 0,54 при c = 3,0, а затем эта величина не изменяется [50, 53]. Суммарная толщина боковых обрезных досок с увеличением коэффициента c вначале уменьшается, принимая минимальное значение Σm_T = 0,416 при c = 3,0, а затем немного возрастает. Пифагорическая зона m_E с увеличением коэффициента c вначале возрастает, принимая максимальное значение при коэффициенте c = 3,0, а затем практически мало изменяется.

1.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила

Постановка задачи. Ранее задача оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых обрезных досок решена без учета ширины пропила. С учетом ширины пропила эту задачу можно решить следующим образом (см. рис. 1.15). В данной задаче важно установить, каким образом повлияет ширина пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок [88].

Составление математической модели. Математическую модель задачи оптимизации данной схемы раскроя пиловочника записываем в классическом варианте, в котором предусматривается написание целевой функции и уравнений связи. В качестве критерия оптимальности целевой функции выбираем выход пиломатериалов, получаемых при первом проходе раскроя пиловочника. В данной схеме раскроя пиловочника вначале рассматриваем пифагорическую зону [58]. Согласно теории максимальных поставов, при раскрое пиловочника длина получаемых пиломатериалов из пифагорической зоны равна длине бревна. В связи с этим при составлении математической модели длину можно принять за единицу. Поэтому целевую функцию можно написать в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок по формуле (1.49) [19].

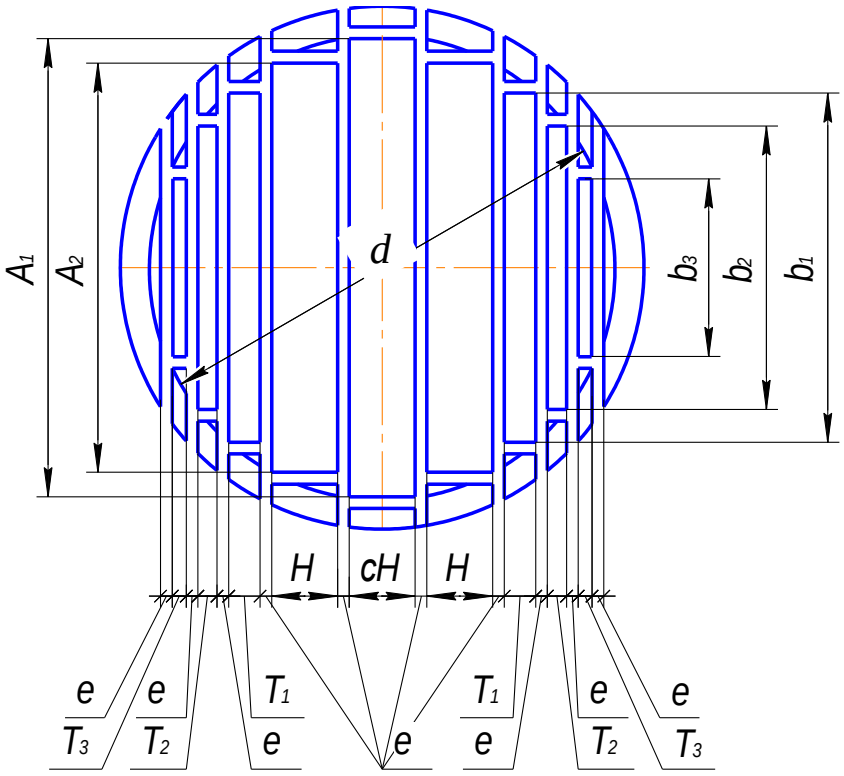


Рис. 1.15. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила

В уравнениях связи устанавливается взаимосвязь размеров пиловочника с размерами получаемых пиломатериалов (брусьев и боковых обрезных досок). Основным размерным показателем пиловочника является диаметр в вершинном торце. Для написания уравнений связи данной задачи оптимизации используется теорема Пифагора. Уравнения связи с учетом ширины пропила будут иметь следующий вид.

Для центрального бруса:

$$d^2 - A_1^2 - c^2H^2 = 0. \tag{1.93}$$

Для боковых брусьев:

$$\begin{gathered} d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0, \\ d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4e^2 - 4cH^2 - 4cHe - 8He = 0. \end{gathered} \tag{1.94}$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0, \\ d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 8cHe - 8HT_1 - 16He - 16T_1e = 0. \end{gathered} \tag{1.95}$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$
\begin{gathered}
d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0, \\
d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - \\
-4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 12cHe - 8HT_1 - \\
-8HT_2 - 24He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e = 0.
\end{gathered} \tag{1.96}
$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$
\begin{gathered}
d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0, \\
d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - \\
-4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16cHe - 8HT_1 - \\
-8HT_2 - 8HT_3 - 32He - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\
-32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e = 0.
\end{gathered} \tag{1.97}
$$

Полагаем, что математическая модель составлена.

При анализе математической модели следует отметить, что переменных факторов (размеров пиловочника, брусьев и досок) много, а уравнений связей недостаточно для непосредственного решения задачи оптимизации. В связи с этим рассматривается возможность получения дополнительных уравнений связи, раскрывающих взаимосвязь размеров пиловочника с размерами брусьев и досок.

Решение математической модели. Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа будет иметь вид [59]:

$$
\begin{gathered}
L = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + \lambda_1(d^2 - A_1^2 - c^2H^2) + \\
\lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4e^2 - 4cH^2 - 4cHe - 8He) + \\
+\lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\
-8cHe - 8HT_1 - 16He - 16T_1e) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - \\
-4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 12cHe - \\
-8HT_1 - 8HT_2 - 24He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e) + \\
+\lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - \\
-4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16cHe - 8HT_1 - \\
-8HT_2 - 8HT_3 - 32He - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\
-32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e),
\end{gathered} \tag{1.98}
$$

Для отыскания оптимальных размеров брусков и боковых обрезных досок находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю [61]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{A}_1} = \mathrm{cH} - 2\lambda_1 \mathrm{A}_1 = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{A}_2} = 2\mathrm{H} - 2\lambda_2 \mathrm{A}_2 = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{H}} = \mathrm{cA}_1 + 2\mathrm{A}_2 - 2\lambda_1 \mathrm{c}^2\mathrm{H} - 2\lambda_2 \mathrm{c}^2\mathrm{H} - 8\lambda_2 \mathrm{H} - 8\lambda_2 \mathrm{cH} - \\
-4\lambda_2 \mathrm{ce} - 8\lambda_2 \mathrm{e} - 2\lambda_3 \mathrm{c}^2\mathrm{H} - 8\lambda_3 \mathrm{H} - 8\lambda_3 \mathrm{cH} - 4\lambda_3 \mathrm{cT}_1 - \\
-8\lambda_3 \mathrm{ce} - 8\lambda_3 \mathrm{T}_1 - 16\lambda_3 \mathrm{e} - 2\lambda_4 \mathrm{c}^2\mathrm{H} - 8\lambda_4 \mathrm{H} - 8\lambda_4 \mathrm{cH} - \\
-4\lambda_4 \mathrm{cT}_1 - 4\lambda_4 \mathrm{cT}_2 - 12\lambda_4 \mathrm{ce} - 8\lambda_4 \mathrm{T}_1 - 8\lambda_4 \mathrm{T}_2 - 24\lambda_4 \mathrm{e} - \\
-2\lambda_5 c^2 H - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 cH - 4\lambda_5 cT_1 - 4\lambda_5 cT_2 - 4\lambda_5 cT_3 - \\
-16\lambda_5 ce - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{b}_1} = 2\mathrm{T}_1 - 2\lambda_3 \mathrm{b}_1 = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{b}_2} = 2\mathrm{T}_2 - 2\lambda_4 \mathrm{b}_2 = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{b}_3} = 2\mathrm{T}_3 - 2\lambda_5 \mathrm{b}_3 = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{T}_1} = 2\mathrm{b}_1 - 8\lambda_3 \mathrm{T}_1 - 4\lambda_3 \mathrm{cH} - 8\lambda_3 \mathrm{H} - 16\lambda_3 \mathrm{e} - 8\lambda_4 \mathrm{T}_1 - \\
-4\lambda_4 \mathrm{cH} - 8\lambda_4 \mathrm{H} - 8\lambda_4 \mathrm{T}_2 - 24\lambda_4 \mathrm{e} - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 \mathrm{cH} - 8\lambda_5 \mathrm{H} - \\
-8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 \mathrm{e} = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{T}_2} = 2\mathrm{b}_2 - 8\lambda_4 \mathrm{T}_2 - 4\lambda_4 \mathrm{cH} - 8\lambda_4 \mathrm{H} - 8\lambda_4 \mathrm{T}_1 - 24\lambda_4 \mathrm{e} - \\
-8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 \mathrm{cH} - 8\lambda_5 \mathrm{H} - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 \mathrm{e} = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{T}_3} = 2\mathrm{b}_3 - 8\lambda_5 \mathrm{T}_3 - 4\lambda_5 \mathrm{cH} - 8\lambda_5 \mathrm{H} - 8\lambda_5 \mathrm{T}_1 - 8\lambda_5 T_2 - 32\lambda_5 \mathrm{e} = 0.
\end{cases}
\tag{1.99}
$$

Решаем полученную систему уравнений (1.99) совместно с уравнениями связи. Рассматриваем четвертое уравнение системы (1.99), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$
T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{1.100}
$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (1.99), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_2:

$$
T_2 = \lambda_2 b_2, \qquad \lambda_2 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{1.101}
$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (1.99), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{1.102}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (1.99), которое записываем в следующем виде:

$$b_3 = 4\lambda_5 T_3 + 2\lambda_5 cH + 4\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_2 + 16\lambda_5 e. \tag{1.103}$$

В последнее равенство (1.103) подставим выражение (1.102), получим:

$$\begin{gathered} b_3^2 = 4T_3^2 + 2cHT_3 + 4HT_3 + 4T_1T_3 + 4T_2T_3 + 16T_3e = \\ = 2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e). \end{gathered} \tag{1.104}$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (1.99), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_2 + 2\lambda_4 cH + 4\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1 + 12\lambda_4 e + b_3. \tag{1.105}$$

В последнее равенство (1.105) подставляем выражение (1.101), получим:

$$b_2^2 = 4T_2^2 + 2cHT_2 + 4HT_2 + 4T_1T_2 + 12T_2e + b_2b_3. \tag{1.106}$$

Из последнего равенства можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e). \tag{1.107}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (1.99), которое представляем в следующем виде:

$$b_1 = 4\lambda_3 T_1 + 2\lambda_3 cH + 4\lambda_3 H + 8\lambda_3 e + b_2. \tag{1.108}$$

В последнее равенство (1.108) подставляем выражение (1.100), получим:

$$b_1^2 = 4T_1^2 + 2cHT_1 + 4HT_1 + 8T_1e + b_1b_2. \tag{1.109}$$

Из последнего равенства можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(cH + 2H + 2T_1 + 4e). \tag{1.110}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (1.99), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$cH = 2\lambda_1 A_1, \qquad \lambda_1 = \frac{cH}{2A_1}. \tag{1.111}$$

Рассматриваем второе уравнение системы (1.99), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$H = \lambda_2 A_2, \qquad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \tag{1.112}$$

Рассматриваем третье уравнение системы (1.99), которое записываем в следующем виде:

$$\begin{gathered} cA_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 c^2 H + 2\lambda_2 c^2 H + 8\lambda_2 H + \\ +8\lambda_2 cH + 4\lambda_2 ce + 8\lambda_2 e + (c+2)b_1. \end{gathered} \tag{1.113}$$

В последнее равенство (1.113) подставляем выражения (1.111) и (1.112), получим:

$$cA_1 + 2A_2 = \frac{c^3 H^2}{A_1} + \frac{2c^2 H^2 + 8H^2 + 8cH^2 + 4cHe + 8He}{A_2} + (c+2)b_1. \tag{1.114}$$

Последнее равенство можно представить в следующем виде:

$$\frac{c(A_1^2 - c^2 H^2)}{A_1} + 2\frac{(A_2^2 - (cH + 2H)^2 - 2e(c+2)H)}{A_2} = (c+2)b_1. \tag{1.115}$$

В последнее равенство (1.115) подставим выражения для A_1^2 и A_2^2, получим:

$$\begin{gathered} b_1 = 2\left(\frac{d^2 - (cH + 2H + 2e)^2 - H^2(c+2)^2 - 2He(c+2)}{A_2(c+2)}\right) + \\ + \frac{c(d^2 - 2c^2 H^2)}{A_1(c+2)}. \end{gathered} \tag{1.116}$$

Зная ширину первой пары боковых обрезных досок, толщину ее можно определить из уравнения связи (1.95) по следующей формуле:

$$T_1 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H + 4e)\right). \tag{1.117}$$

Толщину второй пары боковых обрезных досок можно определить из уравнения связи (1.96) по следующей формуле:

$$T_2 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 6e)\right). \quad (1.118)$$

Толщину третьей пары боковых обрезных досок можно определить из уравнения связи (1.97) по следующей формуле:

$$T_3 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 8e)\right). \quad (1.119)$$

Алгоритм решения задачи. Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (1.99) и уравнения связи [72]. Получены формулы для определения размеров брусьев и обрезных досок с учетом ширины пропила. Однако по этим формулам непосредственно определить оптимальные размеры брусьев и обрезных досок не представляется возможным [97]. Поэтому для решения задачи воспользуемся численным методом. Задаемся шириной пропила и величиной коэффициента c, а толщину бокового бруса варьируем в определенных пределах и определяем размеры брусьев и обрезных досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим максимальное значение целевой функции [19]. Это и будет искомый оптимальный результат, при котором целевая функция принимает экстремальное значение. Для удобства расчета и анализа результатов алгоритм решения задачи представляем в относительных единицах, полагая $m_e = e/d, m_H = H/d$ [73].

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (1.120)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (1.121)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c + 2)} + 2\frac{(1 - 2((cm_H + 2m_H)^2 + 3m_H m_e(c + 2) + 2m_e^2))}{m_{A_2}(c + 2)}. \quad (1.122)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H + 4m_e)\right). \quad (1.123)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 4m_e\right). \quad (1.124)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 6m_e)\right). \quad (1.125)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 6m_e\right). \quad (1.126)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e)\right). \quad (1.127)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}. \quad (1.128)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{b_1} m_{T_1} + 2m_{b_2} m_{T_2} + 2m_{b_3} m_{T_3}. \quad (1.129)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (1.130)$$

Выполнение расчетов. Расчеты производятся в следующей последовательности. Задаемся относительной шириной пропила, а затем величиной коэффициента *c* [73]. Далее, изменяя относительную толщину бокового бруса m_H, определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. Анализируя результаты расчета, находим вариант, при котором целевая функция принимает максимальное значение. Это и будет искомым (оптимальным) результатом [19].

Результаты расчетов заносятся в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев и на размеры боковых обрезных досок, а также на величину целевой функции

m_e	c	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}
0	0,6	0,166	0,995027557	0,902065097	0,762369306	0,107771106
0	1	0,157	0,987598603	0,88213321	0,741313883	0,100079248
0	1,5	0,144	0,976393363	0,863703653	0,723462735	0,093181717
0	2	0,131	0,965067873	0,851718263	0,711639278	0,089272521
0	2,5	0,118	0,955497253	0,847371819	0,708954633	0,087127044
0	**3**	**0,107**	**0,947079194**	**0,844852058**	**0,70539426**	**0,086907582**
0	3,5	0,1	0,9367497	0,835164654	0,684881012	0,089327462
0	4	0,087	0,937494533	0,852945485	0,716705153	0,087688157
0,005	0,6	0,173	0,99459819	0,8880225	0,734861507	0,104208598
0,005	1	0,161	0,986954406	0,87002931	0,721490306	0,094712268
0,005	1,5	0,15	0,974358763	0,844852058	0,691664368	0,088609541
0,005	2	0,136	0,962297251	0,832516666	0,681229833	0,084034805
0,005	2,5	0,124	0,950736557	0,823028554	0,669682178	0,082323909
0,005	**3**	**0,112**	**0,941861986**	**0,821644692**	**0,669186854**	**0,081547088**
0,005	3,5	0,101	0,935434525	0,824748295	0,674119991	0,081560925
0,005	4	0,092	0,92982579	0,827137232	0,675705329	0,082585916
0,01	0,6	0,179	0,994215892	0,874292194	0,708720298	0,100044787
0,01	1	0,17	0,985444062	0,847997642	0,679555788	0,091811918
0,01	1,5	0,156	0,972236597	0,82440524	0,656988313	0,08395038
0,01	2	0,142	0,95882428	0,808860927	0,64235169	0,079205006
0,01	2,5	0,129	0,946569464	0,799624756	0,632918802	0,07685909
0,01	**3**	**0,117**	**0,936375459**	**0,796225471**	**0,629448467**	**0,076021115**
0,01	3,5	0,107	0,927226914	0,793553873	0,623661088	0,076597428
0,01	4	0,097	0,921659373	0,798496086	0,630310678	0,077171498
0,015	0,6	0,187	0,993685644	0,856468073	0,67289768	0,096767785
0,015	1	0,177	0,984210851	0,827815801	0,642264699	0,087741457
0,015	1,5	0,163	0,969649292	0,799624756	0,613482533	0,079604144
0,015	2	0,149	0,95456587	0,779823057	0,592924847	0,0746289
0,015	2,5	0,136	0,940425436	0,766704637	0,577809383	0,072085872
0,015	3	0,124	0,928232729	0,759934208	0,569130035	0,071123766
0,015	**3,5**	**0,113**	**0,918465977**	**0,758648634**	**0,566830365**	**0,071167266**
0,015	4	0,103	0,911183845	0,761640335	0,569993235	0,071824693
0,02	0,6	0,195	0,993131915	0,837132606	0,633752462	0,093267959
0,02	1	0,185	0,982738521	0,803725699	0,596290307	0,083884438
0,02	1,5	0,173	0,965743108	0,76376027	0,54613585	0,076098312
0,02	2	0,158	0,94875919	0,740551146	0,522350419	0,070365465
0,02	2,5	0,142	0,934866301	0,73413827	0,523566029	0,066492551
0,02	3	0,128	0,923333093	0,733212111	0,528009772	0,064619147
0,02	**3,5**	**0,117**	**0,912310117**	**0,729950512**	**0,522741973**	**0,064495478**
0,02	4	0,107	0,903778734	0,731352172	0,523323916	0,065066919

Окончание табл. 1.7

m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$Z_{бр}$	$Z_д$	Z
0,579404	0,083948	0,3432258	0,0621065	0,3985903	0,304236	0,702826
0,560097	0,078634	0,3274864	0,0582146	0,4320428	0,274594	0,706637
0,545625	0,073832	0,3188253	0,0548922	0,4596476	0,250399	0,710046
0,535375	0,071034	0,3112468	0,0528576	0,4759979	0,236023	0,712021
0,535610	0,069605	0,3161236	0,0521262	0,4818514	0,231057	0,712909
0,530736	**0,069360**	**0,3092099**	**0,0517283**	**0,4848107**	**0,228222**	**0,713033**
0,494807	0,070173	0,2483225	0,0498373	0,4948953	0,216553	0,711449
0,546058	0,070185	0,3307059	0,0529934	0,4746606	0,237394	0,712054
0,542509	0,075916	0,3074041	0,0507646	0,4104950	0,266738	0,677233
0,539696	0,069717	0,3221959	0,0474067	0,4390490	0,242469	0,681518
0,506616	0,064976	0,2854605	0,0431094	0,4726863	0,213024	0,685710
0,500617	0,061799	0,2868893	0,0411474	0,4881893	0,199979	0,688168
0,487095	0,060350	0,2706809	0,0396600	0,4988394	0,190525	0,689364
0,488079	**0,059852**	**0,2740205**	**0,0394624**	**0,5005140**	**0,189193**	**0,689707**
0,495390	0,060024	0,2848837	0,0399457	0,4972752	0,192194	0,689469
0,495508	0,060715	0,2826449	0,0403107	0,4943691	0,194564	0,688934
0,509542	0,067477	0,2816483	0,0395362	0,4197753	0,232843	0,652619
0,481322	0,061459	0,2574705	0,0348711	0,4558446	0,201903	0,657748
0,464320	0,055883	0,2511316	0,0311428	0,4847177	0,177846	0,662564
0,453347	0,052461	0,2470555	0,0288337	0,5020225	0,163568	0,665591
0,444882	0,050685	0,2408151	0,0274911	0,5115718	0,155629	0,667201
0,441755	**0,050046**	**0,2384811**	**0,0270057**	**0,5149845**	**0,152800**	**0,667784**
0,431647	0,050173	0,2219437	0,0265084	0,5170670	0,150623	0,667690
0,440209	0,050776	0,2330725	0,0272820	0,5125120	0,154705	0,667217
0,460138	0,059055	0,2322397	0,0274057	0,4318105	0,197306	0,629117
0,432842	0,052493	0,2141889	0,0226612	0,4672521	0,167856	0,635108
0,408540	0,046515	0,2006944	0,0184569	0,4977569	0,143087	0,640844
0,390216	0,042732	0,1885586	0,0156693	0,5168479	0,127757	0,644605
0,374162	0,040595	0,1729300	0,0137855	0,5282883	0,118450	0,646738
0,363618	0,039650	0,1604606	0,0127471	0,5337662	0,113883	0,647649
0,359960	**0,039566**	**0,1548588**	**0,0124845**	**0,5347078**	**0,113030**	**0,647738**
0,362921	0,040085	0,1570803	0,0128830	0,5323056	0,115022	0,647327
0,406073	0,050152	0,1803445	0,0148814	0,4426781	0,164316	0,606994
0,370427	0,043046	0,1545479	0,0095620	0,4791851	0,134885	0,614070
0,312687	0,036079	0,0934871	0,0028821	0,5148713	0,106222	0,621093
0,292608	0,031750	0,0850894	0,0007054	0,5338220	0,092103	0,625925
0,307162	0,029835	0,1222866	0,0004189	0,5403728	0,088057	0,628430
0,320145	0,029064	0,1481293	0,0007998	0,5422622	0,087086	0,629348
0,312382	**0,028732**	**0,137630**	**0,0002636**	**0,5443994**	**0,085452**	**0,629852**
0,311425	0,029068	0,1340298	0,00035338	0,5433266	0,086302	0,629628

Анализ результатов расчетов. При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 с увеличением оптимальной относительной ширины пропила m_e оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 1.16). При этом целевая функция все же уменьшается с увеличением относительной ширины пропила [79].

Следовательно, увеличение оптимальной относительной площади поперечного сечения брусьев с увеличением относительной ширины пропила происходит в меньшей степени, чем уменьшение оптимальной относительной площади поперечного сечения боковых обрезных досок.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 1.17).

При коэффициенте c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 1.18). При этом оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски уменьшается более интенсивно.

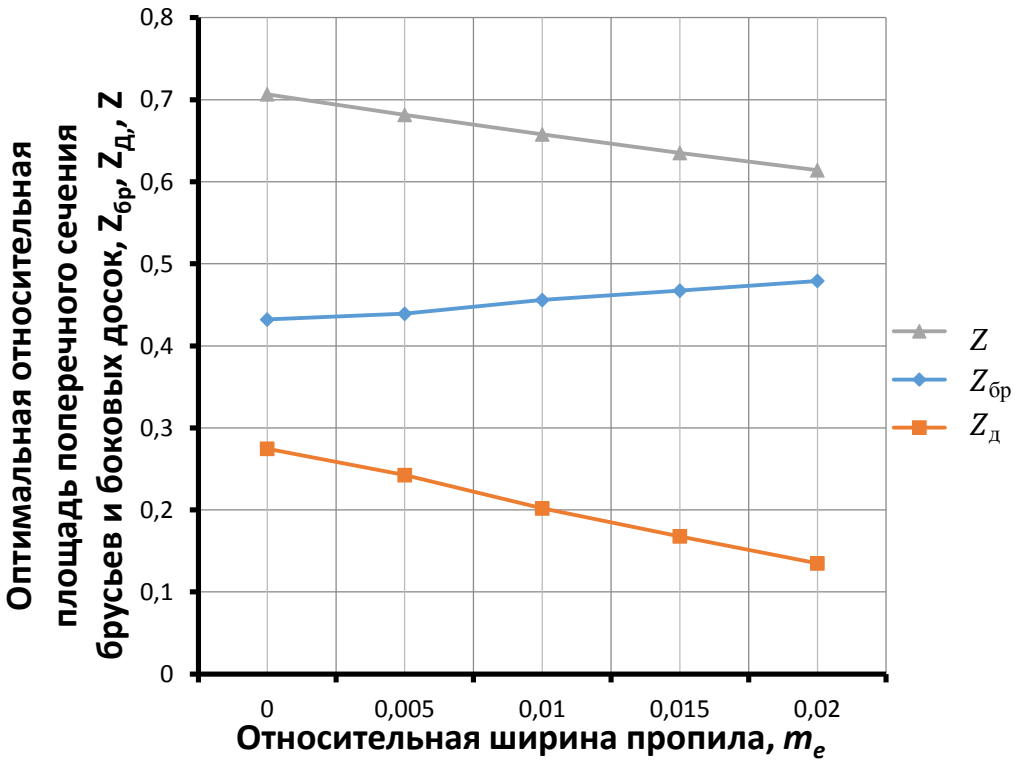


Рис. 1.16. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

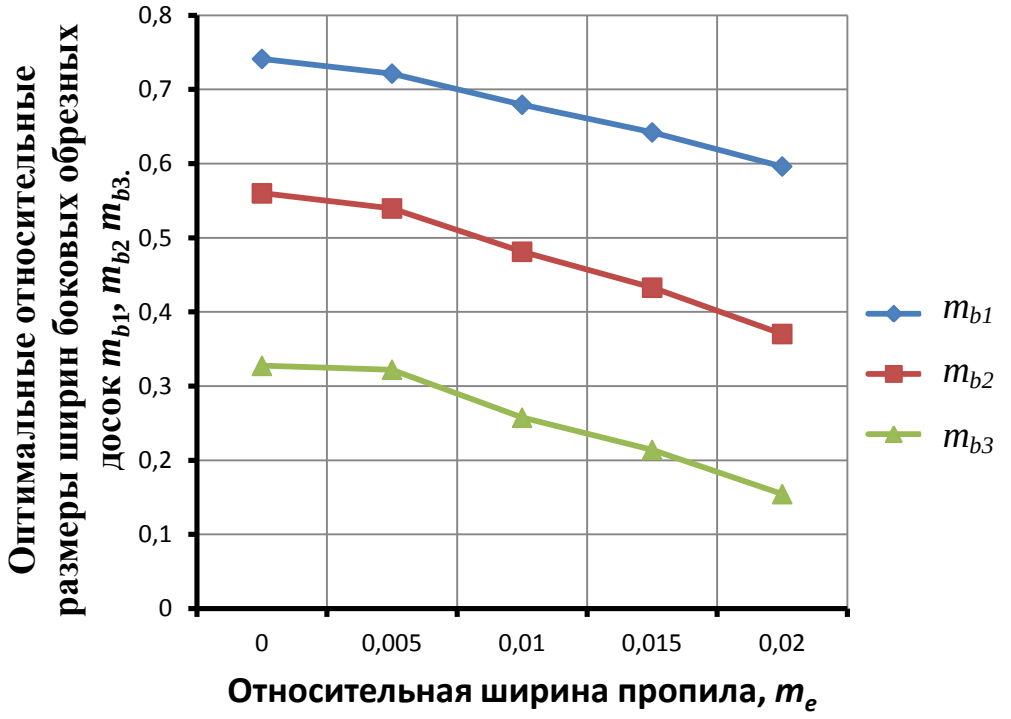


Рис. 1.17. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок
при коэффициенте c = 2,0

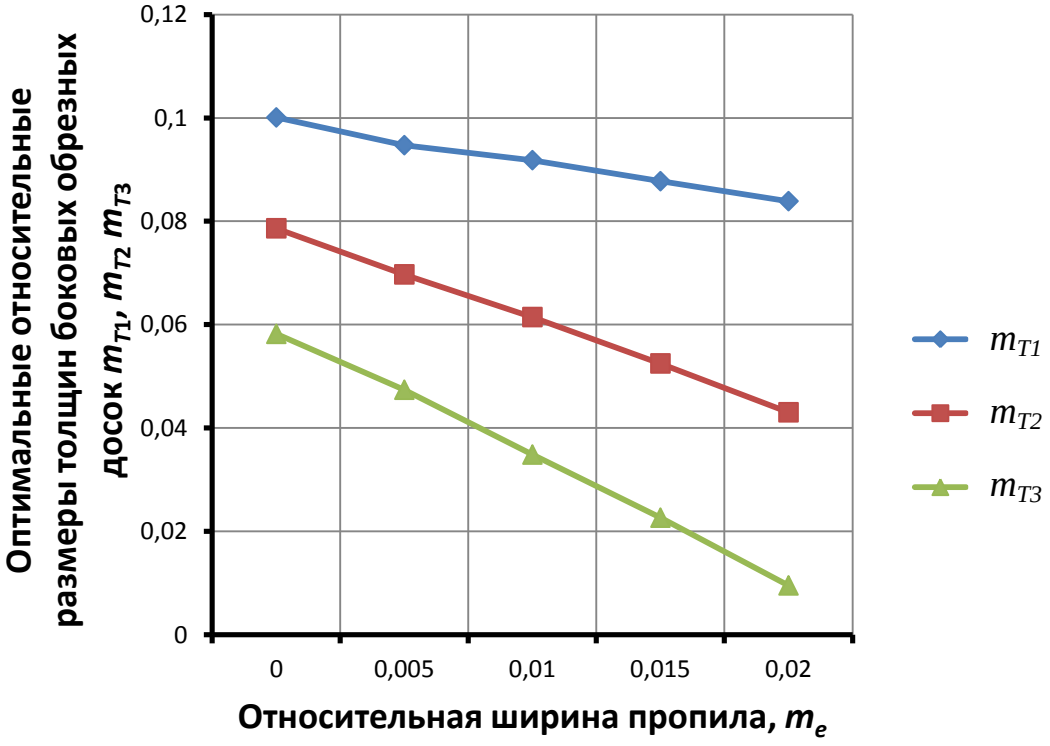


Рис. 1.18. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок
при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (см. рис. 1.19) [97]. Сумма толщин брусьев с увеличением относительной ширины пропила возрастает. При этом оптимальные относительные ширины пластей центрального и особенно боковых брусьев уменьшаются.

С практической точки зрения при изменении относительной ширины пропила в пределах m_e = 0,005…0,010 оптимальная относительная толщина бруса изменяется в пределах $m_н$ = 0,17…0,18. В этом случае при распиловке пиловочника диаметром 60 см толщина бруса будет изменяться в пределах H = 102…108 мм. Такое изменение толщины бруса является не столь значимым. В результате при расчете поставов фактически необходимо выпиливать толщину бруса стандартных размеров равной 100 мм.

При коэффициенте c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 1.20). Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок уменьшается [81]. Такая закономерность объясняется тем, что потери древесины в опилки при выпиливании боковых обрезных досок превышают прирост объема за счет увеличения размеров брусьев.

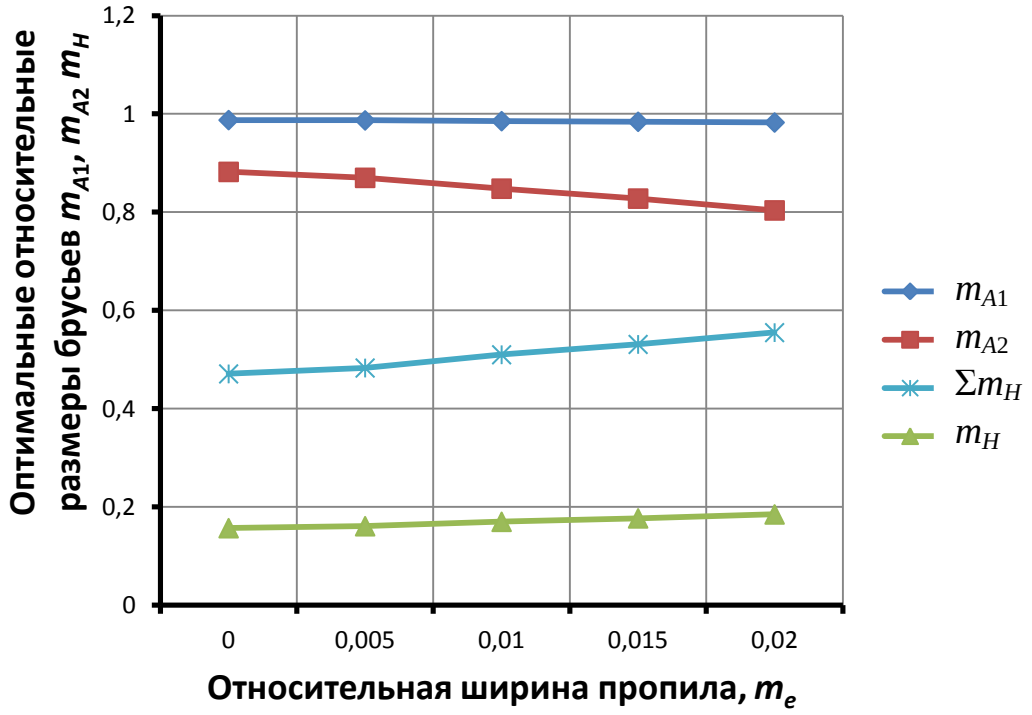


Рис. 1.19. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев при коэффициенте c = 2,0

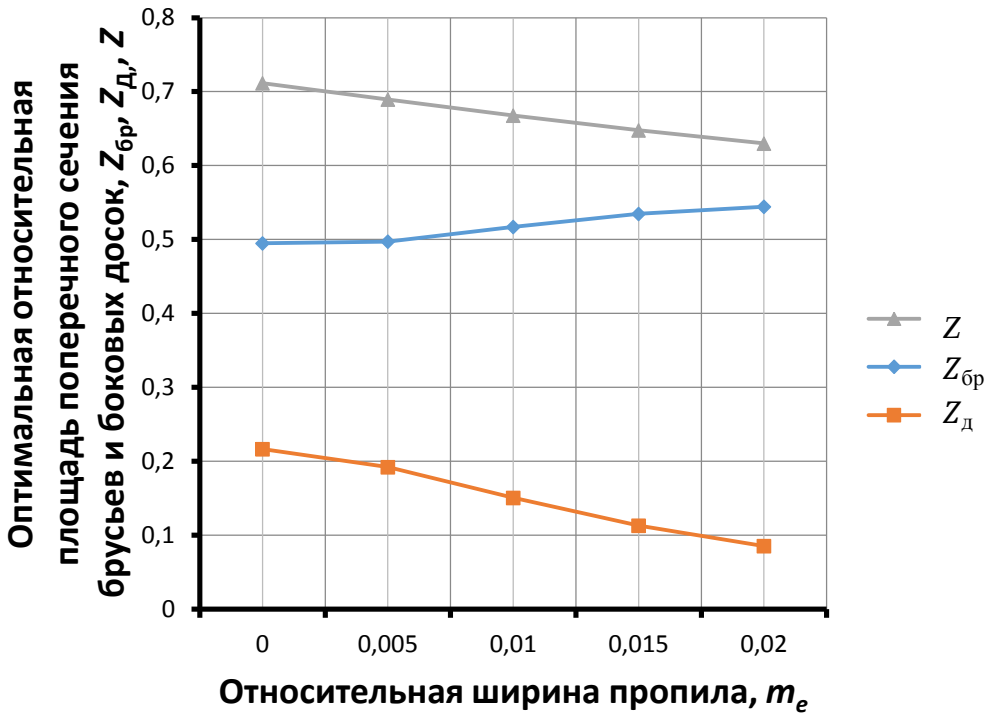


Рис. 1.20. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

Сравнивая между собой рис. 1.16 и 1.20, следует отметить, что на рис. 1.20 оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев больше, чем на рис. 1.16. При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых досок, наоборот, меньше, чем на рис. 1.16. Общие закономерности изменения этих площадей поперечного сечения с изменением относительной ширины пропила сохраняются.

При коэффициенте c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (рис. 1.21) [36]. Относительная ширина крайней боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила уменьшается в большей степени, чем другие боковые доски.

Сравнивая между собой рис. 1.17 и 1.21, следует отметить, что при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 (см. рис. 1.17) оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок по величине несколько больше, чем при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 (см. рис. 1.21). Это объясняется тем, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 сумма толщин всех трех брусьев меньше чем сумма толщин всех трех брусьев при коэффициенте изменения толщин c =3,0.

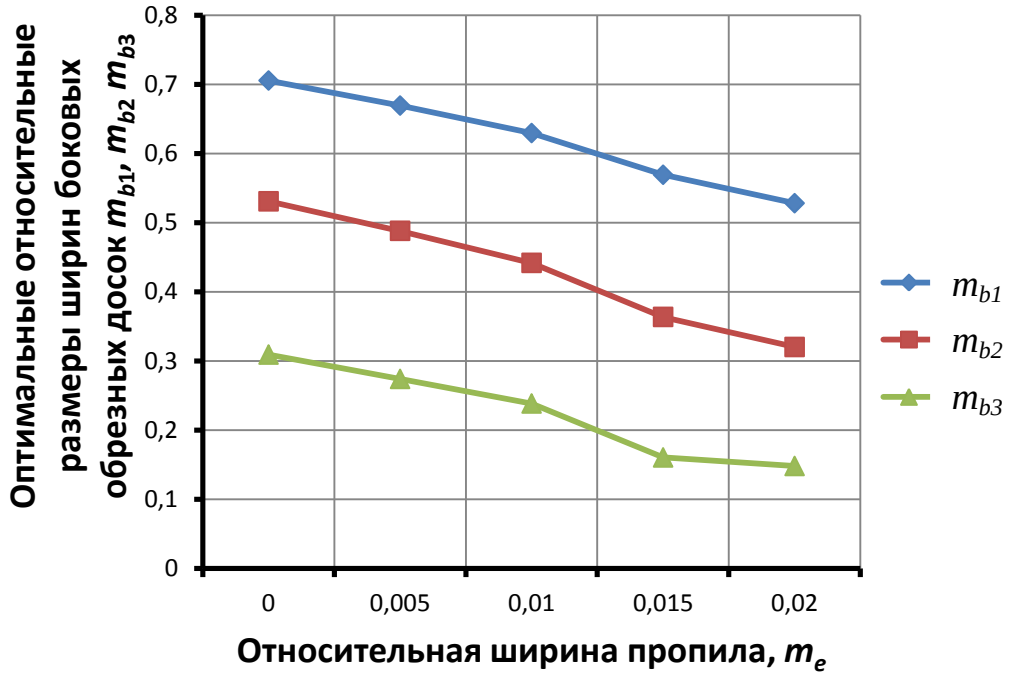


Рис. 1.21. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 1.22). При этом относительная толщина крайней обрезной боковой доски при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}02$ стремится к нулю.

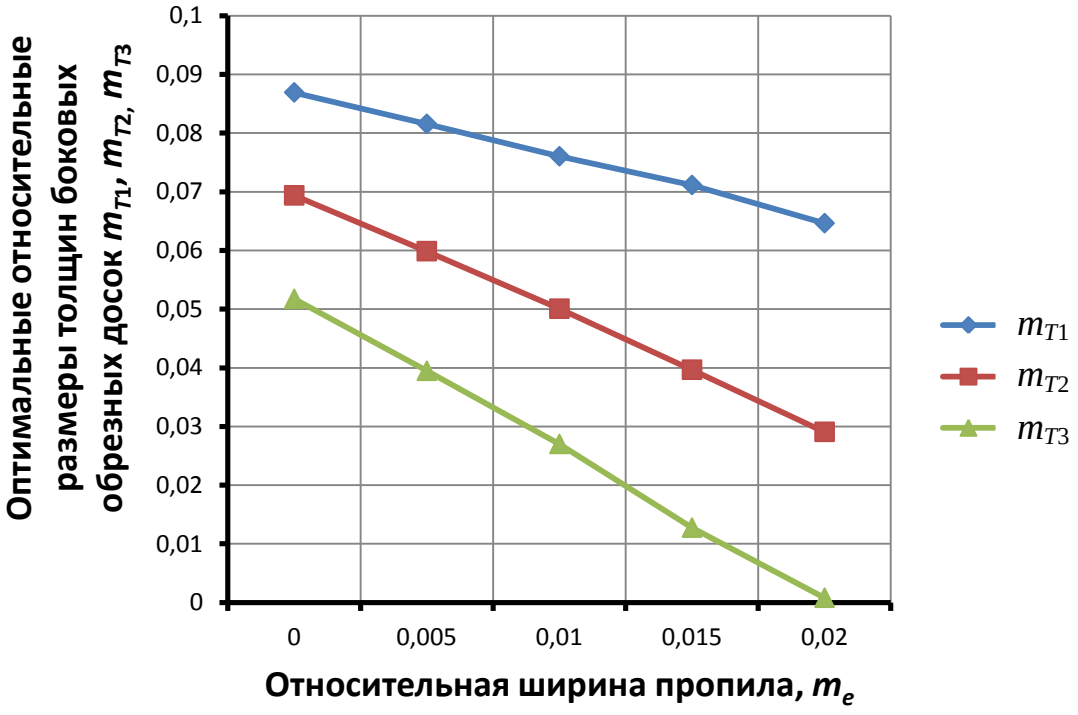


Рис. 1.22. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (см. рис. 1.23) и оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает. При этом относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев уменьшаются. Оптимальная относительная толщина всех трех брусьев с увеличением относительной ширины пропила возрастает [31].

Следовательно, при раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых обрезных досок оказалось, что ширина пропила снижает выход пиломатериалов за счет уменьшения размеров боковых обрезных досок, но при этом происходит небольшая компенсация повышения выхода пиломатериалов за счет увеличения размеров брусьев.

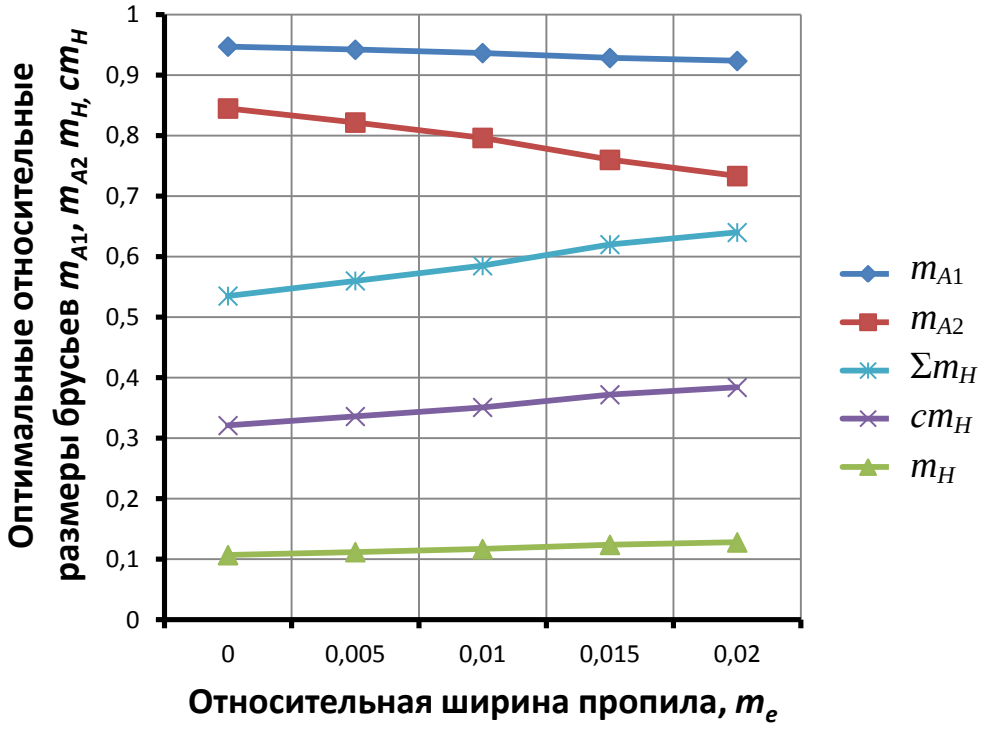


Рис. 1.23. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев при коэффициенте c = 3,0

Такой результат был получен за счет использования метода последовательной оптимизации [32, 108, 113].

Таким образом, ширина пропила оказывает существенное влияние на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок. Исследованиями установлена главная закономерность: с увеличением ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относитель-

ная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается [31]. Этот важный аспект необходимо учитывать при расчете и составлении поставов.

1.5. Влияние последующего раскроя брусьев на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок

Постановка задачи. Рассмотрим схему раскроя пиловочника с выпиливанием брусьев разной толщины и с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски (см. рис. 1.24).

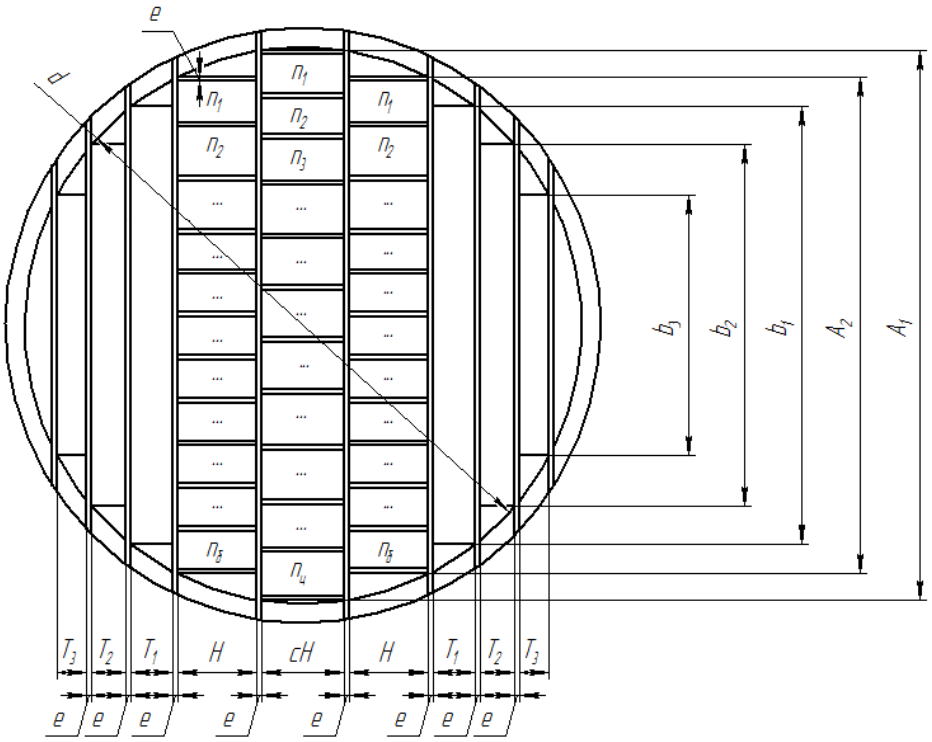


Рис. 1.24. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых досок с учетом ширины пропила и раскроя брусьев на доски

Составление математической модели. При раскрое брусьев возникают потери древесины в опилки и объем пиломатериалов снижается [85]. С учетом этих потерь площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса, можно определить по формуле [91]:

$$Z_{\text{ц}} = \text{c}HA_1 - cH\left(n_{\text{ц}} + 1\right)e. \qquad (1.131)$$

Площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев, определится по формуле:

$$Z_{б} = 2HA_2 - 2H(n_{б} + 1)e. \quad (1.132)$$

Суммарная площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев с учетом ширины пропила, определится по формуле:

$$Z_{бр} = Z_{ц} + Z_{б} = cH\left(A_1 - \left(n_{ц} + 1\right)e\right) + 2H(A_2 - (n_{б} + 1)e). \quad (1.133)$$

Без учета ширины пропила при раскрое брусьев на обрезные доски суммарная площадь поперечных сечений брусьев определится по формуле:

$$Z_{бр} = cHA_1 + 2HA_2. \quad (1.133')$$

Площадь поперечного сечения полученных опилок при раскрое брусьев на обрезные доски определится по формуле:

$$Z_{о} = cH\left(n_{ц} + 1\right)e + 2H(n_{б} + 1)e. \quad (1.134)$$

В относительных единицах площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев, определится по формуле:

$$Z_{бр} = cm_H\left(m_{A_1} - \left(n_{ц} + 1\right)m_e\right) + 2m_H(m_{A_2} - (n_{б} + 1)m_e). \quad (1.135)$$

Поэтому при определении оптимальных размеров брусьев и досок с учетом ширины пропила необходимо в алгоритме решения задачи вместо формулы (1.133′) использовать формулу (1.135). При этом число досок, выпиливаемых из центрального бруса, можно определить по формуле [91]:

$$n_{ц} = \frac{A_1}{T_{ц} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{ц}} + m_e}. \quad (1.136)$$

Число досок, получаемых из бокового бруса, можно по определить по формуле:

$$n_{б} = \frac{A_2}{T_{б} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{б}} + m_e}. \quad (1.137)$$

При расчете количества досок, получаемых из брусьев, принимается целое число.

На практике возможен вариант, когда необходимые толщины обрезных досок известны. Тогда по формулам (1.136) и (1.137) определяем количество выпиливаемых досок такого размера из центрального и бокового брусьев. Затем относительная площадь поперечного сечения этих досок, получаемых из брусьев, определяется по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{T_{\text{ц}}} n_{\text{ц}} + 2m_H m_{T_{\text{б}}} n_{\text{б}}. \quad (1.138)$$

Размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также площади их поперечных сечений определяются по алгоритму, представленному ранее формулами 1.120…1.130.

Выполнение расчетов. Далее по алгоритму решения задачи определяем оптимальные размеры брусьев и досок.

Расчеты производятся в следующей последовательности. Задаемся относительной шириной пропила, а также значением величины коэффициента c и изменяем относительную толщину бокового бруса m_H, а затем определяем относительные ширины этих брусьев m_{A_1} и m_{A_2}. Далее по формулам (1.136) и (1.137) определяем число выпиливаемых досок из этих брусьев с учетом ширины пропила e. Затем определяем все размеры брусьев и досок, а также площади поперечных сечений брусьев и досок. Анализируем результаты расчетов для различных вариантов относительных толщин брусьев m_H и находим наилучший (оптимальный) вариант [96].

Для упрощения расчетов в данной исследовательской работе можно задаваться числом выпиливаемых досок из брусьев. Затем определяется число пропилов. Зная эти величины, можно определить все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. Результаты расчетов представлены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Оптимальные относительные размеры и площади поперечных сечений боковых обрезных досок и пиломатериалов, получаемых из центрального и боковых брусьев, при относительной ширине пропила равной $m_e = 0{,}01$

m_e	$n_{\text{ц}}$	$n_{\text{б}}$	c	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0,01	8	6	1	0,17	0,9854441	0,8479976	0,6795558	0,0918119	0,4813221
0,01	8	6	1,5	0,156	0,9722366	0,8244052	0,6569883	0,0839504	0,4643205
0,01	8	6	2	0,142	0,9588243	0,8088609	0,6423517	0,0792050	0,4533477
0,01	8	6	2,5	0,129	0,9465695	0,7996248	0,6329188	0,0768591	0,4448830
0,01	8	6	3	0,117	0,9363755	0,7962255	0,6294485	0,0760211	0,4417552
0,01	8	6	3,5	0,107	0,9272269	0,7935539	0,6236611	0,0765974	0,4316471
0,01	8	6	4	0,097	0,9216594	0,7984961	0,6303107	0,0771715	0,4402090
0,01	12	10	1	0,17	0,9854441	0,8479976	0,6795558	0,0918119	0,4813221
0,01	12	10	1,5	0,156	0,9722366	0,8244052	0,6569883	0,0839504	0,4643205
0,01	12	10	2	0,142	0,9588243	0,8088609	0,6423517	0,0792050	0,4533477
0,01	12	10	2,5	0,129	0,9465695	0,7996248	0,6329188	0,0768591	0,4448830
0,01	12	10	3	0,117	0,9363755	0,7962255	0,6294485	0,0760211	0,4417552
0,01	12	10	3,5	0,107	0,9272269	0,7935539	0,6236611	0,0765974	0,4316471
0,01	12	10	4	0,097	0,9216594	0,7984961	0,6303107	0,0771715	0,4402090
0,01	16	14	1	0,17	0,9854441	0,8479976	0,6795558	0,0918119	0,4813221

Продолжение табл. 1.10

m_e	$n_ц$	$n_б$	c	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0,01	16	14	1,5	0,156	0,9722366	0,8244052	0,6569883	0,0839504	0,4643205
0,01	16	14	2	0,142	0,9588243	0,8088609	0,6423517	0,0792050	0,4533477
0,01	16	14	2,5	0,129	0,9465695	0,7996248	0,6329188	0,0768591	0,4448830
0,01	16	14	3	0,117	0,9363755	0,7962255	0,6294485	0,0760211	0,4417552
0,01	16	14	3,5	0,107	0,9272269	0,7935539	0,6236611	0,0765974	0,4316471
0,01	16	14	4	0,097	0,9216594	0,7984961	0,6303107	0,0771715	0,4402090
0,01	20	18	1	0,165	0,9862936	0,8571902	0,7004590	0,0893463	0,5183905
0,01	20	18	1,5	0,151	0,9740112	0,8361506	0,6817773	0,0815299	0,5068110
0,01	20	18	2	0,137	0,9617297	0,8230286	0,6709090	0,0767699	0,5012052
0,01	20	18	2,5	0,124	0,9507366	0,8160368	0,6651341	0,0743620	0,4981667
0,01	20	18	3	0,113	0,9407864	0,8110333	0,6581515	0,0739428	0,4889794
0,01	20	18	3,5	0,102	0,9341044	0,8139036	0,6629584	0,0738281	0,4962153
0,01	20	18	4	0,093	0,9282327	0,8160368	0,6642598	0,0747509	0,4960230

Окончание табл. 1.10

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	$Z_ц$	$Z_б$	$Z_{бр}$	$Z_д$	Z
0,061460	0,257470	0,034871	0,147125	0,281519	0,428644	0,201903	0,630548
0,055883	0,251131	0,031142	0,199423	0,253314	0,452737	0,177846	0,630584
0,052461	0,247055	0,028833	0,238226	0,228296	0,466522	0,163569	0,630091
0,050685	0,240811	0,027491	0,266568	0,206948	0,473516	0,155629	0,629146
0,050046	0,238481	0,027005	0,286547	0,188656	0,475204	0,152800	0,628004
0,050173	0,221943	0,026508	0,302306	0,173565	0,475872	0,150623	0,626495
0,050776	0,233072	0,027282	0,311043	0,159758	0,470802	0,154705	0,625507
0,061460	0,257470	0,034871	0,140325	0,274719	0,415044	0,201903	0,616948
0,055883	0,251131	0,031142	0,190063	0,247074	0,437137	0,177846	0,614984
0,052461	0,247055	0,028833	0,226866	0,222616	0,449482	0,163569	0,613051
0,050685	0,240815	0,027491	0,253668	0,201788	0,455456	0,155629	0,611086
0,050046	0,238481	0,027005	0,272507	0,183976	0,456484	0,152800	0,609284
0,050173	0,221943	0,026508	0,287326	0,169285	0,456612	0,150623	0,607235
0,050776	0,233072	0,027282	0,295523	0,155878	0,451402	0,154705	0,606107
0,061460	0,257470	0,034871	0,133525	0,267919	0,401444	0,201903	0,603348
0,055883	0,251131	0,031142	0,180703	0,240834	0,421537	0,177846	0,599384
0,052461	0,247055	0,028833	0,215506	0,216936	0,432442	0,163569	0,596011
0,050685	0,240815	0,027491	0,240768	0,196628	0,437396	0,155629	0,593026
0,050046	0,238481	0,027005	0,258467	0,179296	0,437764	0,152800	0,590564
0,050173	0,221943	0,026508	0,272346	0,165005	0,437352	0,150623	0,587975
0,050776	0,233072	0,027282	0,280003	0,151998	0,432002	0,154705	0,586707
0,060725	0,318042	0,036466	0,123138	0,256472	0,379611	0,211321	0,590932
0,055248	0,318861	0,032872	0,166253	0,230622	0,396876	0,188135	0,585011
0,051894	0,322014	0,030703	0,197753	0,207699	0,405453	0,174804	0,580258
0,050178	0,323490	0,029575	0,220328	0,188117	0,408445	0,168050	0,576496
0,049704	0,311641	0,028952	0,237566	0,171993	0,409560	0,163985	0,573546
0,049771	0,322050	0,029261	0,247795	0,157366	0,405161	0,166132	0,571293
0,050403	0,3195552	0,0296292	0,2560226	0,1452728	0,4012954	0,1682472	0,5695426

Анализ результатов. С увеличением коэффициента c, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и количестве получаемых досок из бокового бруса $n_б$ = 6 и из центрального бруса $n_ц$ = 8, оптимальные относительные площади поперечных сечений получаемых досок из центрального бруса увеличиваются, а из боковых брусьев уменьшаются. При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок сначала уменьшается с замедлением и потом немного увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений выпиливаемых брусьев достигает максимального значения при c = 3,0, а затем немного уменьшается (рис. 1.25).

Расчеты показывают, что увеличение количества выпиливаемых досок из брусьев оказывает влияние на оптимальное значение коэффициента c. Оказывается, что с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев коэффициент c уменьшается.

С увеличением коэффициента c, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и количестве получаемых досок из бокового бруса $n_б$ = 10 и из центрального бруса $n_ц$ = 12 штук, оптимальные относительные площади поперечных сечений получаемых пиломатериалов из центрального бруса увеличиваются, а из боковых брусьев – уменьшаются (см. рис. 1.26).

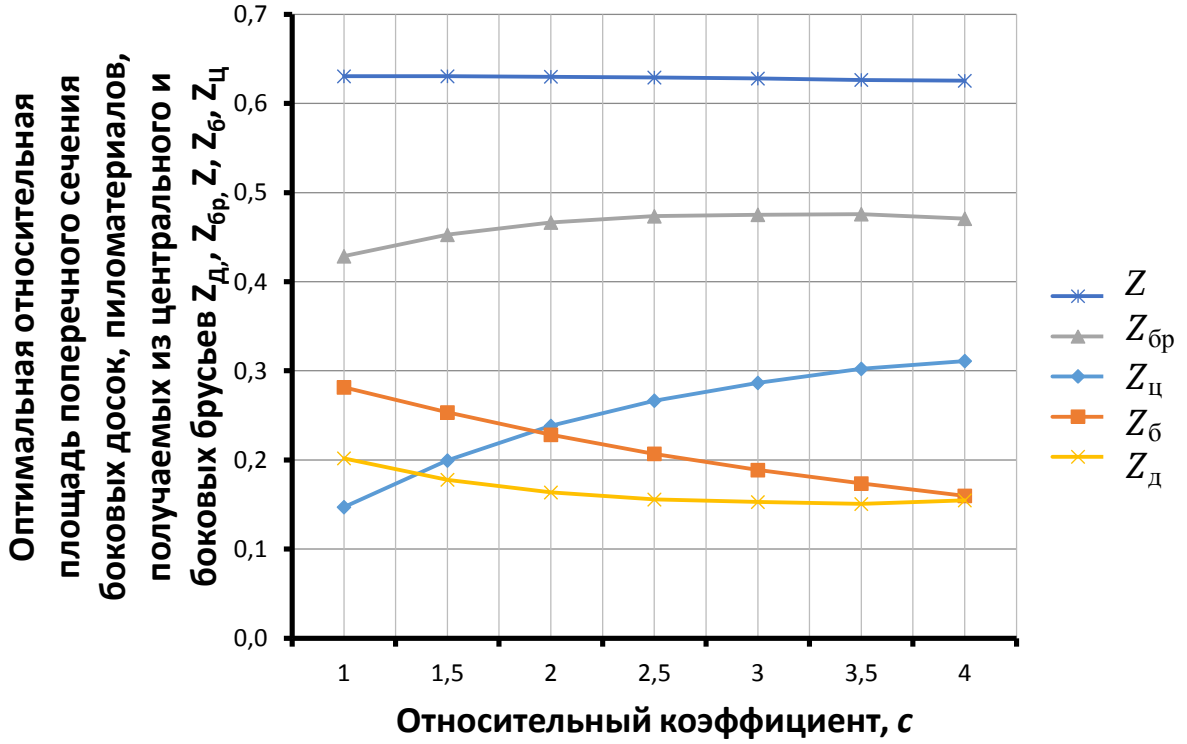


Рис. 1.25. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок и пиломатериалов, получаемых из центрального и боковых брусьев, при m_e = 0,01, $n_б$ = 6, $n_ц$ = 8

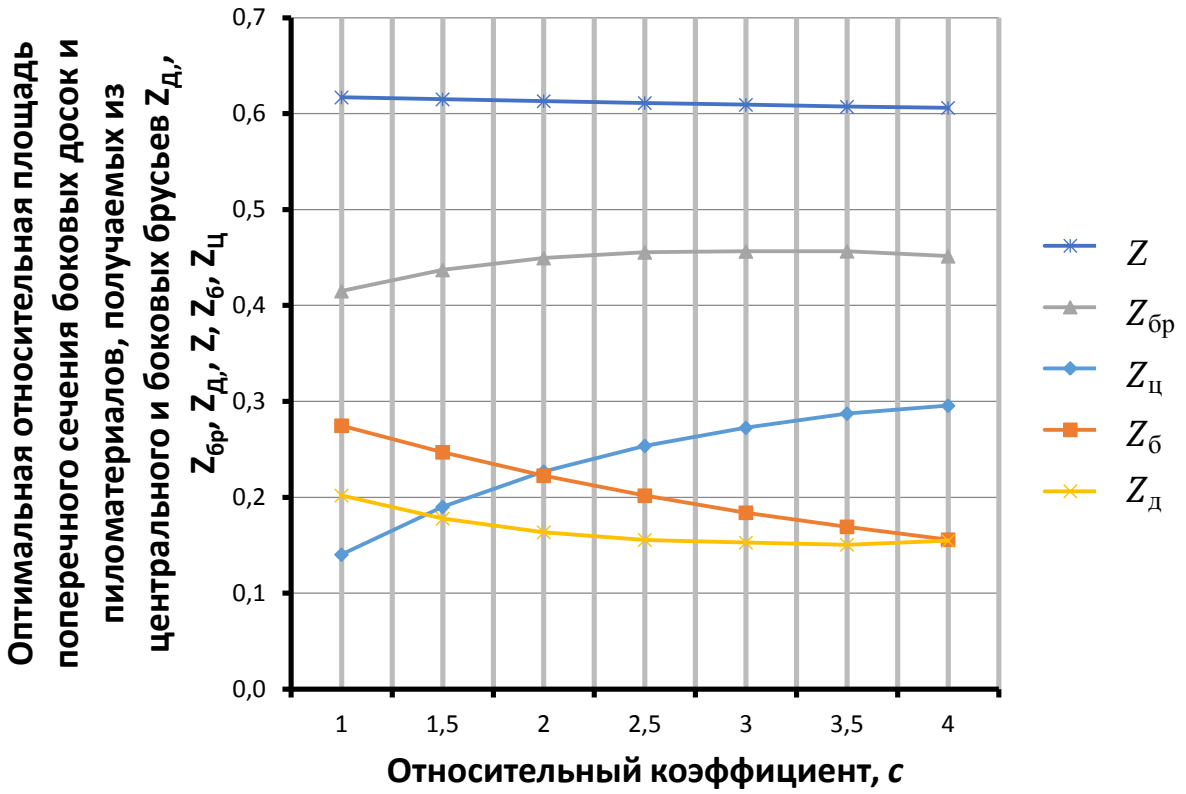


Рис. 1.26. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального и боковых брусьев, при m_e = 0,01, $n_б$ = 10, $n_ц$ = 12

При этом относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок сначала уменьшается с замедлением, потом немного увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений выпиливаемых брусьев сначала возрастает, а потом незначительно уменьшается (рис. 1.26).

С увеличением коэффициента изменения тольщины брусьев c, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и количестве получаемых досок из бокового $n_б$ = 14 штук и центрального бруса $n_ц$ = 16 штук, оптимальные относительные площади поперечных сечений получаемых пиломатериалов из центрального бруса увеличиваются, а из боковых – уменьшаются. (см. рис. 1.27).

При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок сначала уменьшается с замедлением, потом немного увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений выпиливаемых брусьев сначала возрастает, а потом уменьшается незначительно.

Следует подчеркнуть, что всегда наблюдается экстремум целевой функции при коэффициенте изменения толщин брусьев c =3,0 независимо от количества выпиливаемых досок из этих брусьев.

Таким образом, величина целевой функции с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев с уменьшается для любого сочетания количества выпиливаемых досок из этих брусьев.

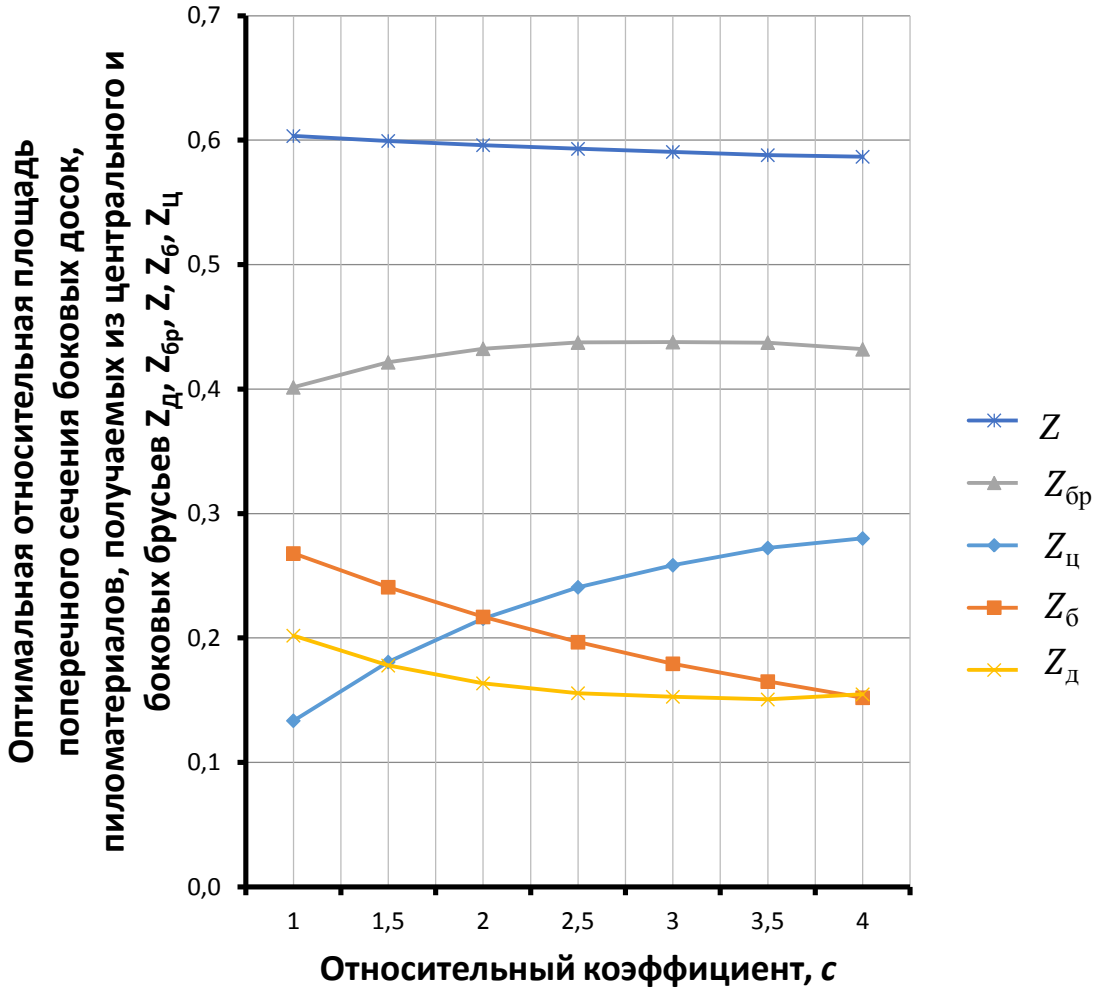


Рис. 1.27. Влияние коэффициента c на оптимальные площади поперечных сечений боковых досок и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального и боковых брусьев, при m_e = 0,01, $n_б$ = 14, $n_ц$ = 16

При относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок практически сохраняются прежними, а оптимальные относительные площади поперечных сечений центрального и боковых брусьев уменьшаются. Общая сумма относительных площадей поперечных сечений пиломатериалов, получаемых из брусьев, с увеличением количества выпиливаемых досок уменьшается и общий выход пиломатериалов снижается (см. рис. 1.28).

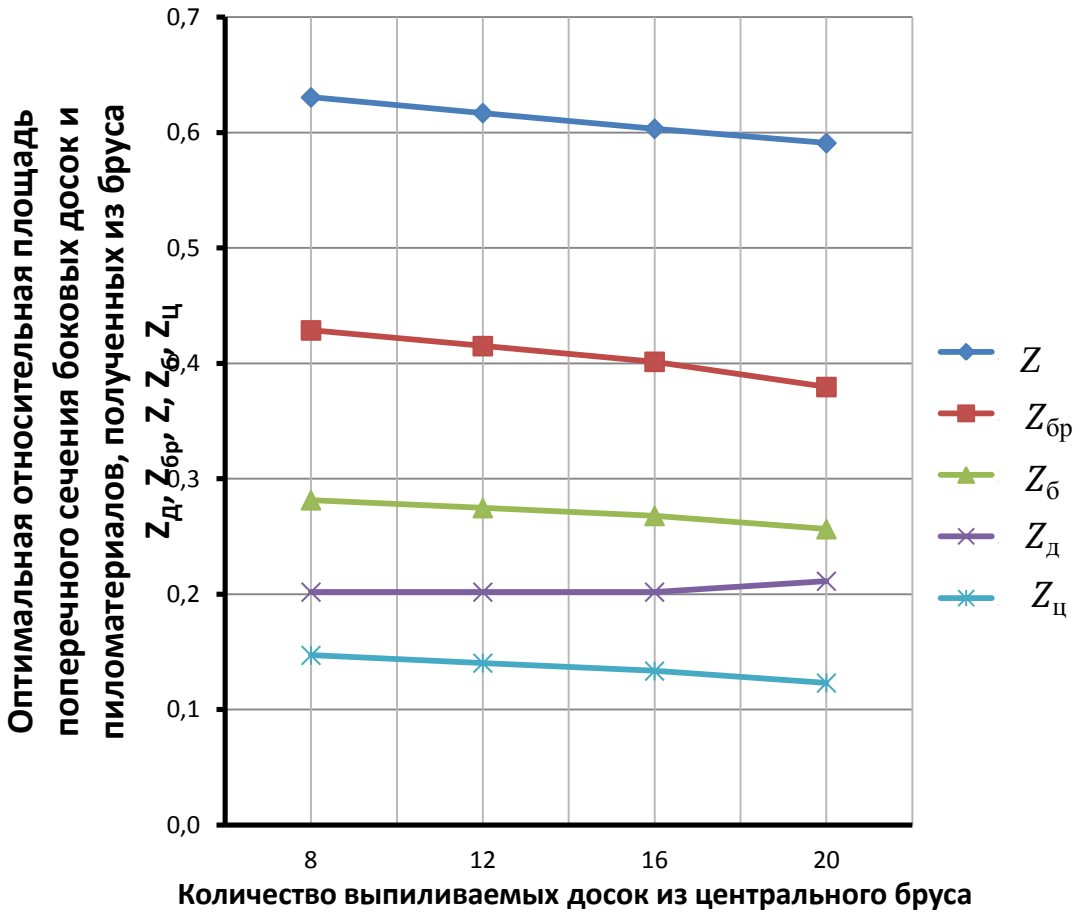


Рис. 1.28. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок и пиломатериалов, получаемых из центрального и боковых брусьев, при m_e = 0,01 и c = 1,0

При относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок практически не изменяются, а оптимальные относительные площади поперечных сечений центрального и боковых брусьев уменьшаются. В сумме относительные площади поперечных сечений досок, получаемых из брусьев, с увеличением количества выпиливаемых досок из этих брусьев уменьшаются (см. рис. 1.29). При этом величина целевой функции с увеличением количества получаемых досок из брусьев уменьшается.

Анализируя результаты, представленные на рис. 1.28, 1.29, следует отметить, что при коэффициенте c = 1,0 площадь поперечного сечения боковых обрезных досок больше по сравнению с вариантом, когда коэффициент c = 3,0, а площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев, при коэффициенте c = 3,0 несколько больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Следовательно, последую-

щий раскрой брусьев на обрезные доски изменяет оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок.

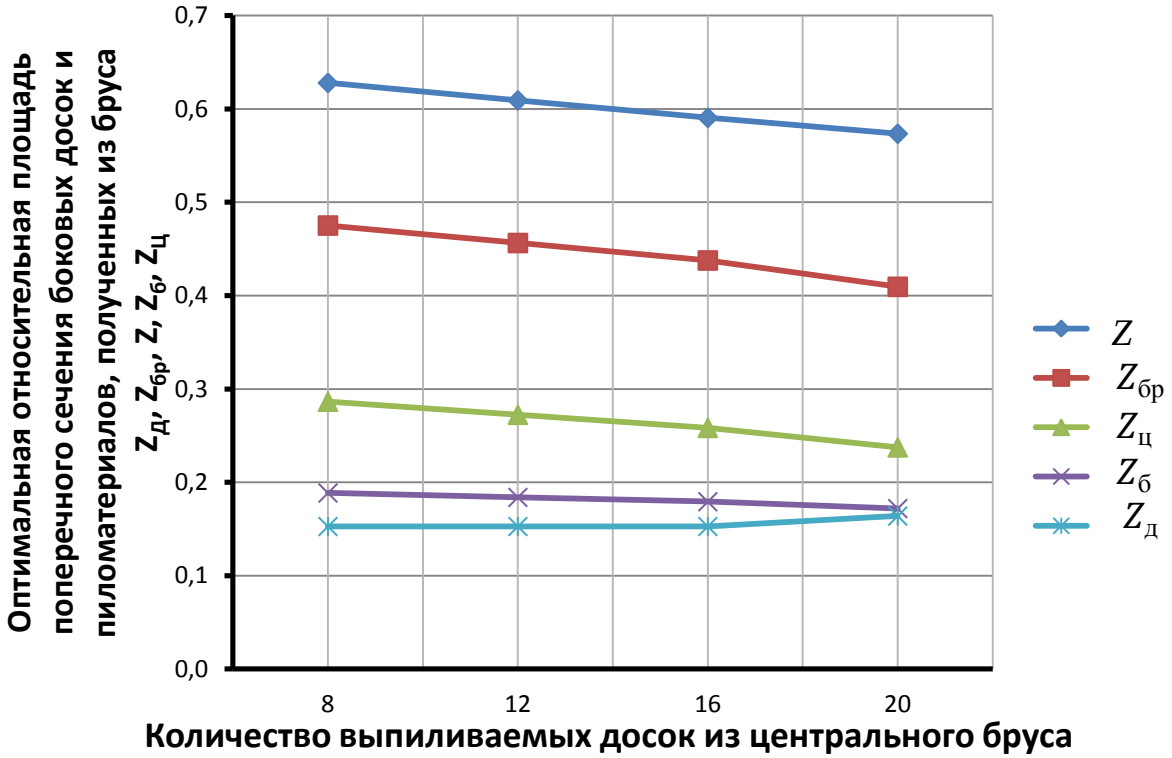


Рис. 1.29. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок и пиломатериалов, получаемых из центрального и боковых брусьев, при m_e = 0,01 и c = 3,0

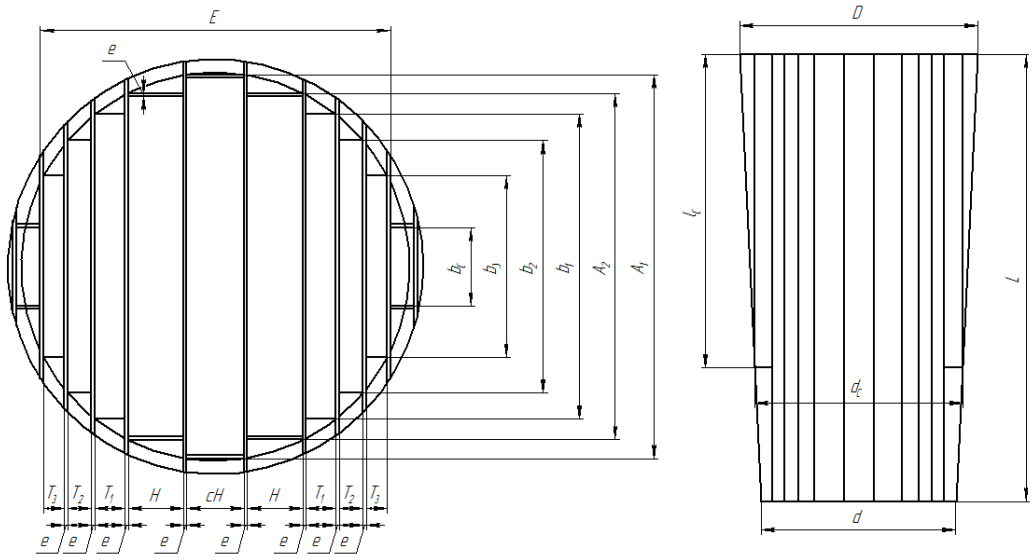
Таким образом, установлена взаимосвязь последующей распиловки брусьев на обрезные доски с размерами боковых обрезных досок и брусьев, а также на величину целевой функции.

1.6. Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны

Постановка и математическая модель задачи. С учетом сбеговой зоны схема раскроя пилвочника представлена на рис. 1.30.

Для решения задачи оптимизации составляем уравнение целевой функции [89]. В качестве критерия оптимальности выбираем объем получаемых пиломатериалов [90]. Целевая функция записывается в виде суммарного объема пиломатериалов V, получаемого из пифагорической зоны $V_П$, и объема обрезных досок $V_с$, получаемого из сбеговой зоны [92]:

$$V = V_П + V_с. \quad (1.139)$$



а *б*

Рис. 1.30. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила и величины сбега бревна: *а* – поперечное сечение; *б* – продольное сечение

Объем пиломатериалов, получаемый из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$V_{\text{П}} = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3). \quad (1.140)$$

Объем обрезных досок, получаемый из сбеговой зоны, можно записать в следующем виде [66]:

$$V_{\text{с}} = 2b_{\text{с}}T_{\text{с}}l_{\text{с}}. \quad (1.141)$$

В теории раскроя пиловочника [99] было установлено, что оптимальная длина доски, получаемая из сбеговой зоны $l_{\text{с}}$, определяется по выражению $l_{\text{с}} = \frac{2}{3}l_{\text{П}}$.

Диаметр бревна в нижнем торце D можно выразить в следующем виде:

$$D = d + K_{\text{с}}dl = d(1 + K_{\text{с}}l). \quad (1.142)$$

Диаметр пиловочника, при котором начинаем выпиливать сбеговую доску, определится по уравнению

$$d_c = d\big(1 + K_c(l - l_c)\big). \quad (1.143)$$

Целевая функция (1.139) составлена с учетом следующего предположения. При увеличении пифагорической зоны объем получаемых пиломатериалов из этой зоны возрастает, а объем досок, полу-

чаемых из сбеговой зоны, уменьшается, и наоборот. Очевидно, имеется такое соотношение этих объемов, при которых целевая функция принимает максимальное значение [91].

Чтобы оценить особенности изменения пифагорической зоны в целевой функции, ее представляют в виде суммы объемов получаемых брусьев $V_{\text{бр}}$ и боковых обрезных досок $V_{\text{д}}$ [68]:

$$V_{\text{П}} = V_{\text{бр}} + V_{\text{д}}.$$

Объем брусьев определяется по формуле:

$$V_{\text{бр}} = Hl(cA_1 + 2A_2).$$

Объем боковых обрезных досок определяется по формуле:

$$V_{\text{д}} = 2(T_1 b_1 + T_2 b_2 + T_3 b_3)l.$$

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника написаны с учетом теоремы Пифагора. Для пифагорической зоны уравнения связи будут иметь следующий вид.

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2 H^2 - A_1^2 = 0. \quad (1.144)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0. \quad (1.145)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (1.146)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (1.147)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) = 0. \quad (1.148)$$

Уравнение связи для досок, получаемых из сбеговой зоны:

$$d_c^2 - b_c^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_c + 10e)^2 = 0. \quad (1.149)$$

В уравнении связи (1.149) диаметр пиловочника d_c^2 определяется по формуле

$$d_c^2 = d^2 + d^2 K_c l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c. \quad (1.150)$$

С учетом уравнения (1.150) получим следующее уравнение связи для досок, получаемых из сбеговой зоны:

$$d^2 + d^2 K_c l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c - \\ -b_c^2 - \mathrm{c}^2 H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_c - \\ -24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_c - 40eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_c - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_c - \\ -40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_c - 40eT_3 - 4T_c^2 - 40eT_c - 100e^2 = 0.$$

Полагаем, что математическая модель данной задачи оптимизации с учетом пифагорической и сбеговой зон пиловочника составлена.

Решение математической модели. Для решения данной математической модели воспользуемся методом множителей Лагранжа [75]. В данной математической модели оптимизации раскроя пиловочника следует отметить, что целевая функция (1.139), (1.140) и (1.141) представлена в трехмерном измерении, а уравнения связи (1.144)…(1.150) написаны в двухмерном измерении. В связи с этим в уравнениях связи при написании функции Лагранжа следует учесть и длину пиловочника *l*. Если при написании функции Лагранжа в уравнениях связи не предусмотреть длину пиловочника, то этот параметр будет учитываться в коэффициентах Лагранжа. Последний вариант принят при решении данной задачи оптимизации. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$L = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3) + 2b_cT_cl_c + \\ \lambda_1(d^2 - \mathrm{c}^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - \\ -8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - \\ -4H^2 - 8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - \\ -\mathrm{c}^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - \\ -8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \\ +\lambda_5(d^2 - b_3^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - \\ -16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 - 32eT_3 - 64e^2) + \\ +\lambda_6(d^2 + d^2K_c l^2 - 2d^2K_c{}^2 l l_c + d^2K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2K_c l - 2d^2K_c l_c - \\ -b_c^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_c - \\ -24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_c - 40eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_c - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_c - \\ -40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_c - 40eT_3 - -4T_c^2 - 40eT_c - 100e^2). \quad (1.151)$$

Для отыскания максимума находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = cHl - 2A_1\lambda_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2Hl - 2A_2\lambda_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = l(cA_1 + 2A_2) - 2\lambda_1 c^2 H - 2\lambda_2 c^2 H - 8\lambda_2 H - 8\lambda_2 e - 4\lambda_2 ce - \\
-8\lambda_2 cH - 2\lambda_3 c^2 H - 8\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - \\
- 4\lambda_3 cT_1 - 8\lambda_3 T_1 - 16\lambda_3 e - 8\lambda_3 ce - \\
-2\lambda_4 c^2 H - 8\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 4\lambda_4 cT_1 - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cT_2 - 8\lambda_4 T_2 - \\
-24\lambda_4 e - 12\lambda_4 ce - 2\lambda_5 c^2 H - 8\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 4\lambda_5 cT_1 - 8\lambda_5 T_1 - \\
-4\lambda_5 cT_2 - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cT_3 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 16\lambda_5 ce - 2\lambda_6 c^2 H - \\
-8\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 4\lambda_6 cT_1 - 8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cT_2 - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cT_3 - \\
-4\lambda_6 cT_c - 8\lambda_6 T_c - 8\lambda_6 T_3 - 40\lambda_6 e - 24\lambda_6 ce = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 l - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 l - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 l - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_c} = 2T_c l_c - 2\lambda_6 b_c = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 l - 8\lambda_3 T_1 - 4\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 16\lambda_3 e - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cH - \\
-8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - \\
-8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_c - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 l - 8\lambda_4 T_2 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 24\lambda_4 e - \\
-8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_c - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 l - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - \\
-8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - \\
-8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_c - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_c} = 2b_c l_c - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_c - 40\lambda_6 e - 4\lambda_6 cH = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial l_c} = 2b_c T_c - 2\lambda_6 d^2 K_c - 2\lambda_6 d^2 K_c^2 l + 2\lambda_6 d^2 K_c^2 l_c = 0.
\end{cases}
\tag{1.152}
$$

Решение системы уравнений. Из системы уравнений (1.152) определяем из пифагорической зоны пиловочника размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также размеры досок, получаемых из сбеговой зоны. Величина пифагорической зоны определяется по формуле [94]:

$$E = cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e. \quad (1.153)$$

Решаем полученную систему уравнений совместно с уравнениями связи. Рассматриваем четвертое уравнение системы (1.152), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1 , \lambda_3 = \frac{T_1 l}{b_1}. \quad (1.154)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (1.152), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2 , \lambda_4 = \frac{T_2 l}{b_2}. \quad (1.155)$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (1.152), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3 , \lambda_5 = \frac{T_3 l}{b_3}. \quad (1.156)$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (1.152), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_c l_c = \lambda_6 b_c , \lambda_6 = \frac{T_c l_c}{b_c}. \quad (1.157)$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (1,152), в которое подставляем равенство (1,157). В результате преобразований получим

$$b_c = d\sqrt{K_c l_c (1 + K_c l + K_c l_c)}. \quad (1.158)$$

Рассматриваем десятое уравнение системы (1.152), которое можно представить в виде

$$b_3 \, l = 4\lambda_5 T_2 + 2\lambda_5 cH + 4\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_3 + 16\lambda_5 e + b_c l_c. \quad (1.158')$$

В равенство (1.158') подставляем выражение (1.156), получим:

$$b_3^2 l = 2T_3 \, l(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) + b_3 \, b_c l_c. \quad (1.159)$$

Равенство (1.159) можно представить в следующем виде:

$$b_3^2 l - b_3\ b_c l_c - 2T_3\ \ l(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) + = \ 0. \quad (1.159')$$

Решаем последнее квадратное уравнение, получаем:

$$b_3\ \ = \frac{1}{2l}\left(\sqrt{b_c^2 l_c^2 + 8T_3 l^2 (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8l)} - b_c l_c\right). \quad (1.160)$$

Таким образом, ширина третьей пары боковых обрезных досок взаимосвязана с размерами брусьев и боковых обрезных досок, а также с размерами доски, получаемой из сбеговой зоны.

Рассматриваем девятое уравнение системы (1.152), которое представляем в следующем виде:

$$b_2\ l\ = \ 4\lambda_4 T_2 + 2\lambda_4 cH + 4\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1 + 12\lambda_4 e + b_3\ l. \quad (1.161)$$

В последнее уравнение равенства (1.161) подставим выражение (1.155), получим:

$$b_2^2\ = \ 2T_2\ \ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e) + b_2\ b_3\ . \quad (1.162)$$

Из равенства (1.162) можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3\ \ = b_2\ \ - \frac{2T_2\ \ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)}{b_2}. \quad (1.163)$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (1.152), которое представляем в виде:

$$b_1\ l\ = \ 4\lambda_3 T_1 + 2\lambda_3 cH + 4\lambda_3 H + 8\lambda_3 e + b_2\ l. \quad (1.164)$$

В равенство (1.164) подставляем выражение (1.154), получим:

$$b_1^2\ = \ 2T_1(cH + 2H + 2T_1 + 4e) + b_1\ b_2\ . \quad (1.165)$$

Из равенства (1.165) можно выразить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2\ \ = b_1\ \ - \frac{2T_1\ \ l(cH + 2H + 2T_1 + 4e)}{b_1}. \quad (1.166)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (1.152), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$cHl = 2\lambda_1 A_1 \ , \lambda_1 = \frac{cHl}{2A_1}. \quad (1.167)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (1.152), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$Hl = \lambda_2 A_2 \ , \lambda_2 = \frac{Hl}{A_2}. \quad (1.168)$$

Из уравнения связи (1.144) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \quad (1.169)$$

Используя уравнение связи (1.169), можно определить множитель Лагранжа по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{cH}{\sqrt{d^2 - c^2H^2}}. \quad (1.170)$$

Из уравнения связи (1.145) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH + 2H + 2e)^2}. \quad (1.171)$$

Используя равенство (1.171), можно определить множитель Лагранжа λ_2 по формуле:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHe - 4H^2 - 8He - 4e^2}}. \quad (1.172)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (1.152), которое представляем в следующем виде:

$$l(cA_1 + 2A_2) = 2\lambda_1 c^2 H + 2\lambda_2 c^2 H + \\ +8\lambda_2 H + 8\lambda_2 e + 4\lambda_2 ce + 8\lambda_2 cH + (c+2)b_1 \ l. \quad (1.173)$$

В равенство (1.173) подставляем выражения (1.167) и (1.168), получим:

$$cA_1 + 2A_2 = \frac{c^3H^2}{A_1} + \frac{(2c^2H^2 + 8H^2 + 8cH^2 + 4cHe + 8He)}{A_2} + (c+2)b_1. \quad (1.174)$$

Из равенства (1.174) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{c(d^2 - 2c^2H^2)}{(c+2)A_1} + \\ + \frac{2\left(d^2 - ((H(c+2)+2e)^2 + H^2(c+2)^2 + 2He(c+2)\right)}{(c+2)A_2}. \quad (1.175)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, можно определить её толщину, используя уравнение связи (1.146):

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H + 4\,e)) \,. \quad (1.176)$$

Аналогично, зная ширину доски, можно определить её толщину, используя уравнение связи.

Толщина второй пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 6e)). \quad (1.177)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 8e)). \quad (1.178)$$

Рассматриваем одиннадцатое уравнение системы (1.152), которое представляем в виде:

$$2b_{\text{c}}l_{\text{c}} = 8\lambda_6 H + 8\lambda_6 T_1 + 8\lambda_6 T_2 + 8\lambda_6 T_3 + \\ + 8\lambda_6 T_{\text{c}} + 40\lambda_6 e + 4\lambda_6 cH. \quad (1.179)$$

В равенство (1.179) подставим выражение (1.157), получаем:

$$b_c^2 = 2T_{\text{c}}(2H + cH + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_{\text{c}} + 10e). \quad (1.180)$$

Толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, определится по формуле:

$$T_c = 0{,}5(\sqrt{d_c^2 - b_c^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 10e)). \quad (1.181)$$

Длина доски, получаемой из сбеговой зоны, ранее была определена и находится по формуле:

$$l_C = \frac{D - \sqrt{8{T_C}^2 + 6ET_C + E^2}}{K_{\text{c}}}. \quad (1.182)$$

Полагаем, что математическая модель задачи оптимизации решена. Получены формулы для определения оптимальных размеров брусьев и досок с учетом сбеговой зоны. Однако по этим формулам непосредственно определить оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным [95].

Алгоритм решения задачи. Для решения задачи воспользуемся численным методом. Для определения оптимальных размеров брусьев и досок расчеты производим в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ и $m_e = e/d$.

Алгоритм решения задачи представляем в следующем виде.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (1.183)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad 1.184)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \\ + \frac{2(1 - ((cm_H + 2m_H + 2m_e)^2 + m_H^2(c+2)^2 + 2m_e m_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (1.185)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H + 4m_e)\right). \quad (1.186)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \frac{2(m_{A_2}^2 - m_H^2(c+2)^2 - 2m_H m_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (1.187)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 4m_e\right). \quad (1.188)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 6m_e\right)\right). \quad (1.189)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 6m_e\right). \quad (1.190)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)\right). \quad (1.191)$$

Относительная величина пифагорической зоны определяется по формуле:

$$m_E = cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e. \quad (1.192)$$

Относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны:

$$m_{T_c} = 0{,}5(\sqrt{d_c^2 - m_{b_c}^2} - \\ -\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)). \quad (1.193)$$

Относительная ширина наружной пласти сбеговой доски:

$$m_{b_C} = \sqrt{2m_E m_{T_C} + 4m_{T_c}^2}. \quad (1.194)$$

Относительная длина сбеговой доски:

$$m_{l_C} = \frac{m_D - \sqrt{8m_{T_c}^2 + 6m_E m_{T_C} + m_E^2}}{K_{\text{c}}}. \quad (1.195)$$

Решая равенства (1.142) и (1.143), можно написать:

$$m_{d_c} = m_D - K_c m_{lc}. \quad (1.196)$$

Используя равенство (1.196), относительную толщину доски, получаемой из сбеговой зоны, можно определить по формуле:

$$m_{T_c} = \frac{\sqrt{16m_D^2 + 9m_E^2} - 5m_E^2}{16}. \quad (1.197)$$

Критерием оптимальности при раскрое пиловочника выбираем общий относительный выход пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговой зон.

Общий объем пиловочника (бревна) определяется по формуле:

$$V_{\text{оп}} = \frac{\pi(d + D)^2}{16} l. \quad (1.198)$$

Так как объем пиломатериалов *V*, получаемых из пиловочника, определяется по алгоритму в относительных единицах, то и общий объем пиловочника необходимо представить в относительных единицах.

В относительных единицах общий объем пиловочника определяется по формуле:

$$m_{V\text{оп}} = \frac{\pi(1 + m_D)^2}{16} l. \quad (1.199)$$

$$m_D = 1 + K_c l. \quad (1.200)$$

Относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, определяется по формуле:

$$m_{V\text{с}} = 2m_{Tc} m_{bc} m_{lc}. \quad (1.201)$$

Относительный объем боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V\text{д}} = 2(m_{T1} m_{b1} + m_{T2} m_{b2} + m_{T3} m_{b3}) l. \quad (1.202)$$

Относительный объем брусьев, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V\text{бр}} = m_H (c m_{A1} + 2m_{A2}) l. \quad (1.203)$$

Относительный объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V\text{п}} = m_{V\text{д}} + m_{V\text{бр}}. \quad (1.204)$$

Относительный объем пиломатериалов, получаемых из пиловочника, определяется по формуле:

$$m_V = m_{V\text{п}} + m_{V\text{с}}. \quad (1.205)$$

Относительный выход досок, получаемых из сбеговой зоны, определяется по формуле:

$$\text{П}_{V\text{с}} = \frac{V_c}{V_{o\text{п}}} = \frac{m_{V\text{с}}}{m_{V o\text{п}}}. \quad (1.206)$$

Относительный выход брусьев, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$\text{П}_{V\text{бр}} = \frac{V_{\text{бр}}}{V_{o\text{п}}} = \frac{m_{V\text{бр}}}{m_{V o\text{п}}}. \quad (1.207)$$

Относительный выход боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$\text{П}_{V\text{д}} = \frac{V_{\text{д}}}{V_{o\text{п}}} = \frac{m_{V\text{д}}}{m_{V o\text{п}}}. \quad (1.208)$$

Относительный выход пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$\text{П}_{V\text{п}} = \frac{V_{\text{п}}}{V_{o\text{п}}} = \frac{m_{V\text{п}}}{m_{V o\text{п}}}. \quad (1.209)$$

Относительный выход пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговой зон пиловочника, определяется по формуле:

$$\text{П}_V = \frac{V}{V_{o\text{п}}} = \frac{m_V}{m_{V o\text{п}}}. \quad (1.210)$$

Результаты расчетов. Расчеты выполняются в следующей последовательности. Вначале задаемся длиной бревна l и коэффициентом изменения толщины брусьев c. Далее задаемся относительным сбегом бревна по диаметру K_c и относительной шириной пропила m_e. Для этих параметров по алгоритму определяем все размеры досок и величину целевой функции для определенного диапазона относительной толщины брусьев m_H [73]. По результатам расчетов находим оптимальное (максимальное) значение целевой функции. По результатам расчетов выполнен анализ влияния различных факторов на опти-

мальные размеры брусьев и орезных досок, получаемых из сбеговой и пифагорической зон пиловочника.

Результаты расчетов показали сложный характер влияния основных факторов на величину целевой функции данной задачи оптимизации раскроя пиловочника, а также на оптимальные размеры брусьев и получаемых досок из пифагорической и сбеговой зон.

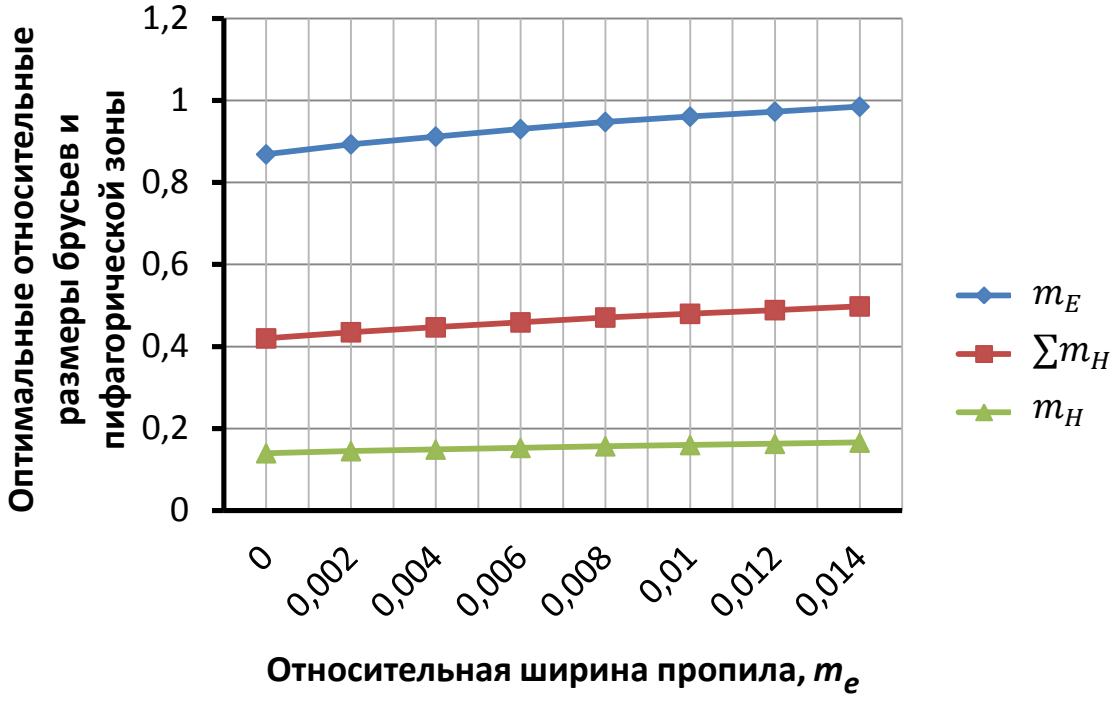


Рис. 1.31. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_H, m_E, $\sum m_H$ при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Основные зависимости относительных размеров брусьев и досок, а также их относительных объемов представлены на последующих рисунках. При распиловке пиловочника с учетом сбеговой зоны с увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины бруса c = 1 и длине пиловочника l = 3 м оптимальная относительная толщина бокового бруса возрастает и пифагорическая зона также увеличивается (рис. 1.31). Возрастает при этом также и относительная толщина центрального бруса.

При увеличении относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника m_{Vc}, уменьшается, оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает, а оптимальный относительный объем боковых досок $m_{V\text{д}}$ уменьшается (см. рис. 1.32). В результате суммарный оптималь-

ный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, уменьшается.

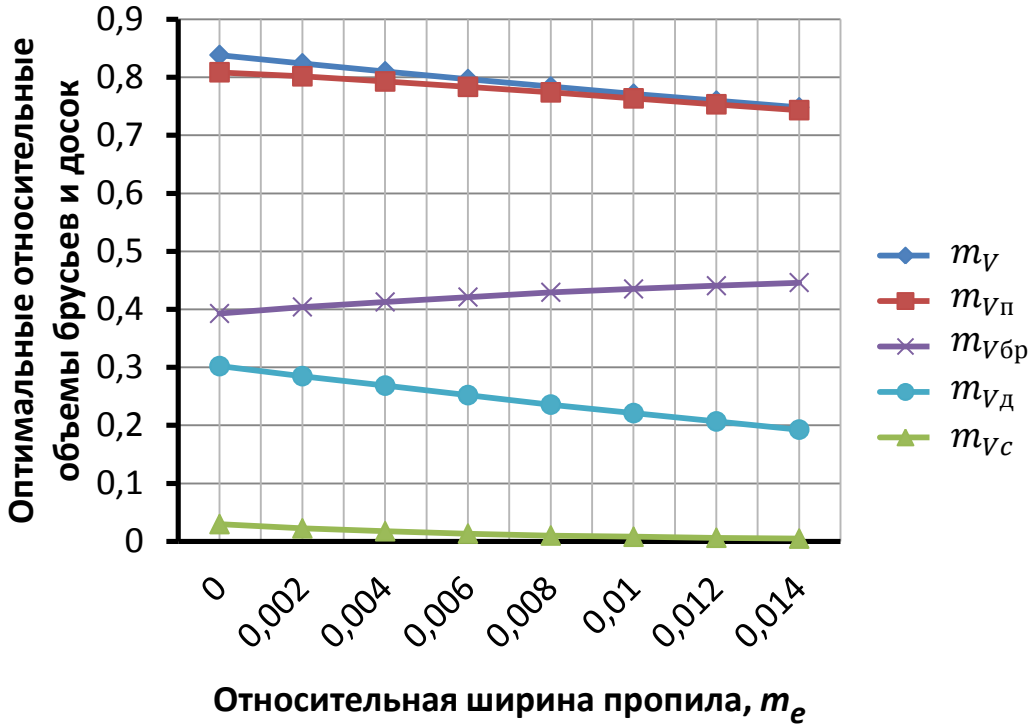


Рис. 1.32. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные размеры досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 1.33). При этом оптимальная относительная длина доски уменьшается в большой мере [54]. Следовательно, ширина пропила наибольшее влияние оказывает на оптимальную длину доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника.

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальная [59] относительная толщина первой пары боковых обрезных досок вначале немного возрастает, а потом немного уменьшается. Оптимальные относительные толщины следующих пар обрезных досок уменьшаются, причем уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 1.34). Так, например, толщина последней (третьей) пары боковых обрезных досок уменьшилась примерно в 2 раза, а средняя пара боковых обрезных досок уменьшилась всего лишь примерно в 1,3 раза. При относительной ширине пропила m_e = 0,005…0,008 толщина боковой обрезной

доски при распиловке пиловочника диаметром 60 см составит 30…25 мм. Такие толщины досок распространены в промышленности.

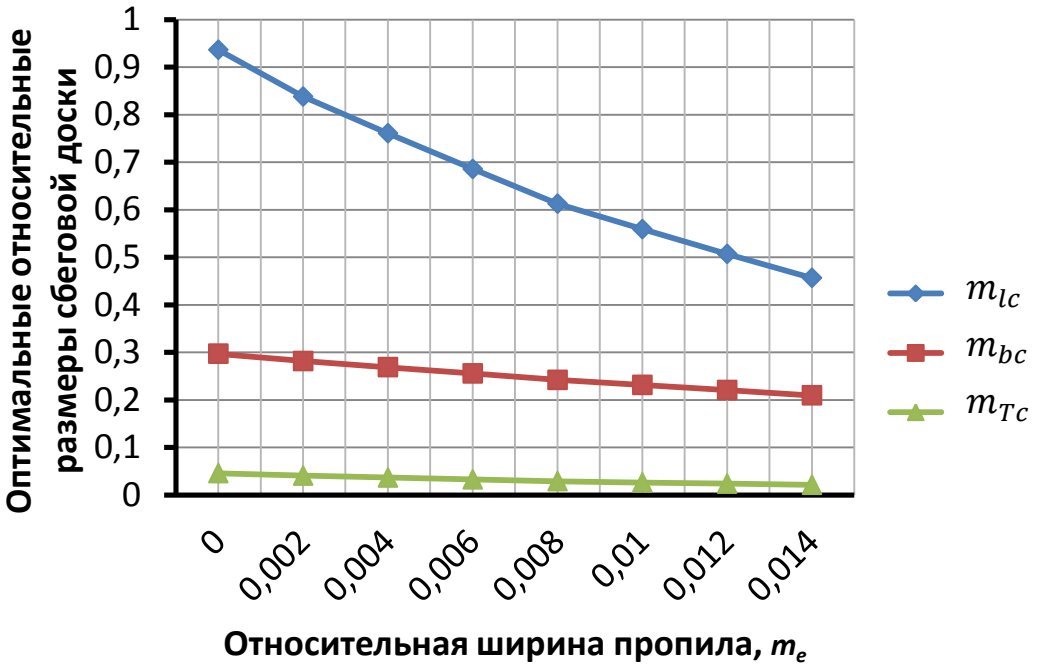


Рис. 1.33. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc} при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

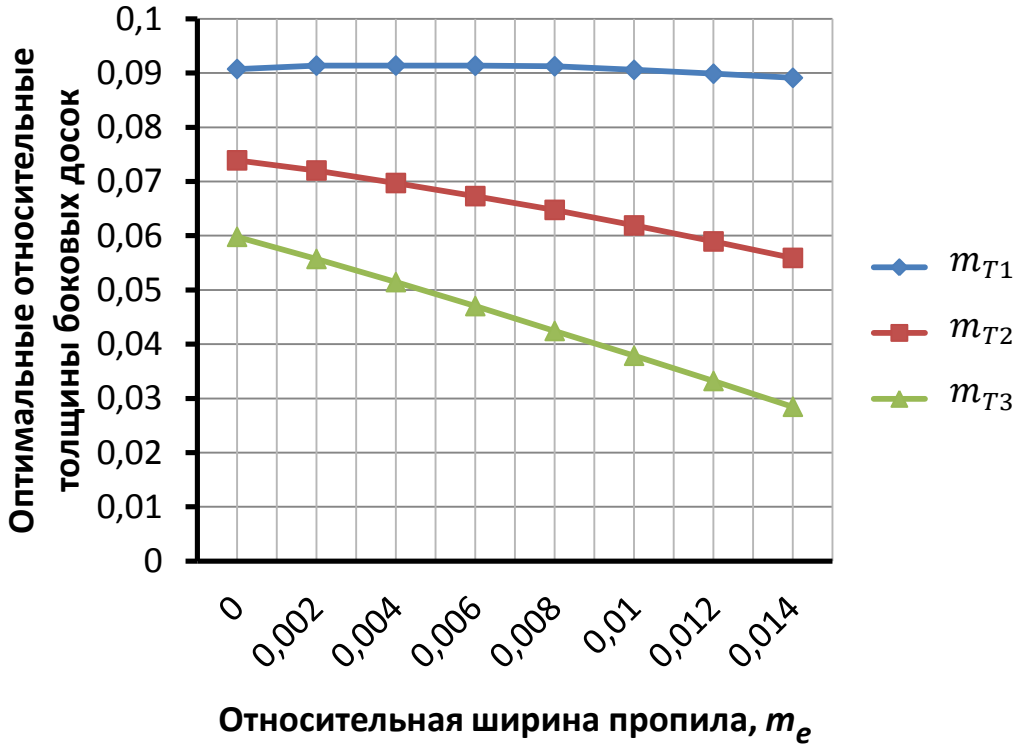


Рис. 1.34. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (рис. 1.35) практически прямолинейно. При этом крайняя пара боковых обрезных досок уменьшается в большей степени, чем боковые доски, расположенные ближе к середине бревна [92].

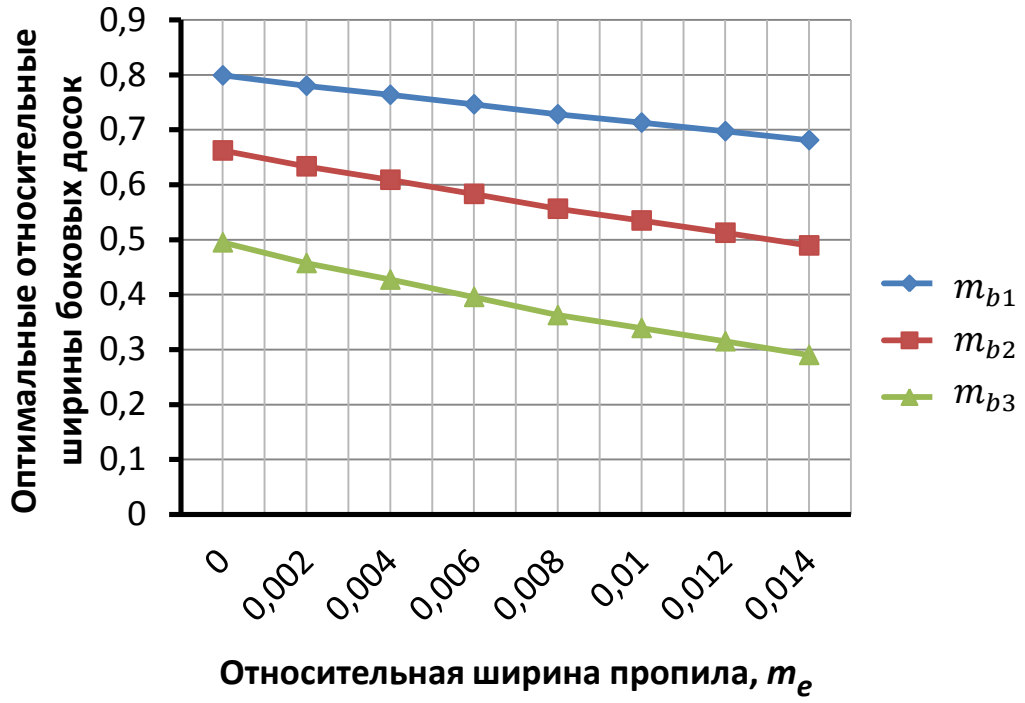


Рис. 1.35. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Аналогичная закономерность изменения размеров оптимальных относительных брусьев, досок и их объемов наблюдается при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 (см. рис. 1.31 и 1.36). Различие наблюдается в том, что относительная величина центрального бруса и сумма относительных толщин этих брусьев при коэффициенте c = 3,0 имеет большую величину, чем при коэффициенте c = 1,0.

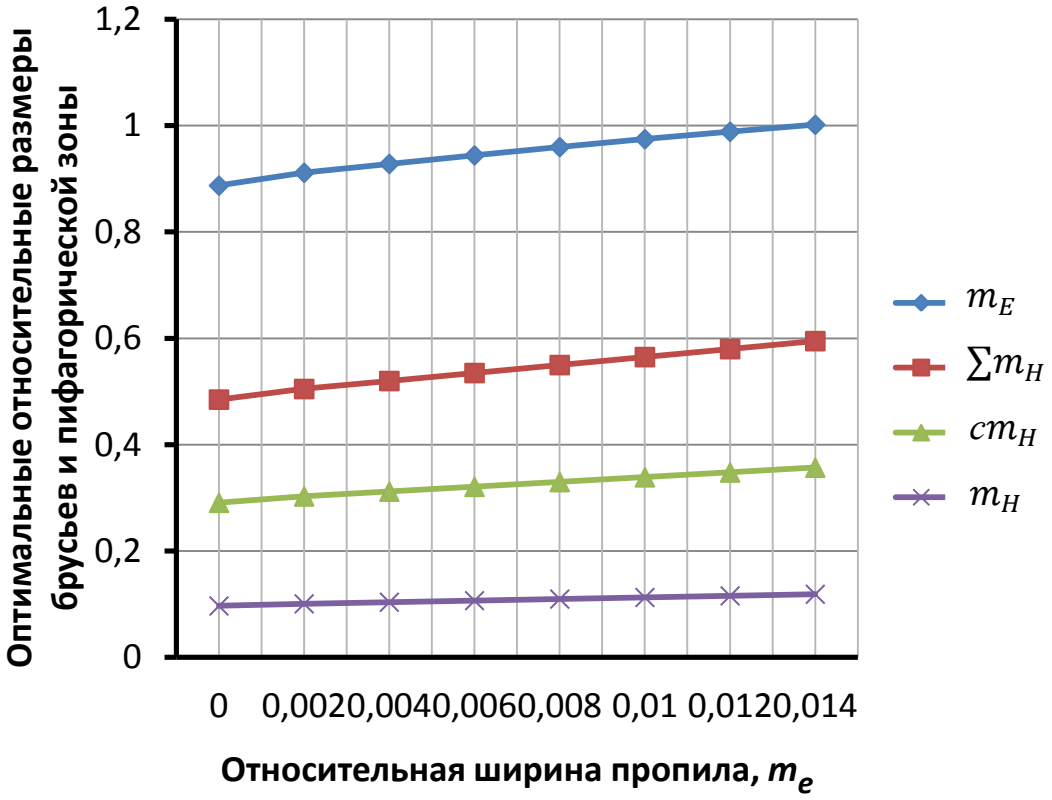


Рис. 1.36. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H$, m_H при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Сравнивая рис. 1.31 и 1.36, следует отметить, что суммарная оптимальная толщина брусьев $\sum m_H$ больше при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0, чем при коэффициенте c = 1,0. С увеличением относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc} и оптимальный относительный объем досок, получаемых из пифагорической зоны $m_{V\text{д}}$, уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$, возрастает (см. рис. 1.37). Суммарный относительный объем пиломатериалов $m_{V\text{п}}$ с увеличением относительной ширины пропила уменьшается. Такие закономерности получены при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м. Сравнивая график на рис. 1.32 и на рис. 1.37, следует отметить следующее отличие. Разница проявляется в том, что при коэффициенте c = 3,0 оптимальный относительный объем боковых досок $m_{V\text{д}}$ меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

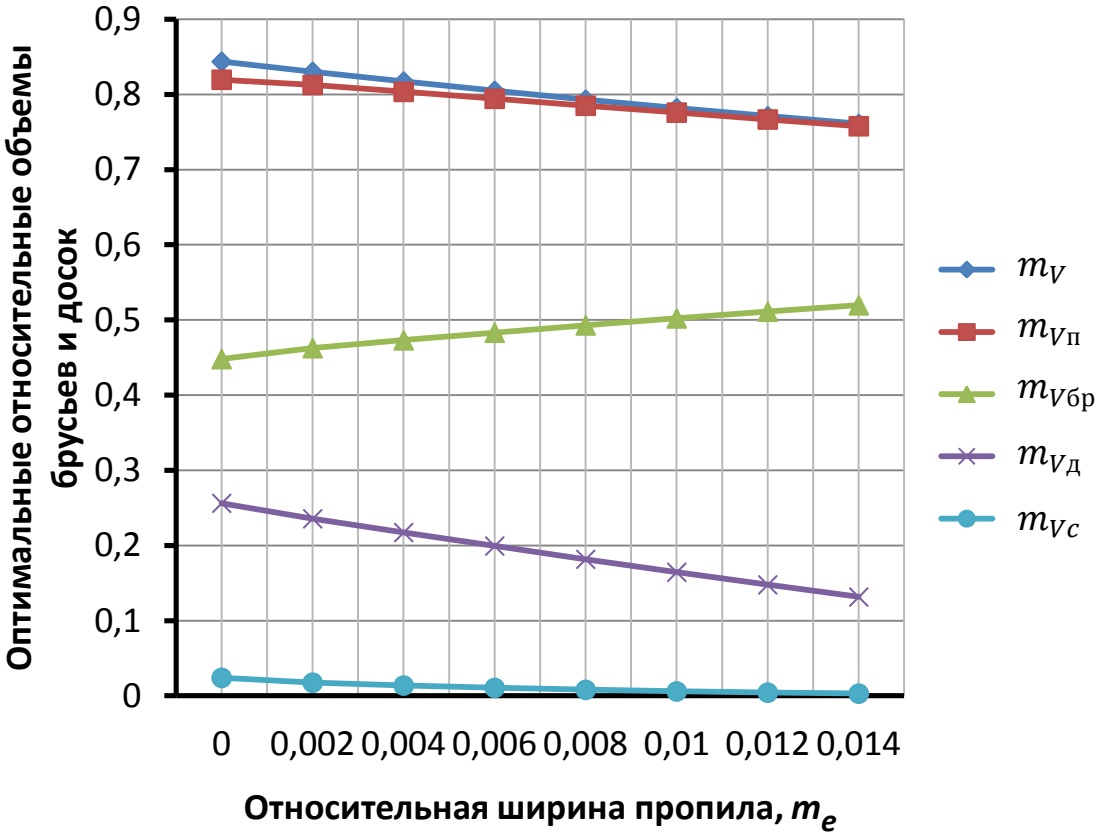


Рис. 1.37. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила m_e относительные размеры боковой обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 1.38). При этом относительная длина сбеговой доски m_{lc} уменьшается в большой мере, чем относительная ширина сбеговой доски m_{bc} и относительная толщина этой сбеговой доски m_{Tc}. Этот график получен при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м. Это объясняется тем, что при коэффициенте c = 3,0 и с увеличением ширины пропила пифагорическая зона возрастает и, следовательно, параболическая (сбеговая) зона уменьшается. При относительной ширине пропила m_e = 0,005 ... 0,008 при коэффициенте c = 3,0 оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны при распиловке пиловочника диаметром 60 см получается равной 18…15 мм. Доски такой толщины считаются тонкими и практически не пользуются спросом.

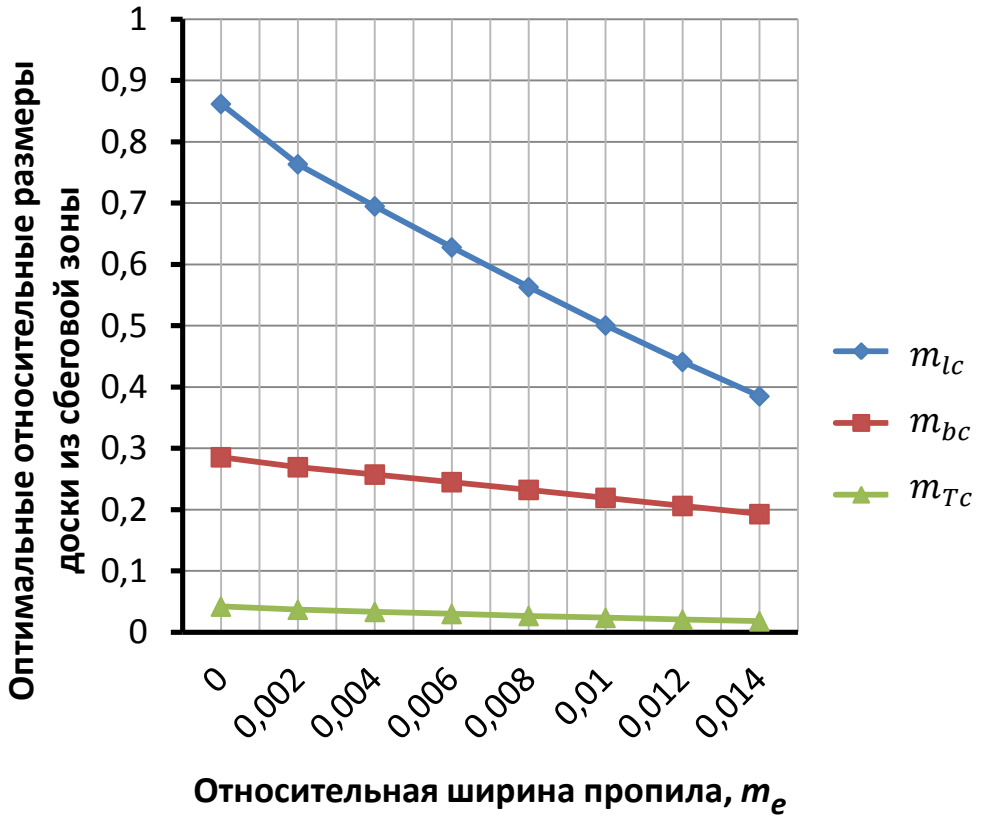


Рис. 1.38. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются. Причем уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 1.39). Уменьшение оптимальной относительной толщины первой пары боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила происходит незначительно. Оптимальная относительная толщина второй пары боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила существенно уменьшается. При этом наблюдается уменьшение оптимальной относительной толщины досок с небольшим ускорением.

При относительной ширине пропила m_e = 0,005 … 0,008 оптимальная относительная толщина боковой обрезной доски составляет 0,042 и 0,034. При распиловке пиловочника диаметром 60 см, толщина крайней боковой обрезной доски в этом случае составит 25…20,4 мм. Доски такой толщины широко используются в народном хозяйстве.

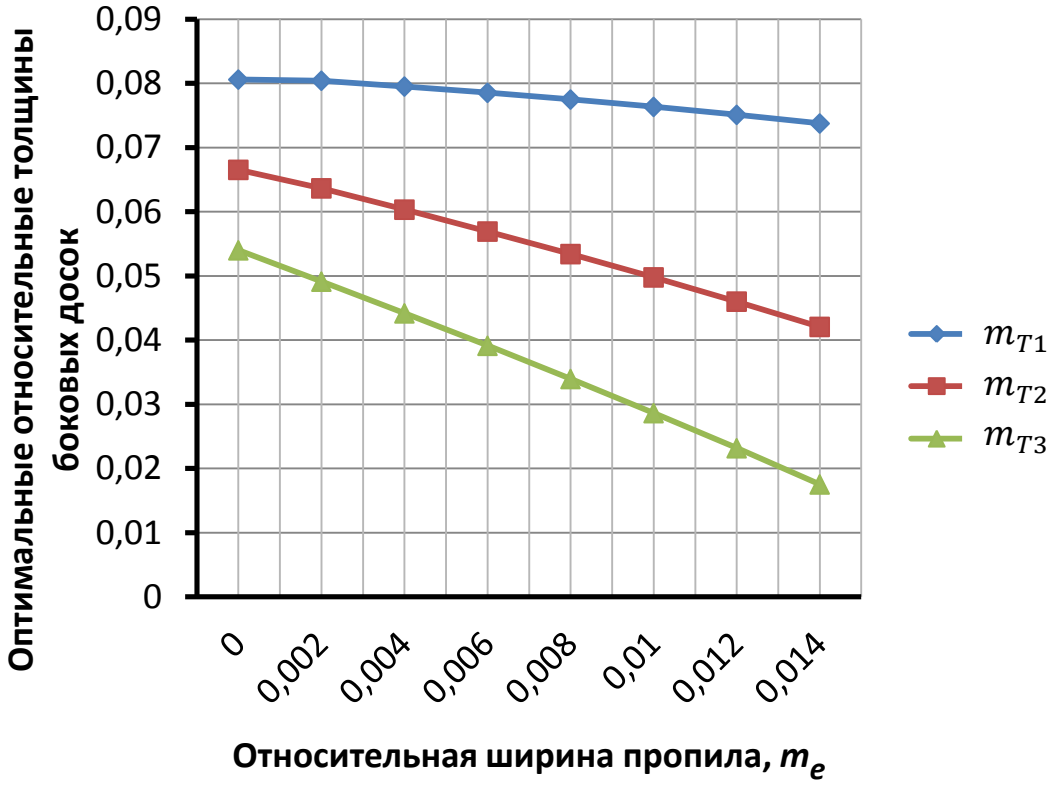


Рис. 1.39. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 1.40) почти прямо пропорционально.

С увеличении коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м пифагорическая зона изменяется незначительно, но оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает. В итоге суммарная оптимальная относительная толщина брусьев возрастает до c = 3,0, а далее уменьшается незначительно (см. рис. 1.41).

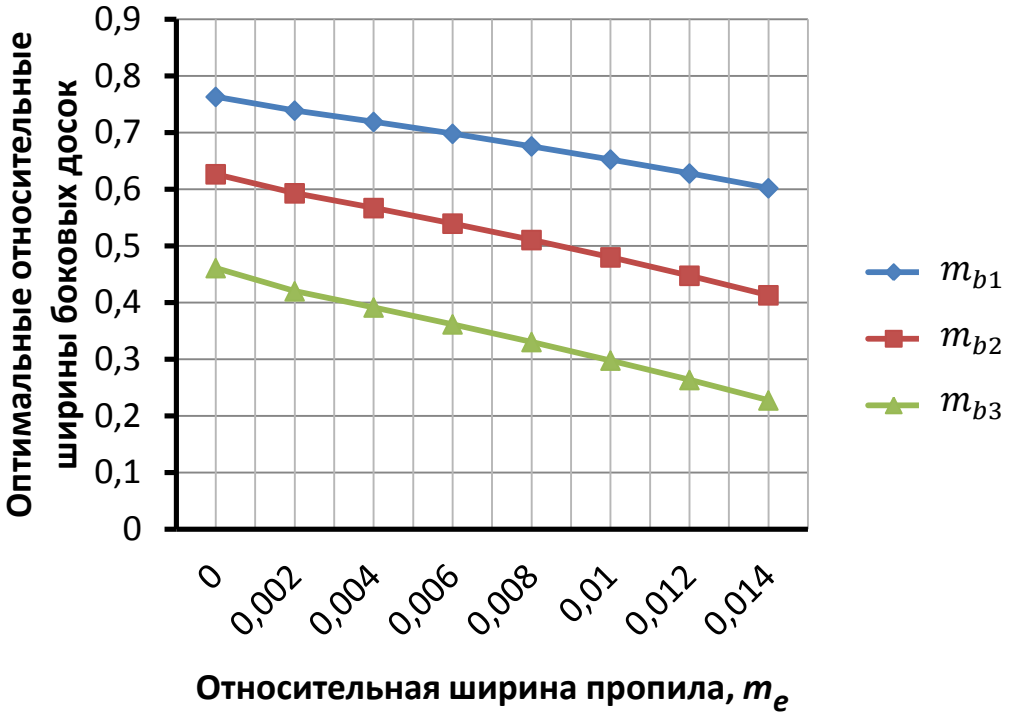


Рис. 1.40. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

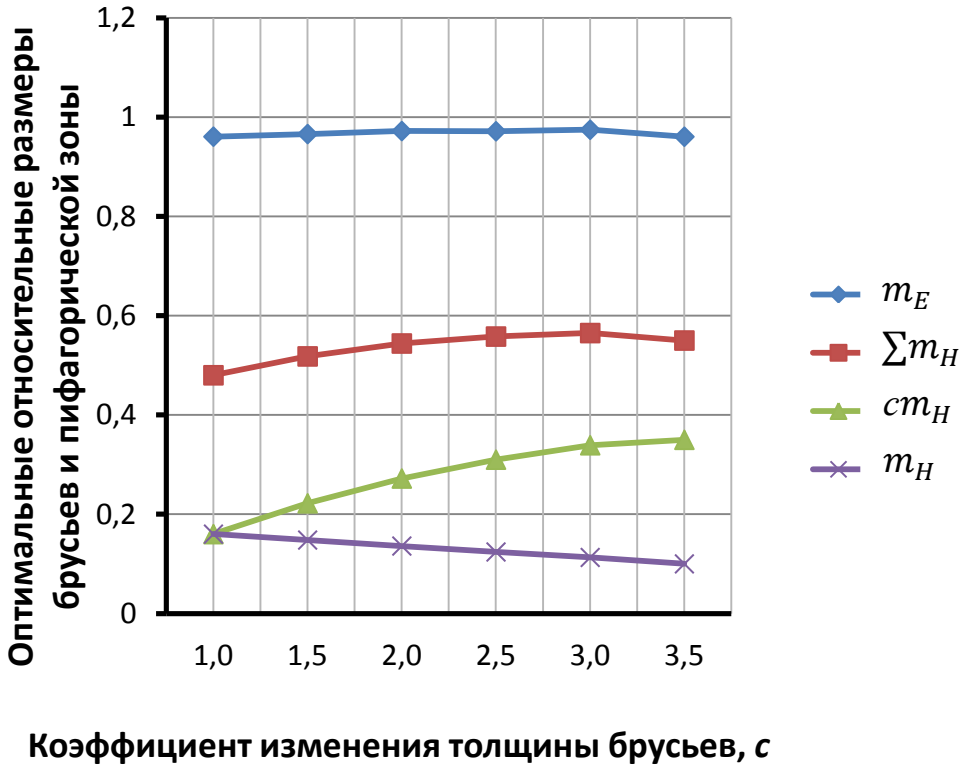


Рис. 1.41. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные m_E, $\sum m_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, незначительно уменьшается. При этом оптимальный относительный объем боковых обрезных досок уменьшается с замедлением, а оптимальный относительный объем брусьев возрастает до c = 2,5, а затем практически сохраняется. В итоге оптимальный относительный объем получаемых пиломатериалов незначительно увеличивается (рис. 1.42).

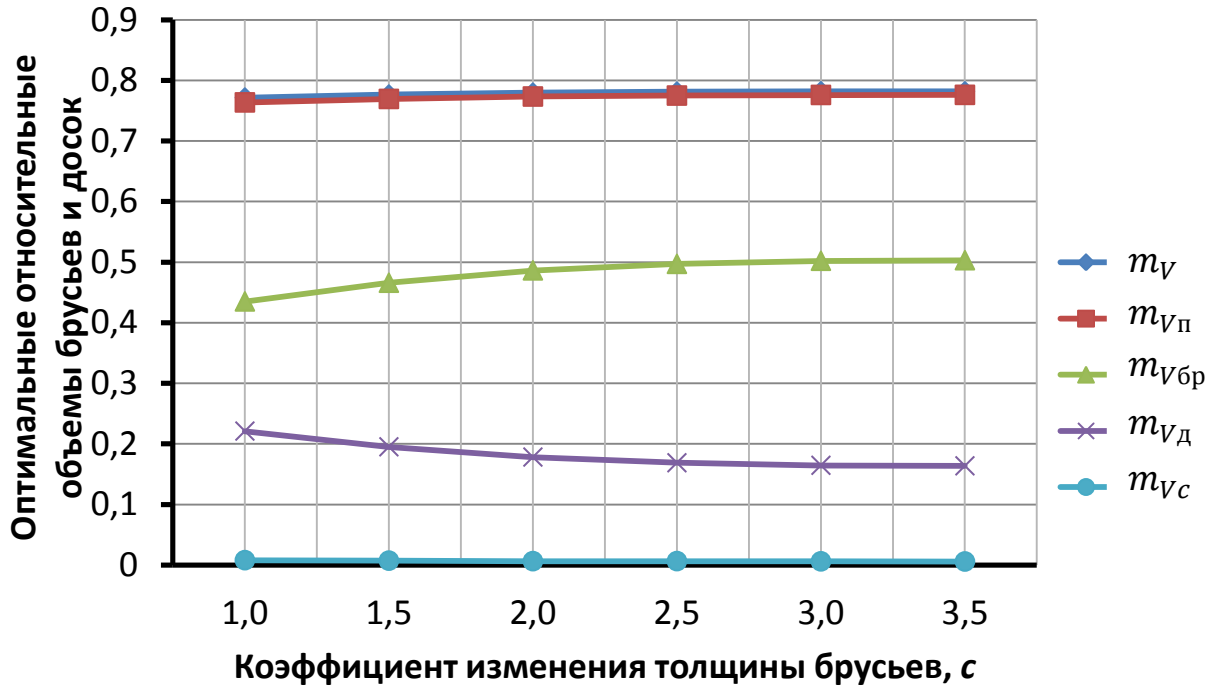


Рис. 1.42. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны m_{Tc}, незначительно уменьшается (см. рис. 1.43). Особенно относительная оптимальная длина доски m_{lc} уменьшается на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 1,0…2,0. Далее оптимальная относительная длина доски из сбеговой зоны составляет 0,5 от длины бревна. При этом оптимальная относительная ширина и оптимальная относительная толщина этой доски уменьшается незначительно.

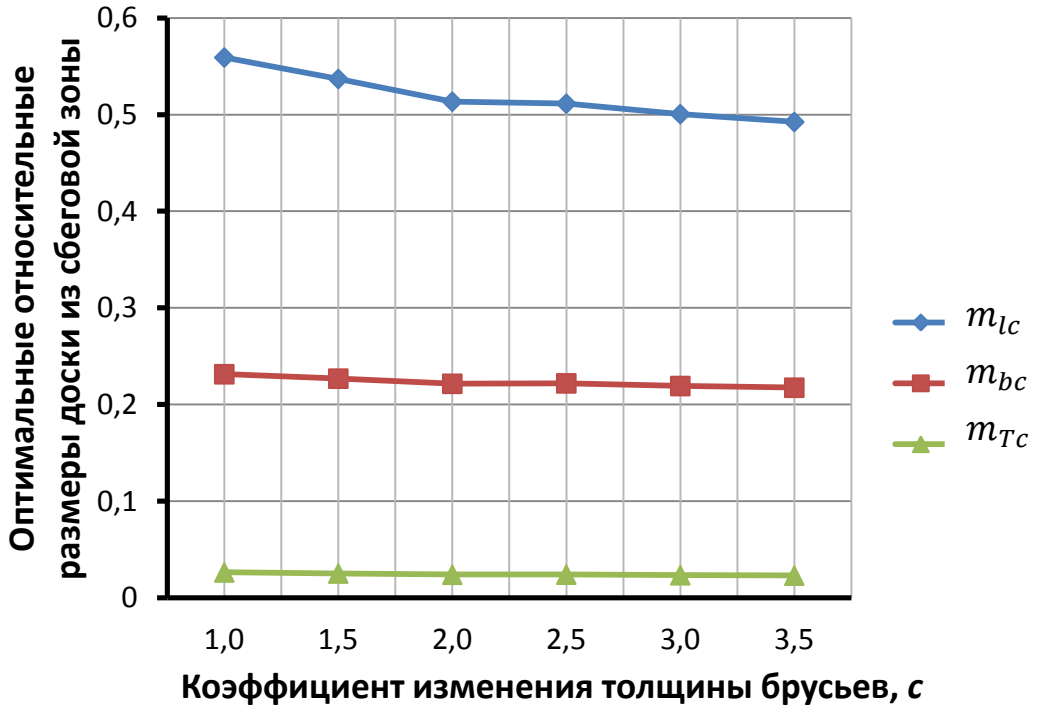


Рис. 1.43. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением по экспоненте. Причем уменьшение относительных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5…3,5 практически происходит незначительно (см. рис. 1.44).

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением до c = 2,0. При этом уменьшение относительных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,0…3,5 происходит незначительно (см. рис. 1.45).

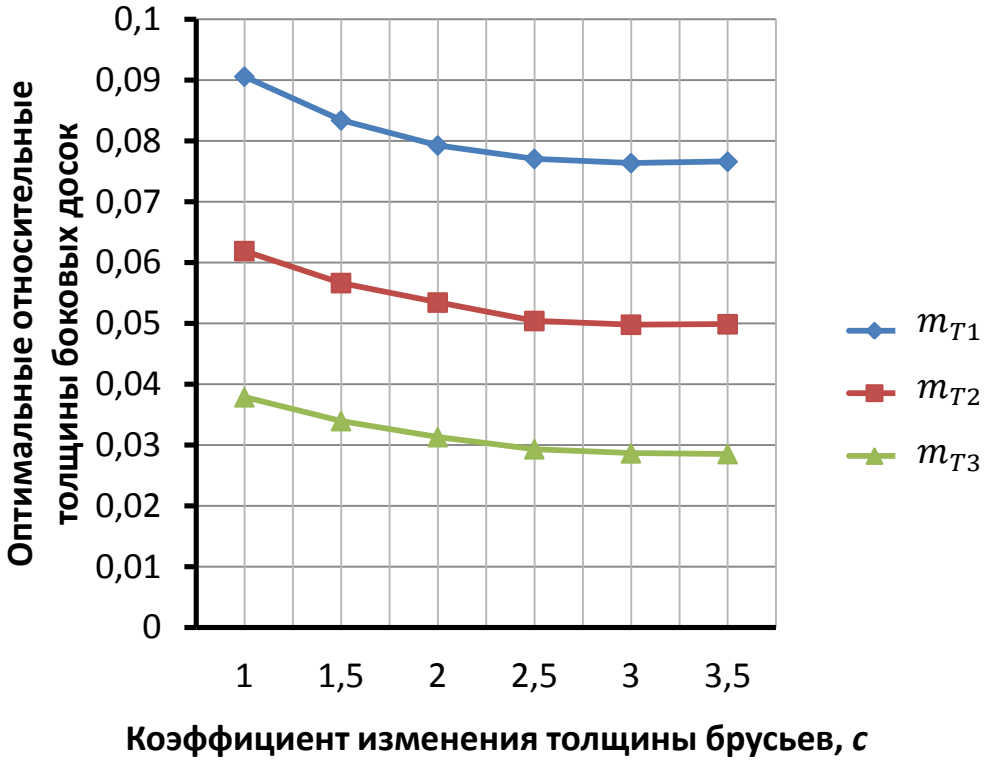


Рис. 1.44. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

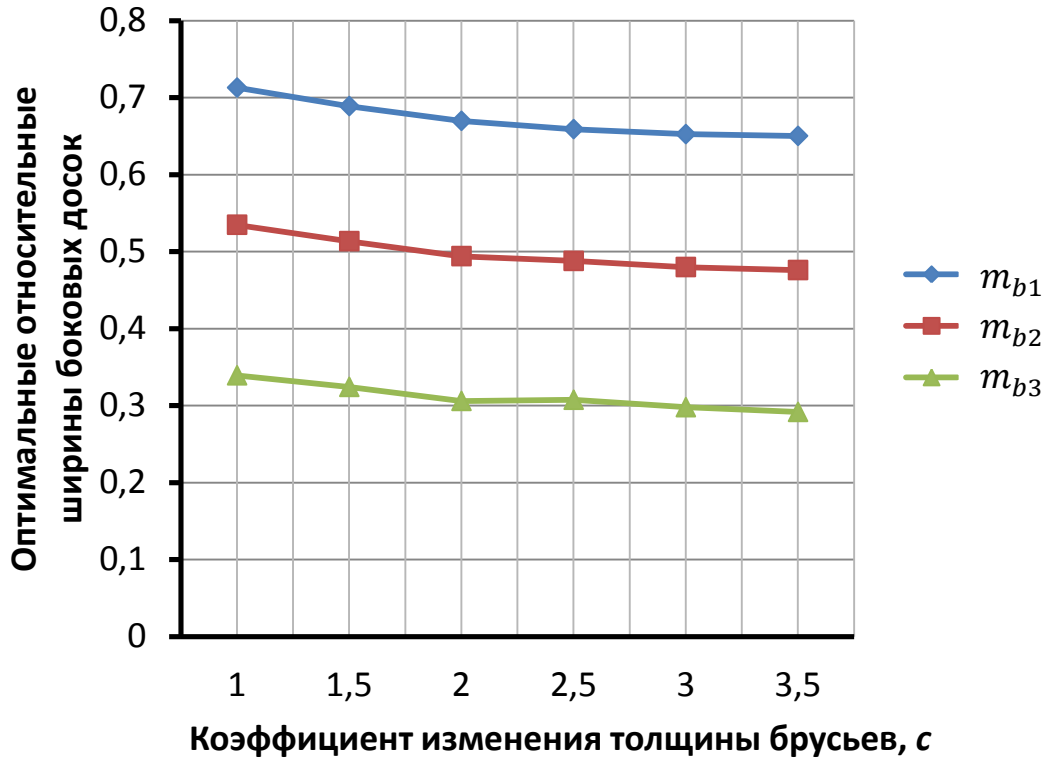


Рис. 1.45. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

Такие же сложные закономерности изменения размеров досок и брусьев наблюдаются и при длине пиловочника l = 6 м (см. рис. 1.46, 1.47 и 1.48). С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c относительная толщина бокового бруса m_H уменьшается, а сумма оптимальных относительных толщин брусьев $\sum m_H$ возрастает до c = 2,5, а затем с ростом коэффициента c увеличивается незначительно. Пифагорическая зона при этом возрастает незначительно.

Сравнивая между собой рис. 1.41 и 1.45, следует отметить, что оптимальная величина пифагорической зоны при длине пиловочника l = 3,0 м при увеличении коэффициента изменения толщины брусьев изменяется в меньшем диапазоне, чем при длине пиловочника l = 6,0 м.

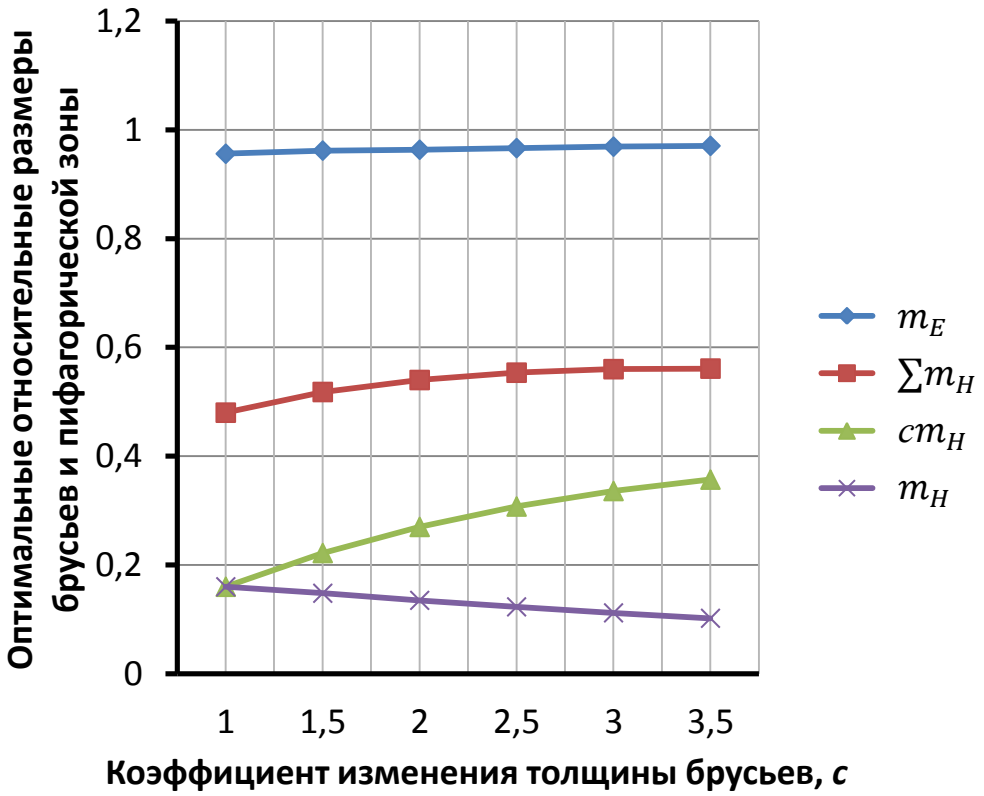


Рис. 1.46. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные m_E, $\sum m_H$, m_H при относительной ширине пропила m_e = 0,01и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м относительный объем обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}, незначительно изменяется. Это объясняется тем, что величина пифагорической зоны m_{E} возрастает незначительно. При этом относительный объем боковых досок $m_{V\text{д}}$ уменьшается, а относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает до c = 2,5, а затем практи-

чески сохраняется. В итоге суммарный относительный объем пиломатериалов изменяется незначительно и составляет 70% от объема бревна (рис. 1.47).

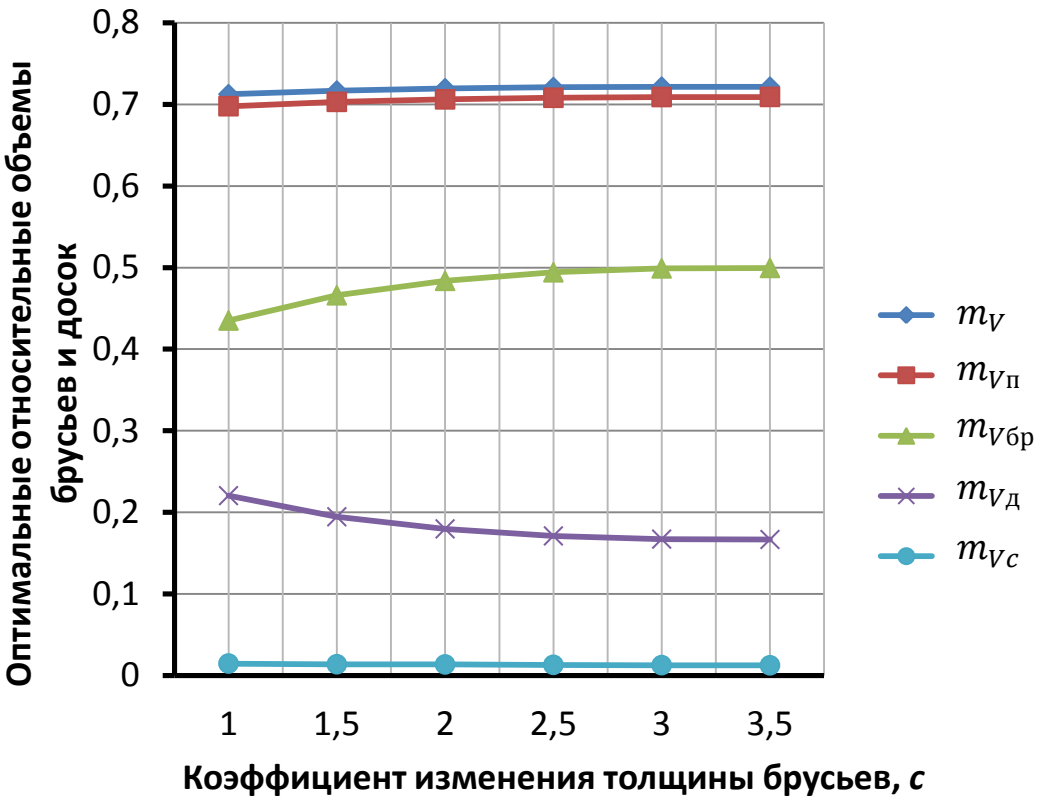


Рис. 1.47. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая между собой рис. 1.42 и 1.47, можно отметить следующее. Оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ при длине пиловочника l = 6,0 м немного меньше, чем при длине пиловочника l = 3,0 м, а суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов m_V при длине пиловочника l = 3,0 м больше, чем при длине пиловочника l = 6,0 м.

Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м представлено на рис. 1.48. С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальные относительные длина, ширина и толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, уменьшаются незначительно.

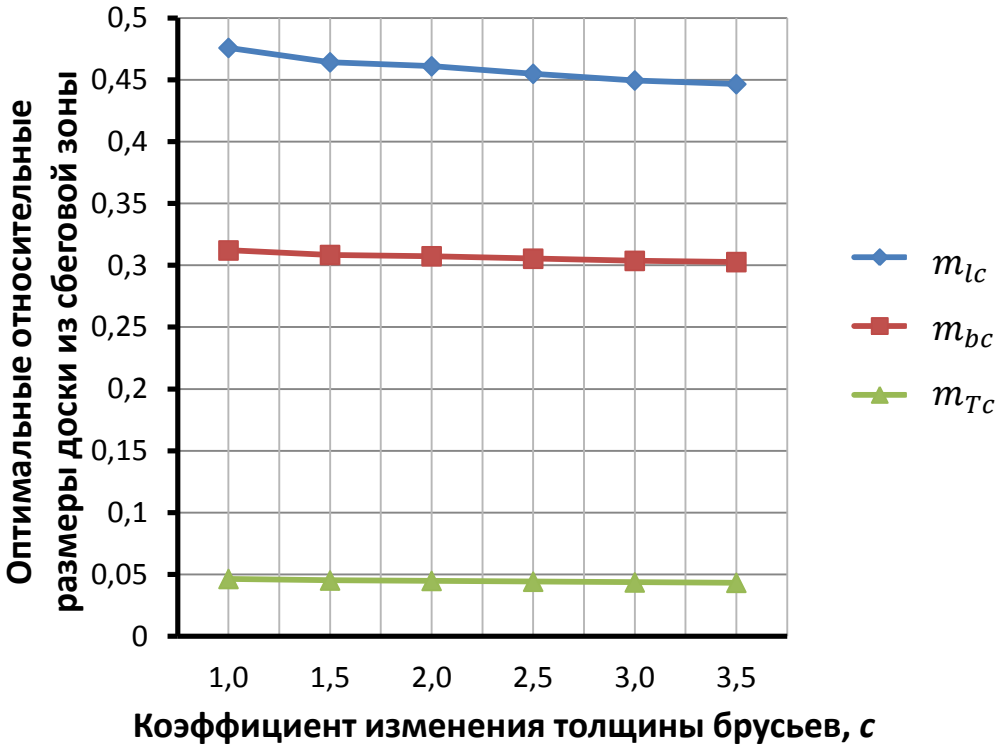


Рис. 1.48. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая графики на рис. 1.43 и 1.48, следует обратить внимание, что оптимальные относительные размеры досок, получаемые из сбеговой зоны, отличаются между собой. Оптимальная относительная ширина доски в сбеговой зоне при длине пиловочника l = 3,0 м равна m_{lc} = 0,22, тогда как оптимальная относительная длина этой доски при l = 6,0 м равна m_{lc} = 0,30.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются. Причем уменьшение относительных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5…3,5 практически не происходит (см. рис. 1.49).

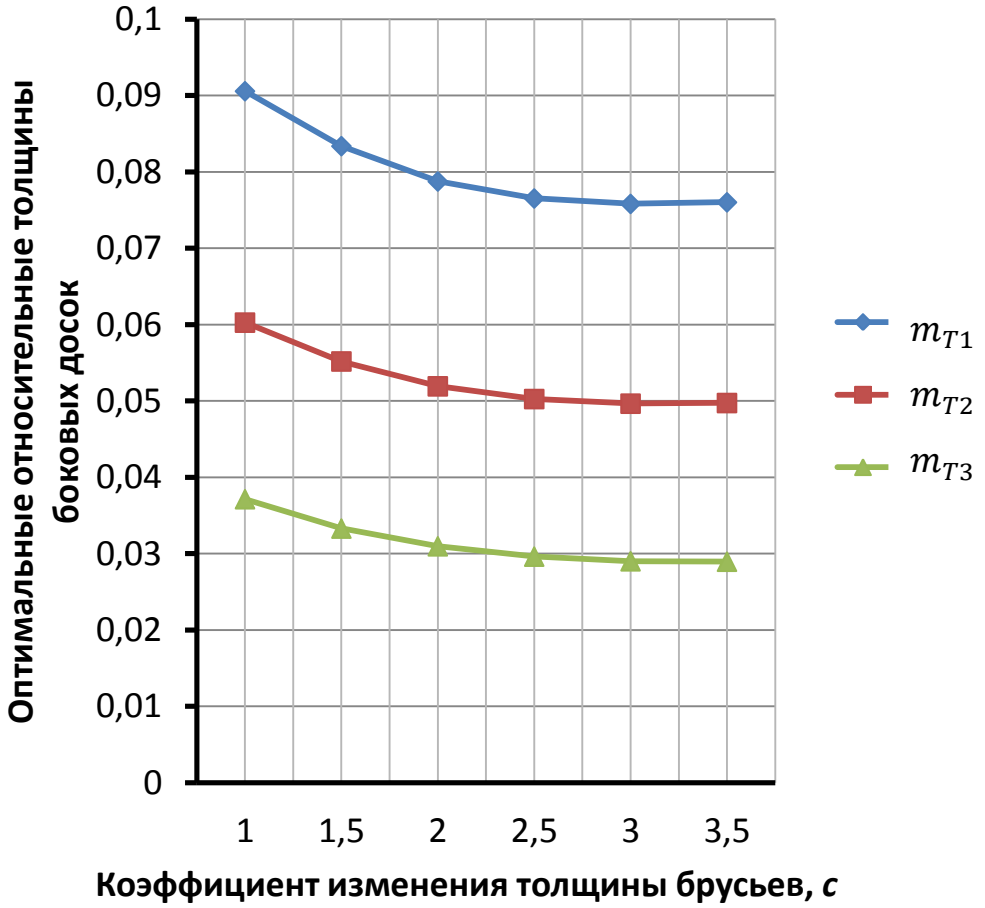


Рис. 1.49. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются. При этом уменьшение относительных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев в пределах c = 2,5…3,5 практически происходит незначительно (см. рис. 1.50).

С увеличением длины пиловочника относительная толщина брусьев и размер пифагорической зоны изменяются (уменьшаются) незначительно (см. рис. 1.51 и 1.52). На рис. 1.51 представлены результаты при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0.

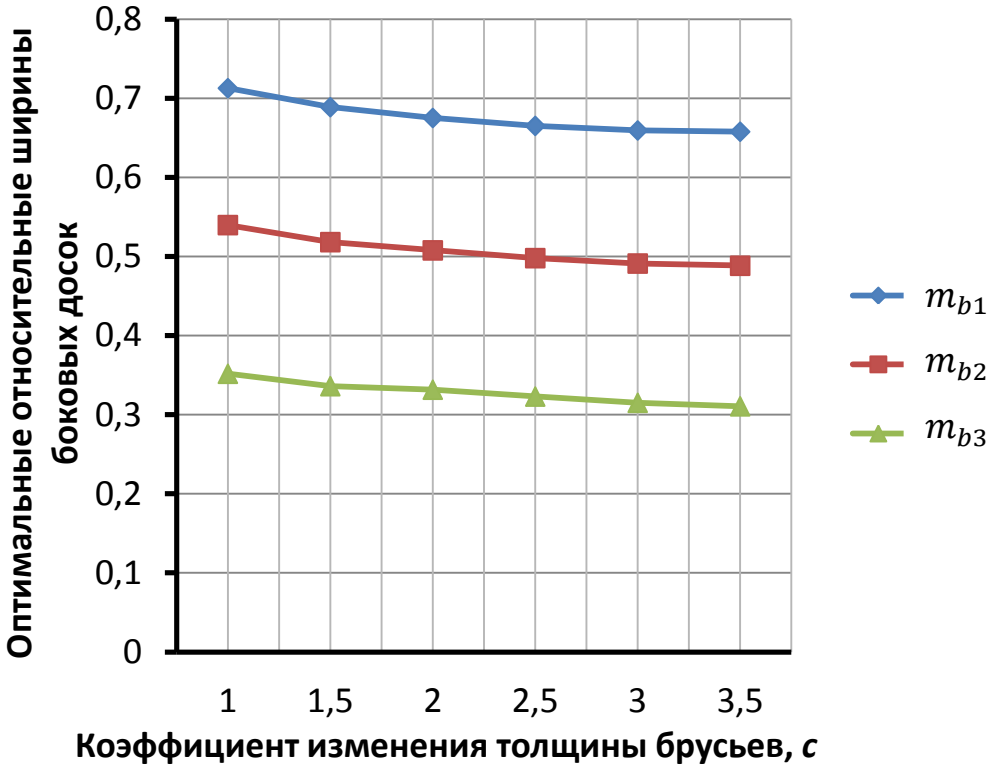


Рис. 1.50. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

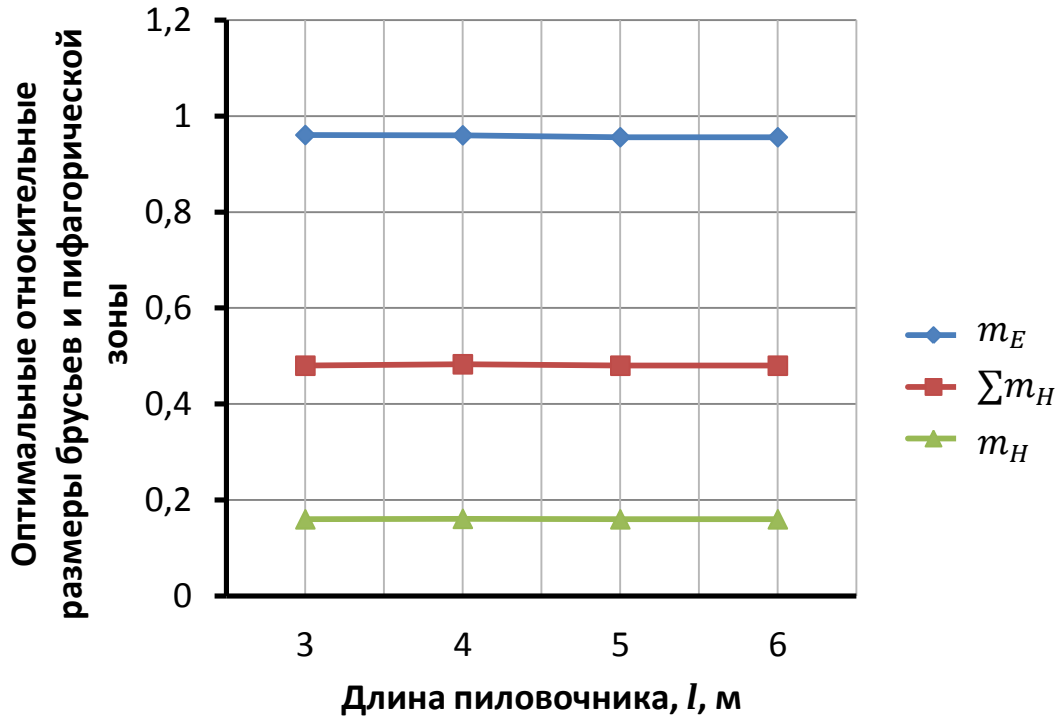


Рис. 1.51. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H$, $m_{\text{Н}}$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0.

С увеличением длины пиловочника при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальная относительная толщина бокового бруса m_H незначительно уменьшается. В связи с этим уменьшается и оптимальная относительная толщина центрального бруса (cm_H).

На рис. 1.52 представлены результаты расчетов при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0. При этом следует отметить, что соотношения $\sum m_H$ и m_H отличаются между собой незначительно.

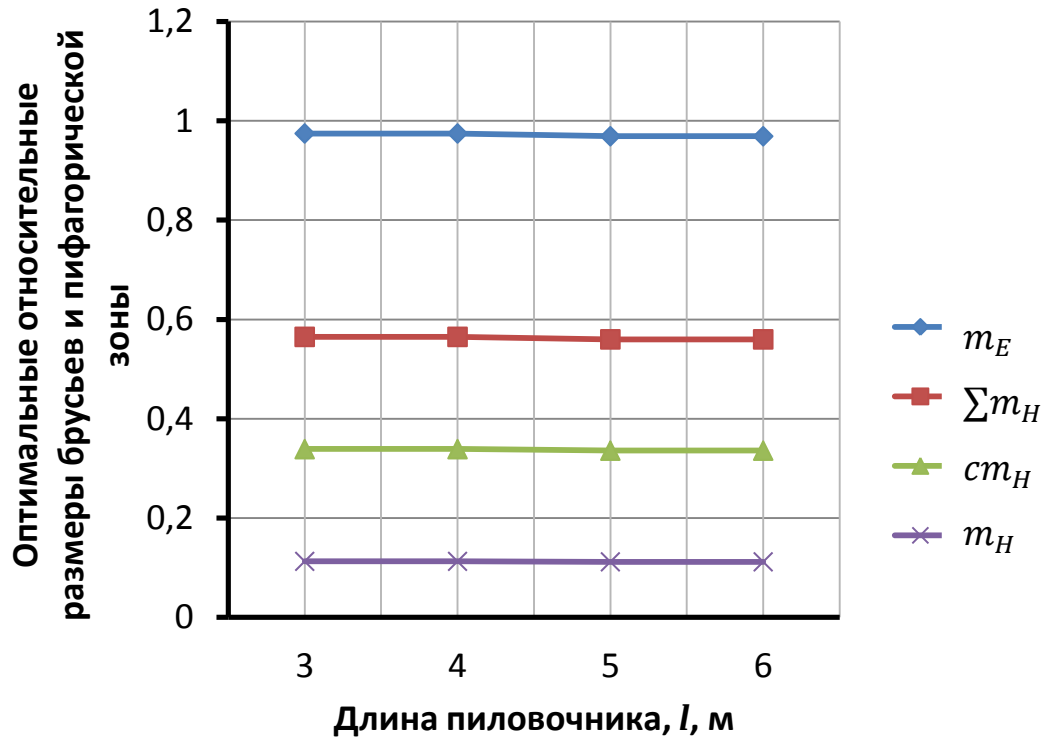


Рис. 1.52. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H$, m_H при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0

Пифагорическая зона с увеличением длины пиловочника незначительно уменьшается. С увеличением длины пиловочника оптимальная относительная толщина бокового бруса немного уменьшается. При этом оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H с увеличением длины пиловочника также незначительно уменьшается.

С увеличением длины пиловочника оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, возрастает. Объем досок, получаемых из пифагорической зоны, незначительно увеличивается, а оптимальный относительный объем брусьев незначительно уменьшает-

ся. При этом суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, уменьшается (рис. 1.53). Эти результаты представлены для относительной ширины пропила m_e = 0,01 и коэффициента изменения толщины брусьев c = 1,0.

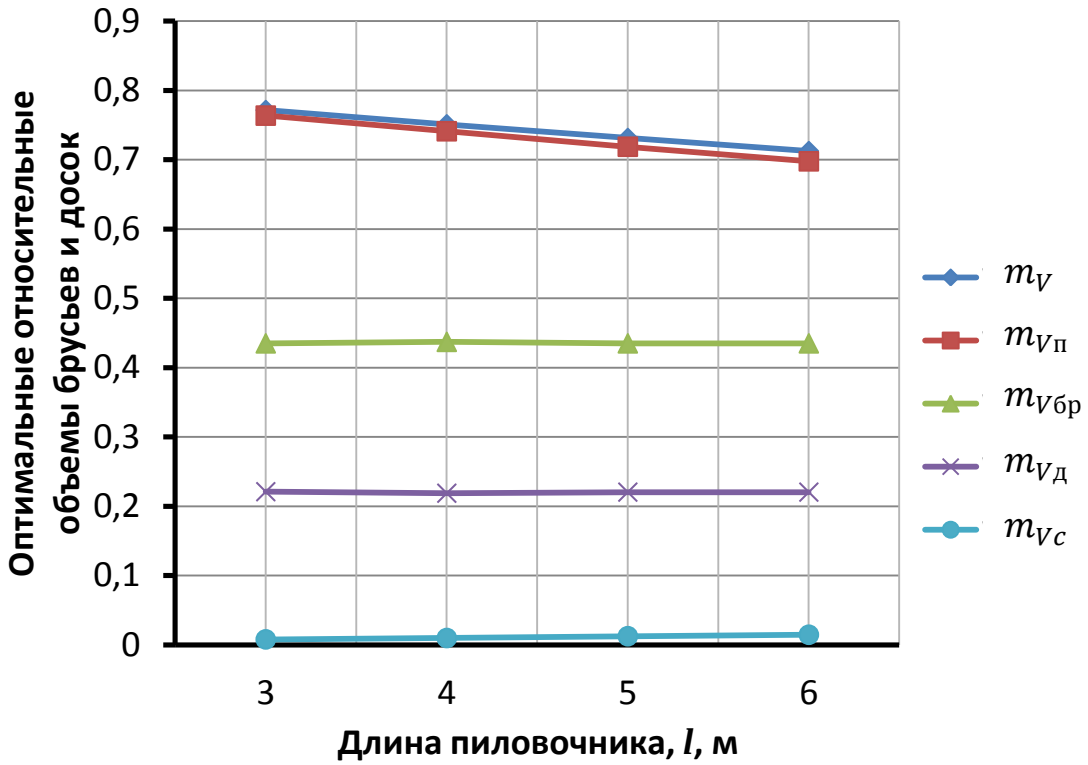


Рис. 1.53. Влияние длины бревна l на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 изменение оптимальных относительных объемов получаемых пиломатериалов представлено на рис. 1.54. Закономерности изменения этих показателей примерно одинаковы, как и на рис. 1.53, но их соотношение несколько другое. Так, на рис. 1.54 при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 суммарный относительный выход пиломатериала m_V больше, чем при c = 1,0. Следует также отметить, что общий относительный выход пиломатериалов из пифагорической зоны $m_{V\text{п}}$ при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Это очень важная закономерность.

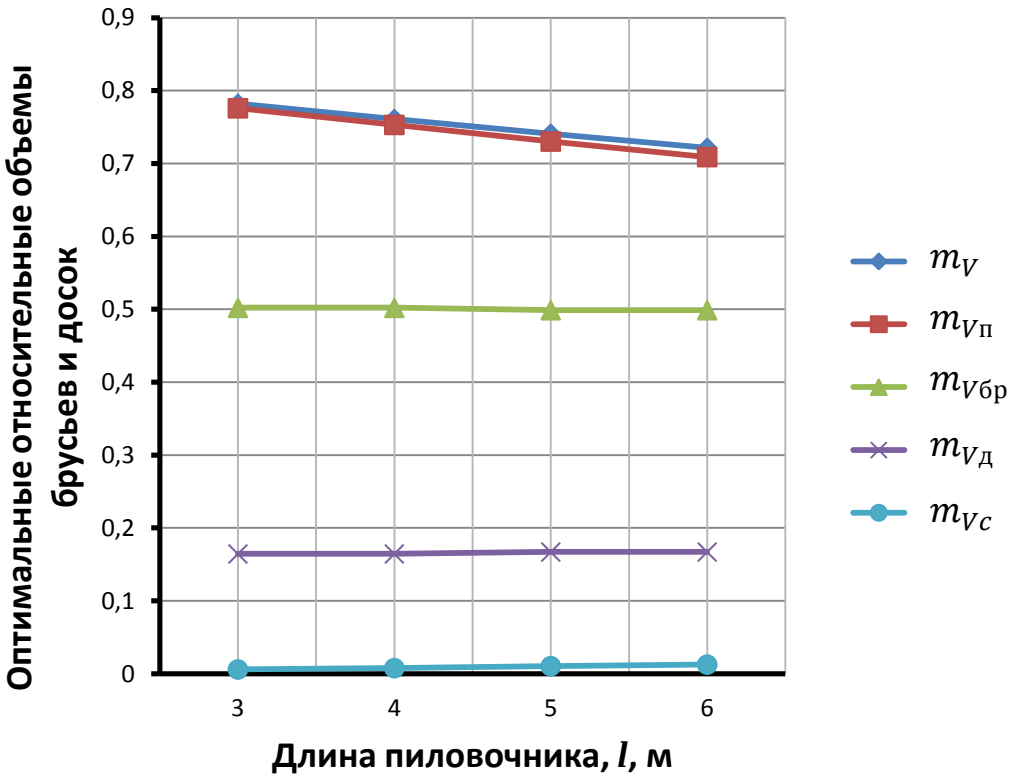


Рис. 1.54. Влияние длины бревна l на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0

С увеличением длины бревна относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастает, ее оптимальная относительная ширина также увеличивается, а оптимальная относительная длина уменьшается (см. рис. 1.55). Эти результаты получены при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0. Такая закономерность изменения оптимальных относительных размеров доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника, в зависимости от длины бревна получена впервые. Эта закономерность показывает сложный характер изменения размеров доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 относительная длина доски, получаемой из сбеговой зоны, не столь значительно уменьшается (см. рис. 1.56). При этом относительная толщина и относительная ширина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастают. Следует отметить, что при коэффициенте c = 3,0 относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, несколько меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

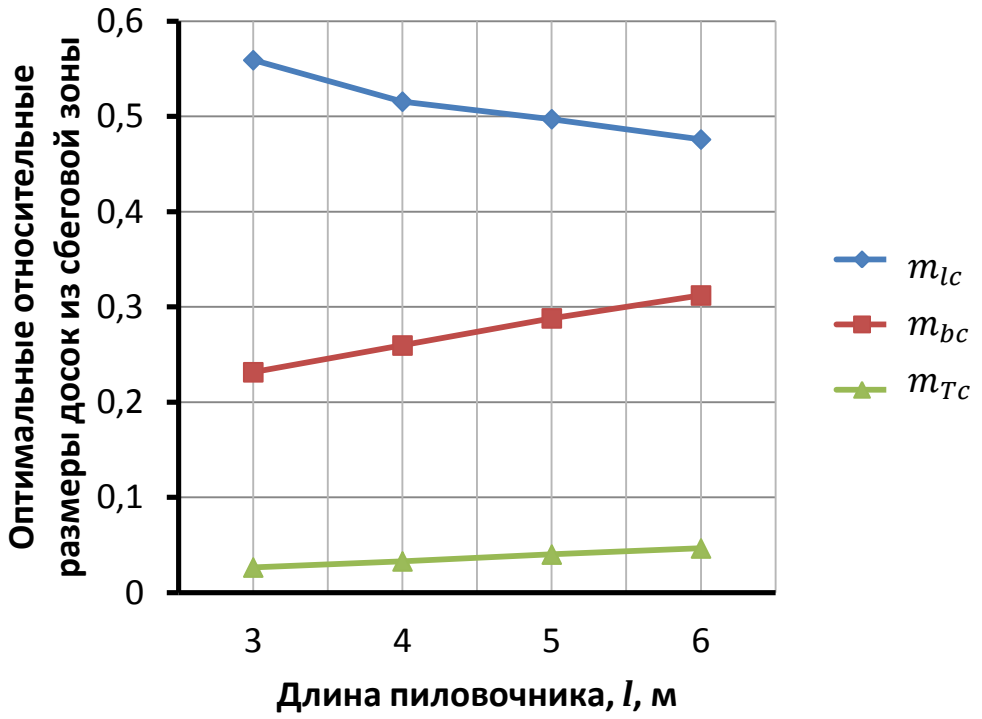


Рис. 1.55. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0

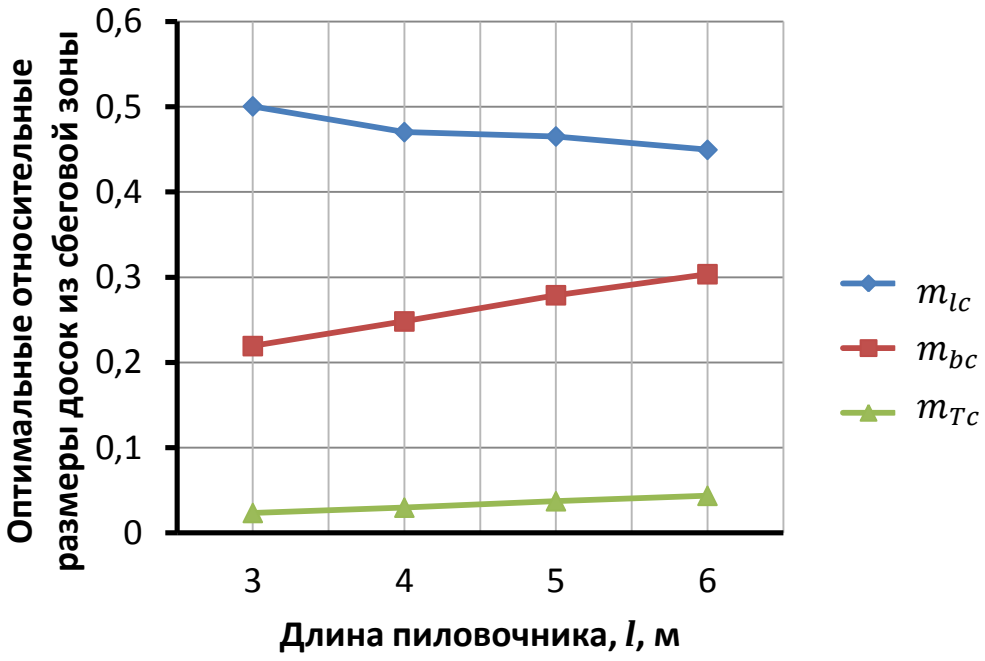


Рис. 1.56. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0

Сравнивая между собой рис. 1.55 и 1.56, можно отметить, что результаты между собой отличаются незначительно. Это объясняется тем, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 мало отличается от варианта, когда коэффициент изменения толщины брусьев c = 3,0.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (рис. 1.57).

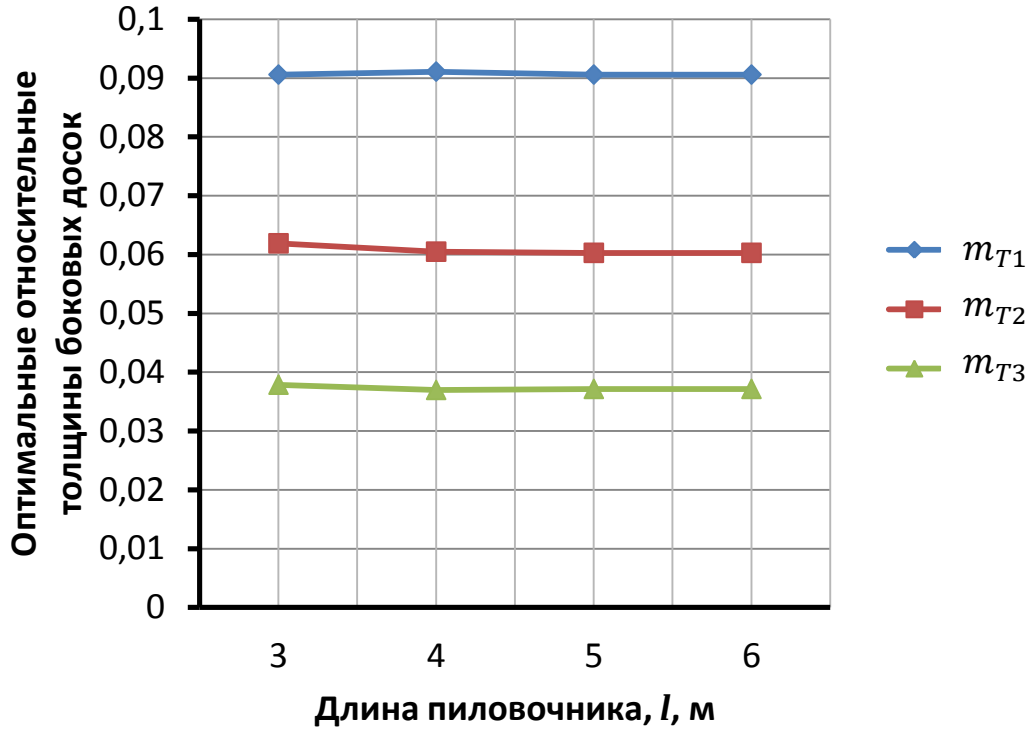


Рис. 1.57. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные толщины боковых досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок увеличиваются (см. рис. 1.58), хотя и не столь значительно.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 1.59).

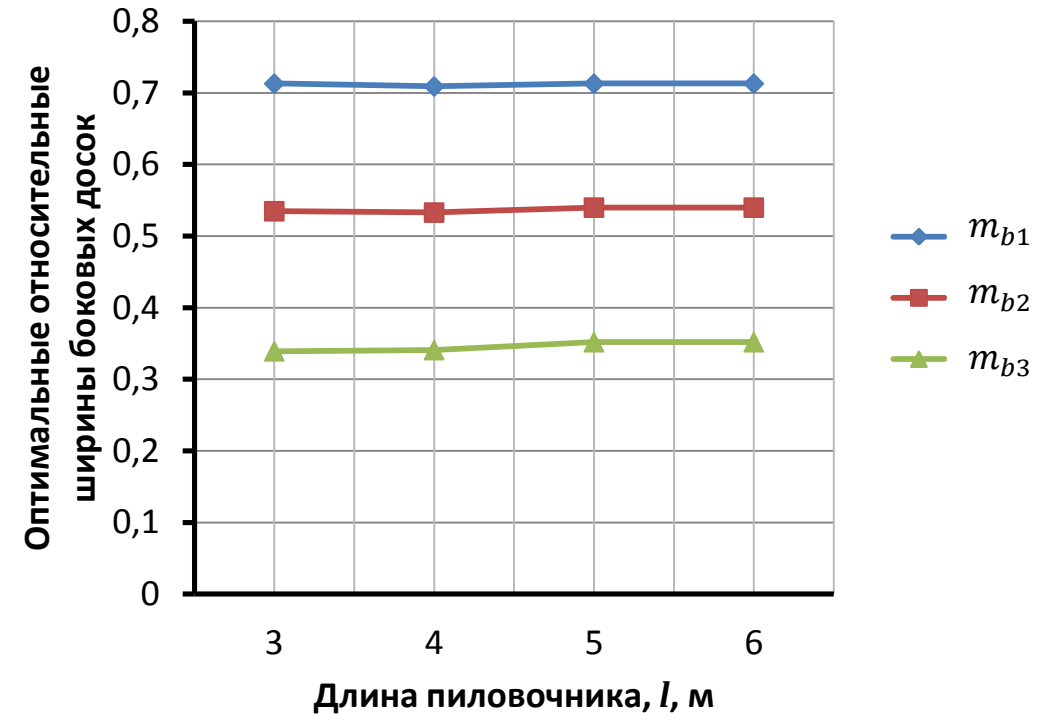


Рис. 1.58. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные ширины боковых досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0

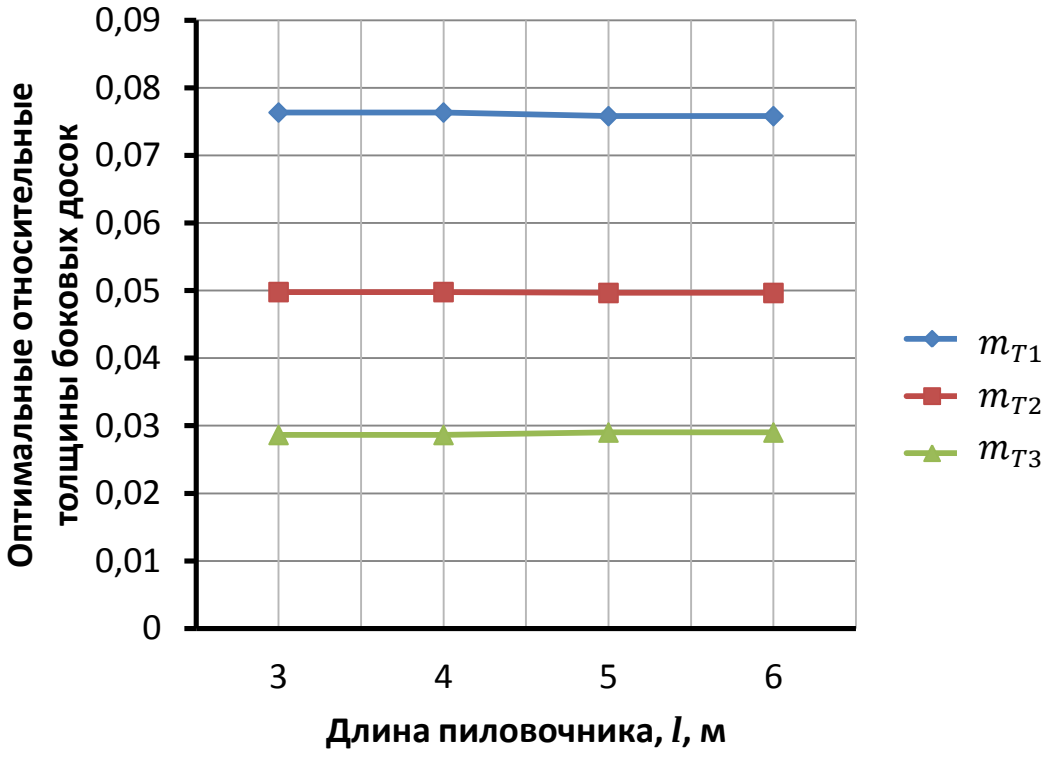


Рис. 1.59. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные толщины боковых досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок увеличиваются, но не столь значительно, хотя ширина крайней обрезной доски в этом случае увеличивается в большей степени (рис. 1.60).

Сравнивая между собой рис. 1.57 и 1.59, необходимо отметить, что относительные размеры толщин боковых обрезных досок при c = 1,0 немного больше, чем при c = 3,0. Это объясняется тем, что доля брусьев в пифагорической зоне пиловочника при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

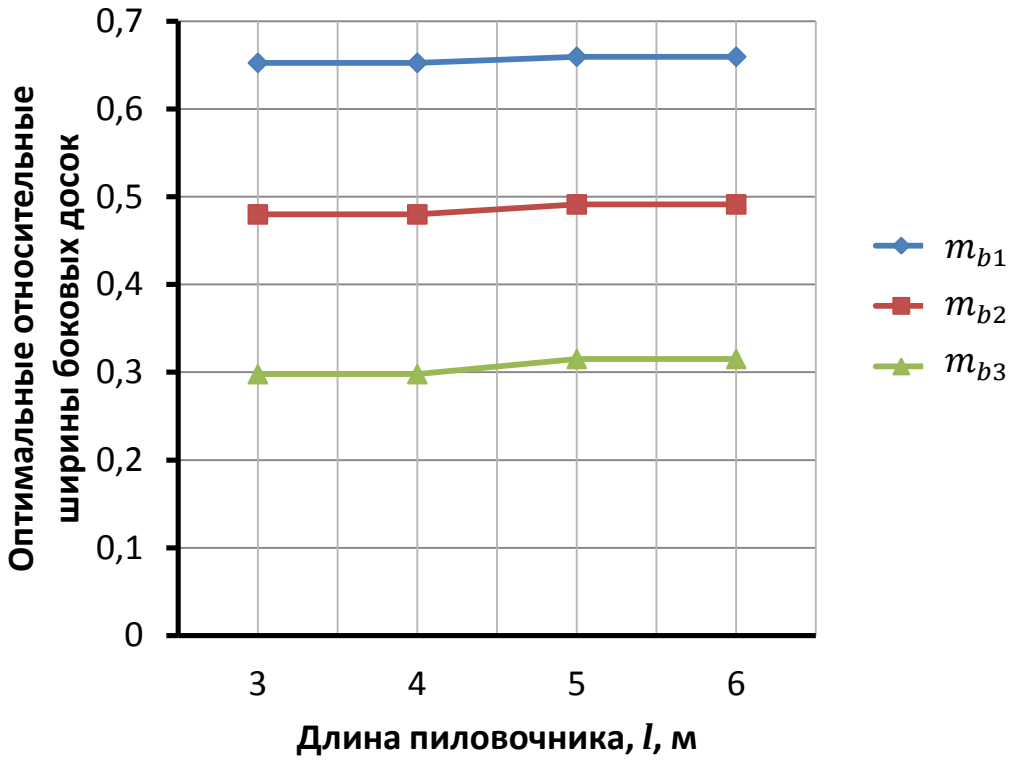


Рис. 1.60. Влияние длины пиловочника l
на оптимальные относительные ширины боковых досок
при m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0

Сравнивая между собой рис. 1.58 и 1.60, необходимо обратить внимание, что относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 1,0 по величине немного больше, чем при коэффициенте c = 3,0, хотя характер изменения этих размеров практически совпадает. Это связано с тем, что суммарная толщина брусьев при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

1.7. Основные выводы по главе

1. При раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины [58] и трех пар боковых обрезных досок оказалось, что оптимальная относительная толщина бруса равна 0,157. При этой относительной толщине бруса целевая функция (выход пиломатериалов) принимает максимальное (оптимальное) значение. Сумма всех трех относительных толщин брусьев в этом случае составляет 0,471 от диаметра пиловочника в вершинном торце [35, 36]. Пифагорическая зона в этом варианте раскроя пиловочника равна 0,945 от диаметра пиловочника в вершинном торце [73].

2. При постановке и составлении математической модели задачи оптимизации для такой схемы раскроя пиловочника выдвигалась гипотеза, что с увеличением толщины брусьев площади их поперечного сечения возрастают, а размеры боковых обрезных досок и, следовательно, площади их поперечного сечения, уменьшаются и наоборот. Тогда можно предположить, что очевидно, с определенной степенью вероятности, имеется такое сочетание размеров брусьев и досок, при котором целевая функция в виде суммы поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок принимает максимальное (оптимальное) значение [73]. Исследования показали, что принятая гипотеза при постановке и решении задачи оптимизации в таком варианте подтверждается. Действительно, с увеличением толщины брусьев площади поперечного сечения брусьев возрастают, а размеры боковых обрезных досок и их площади поперечного сечения уменьшаются. Но имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение. Для такой схемы раскроя пиловочника оказалось, что целевая функция принимает максимальное значение в том случае, когда относительная толщина бруса составляет 0,157 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Это основной важный вывод при раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и трех пар боковых обрезных досок.

3. При раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и с учетом ширины пропила оказалось, что с увеличением ширины пропила оптимальные относительные толщины брусьев возрастают, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок уменьшаются [54], причем относительные размеры крайней пары боковых обрезных досок уменьшаются в большей степени, чем цен-

тральные боковые доски. Таким образом, установлена сложная зависимость влияния относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок [31].

4. При увеличении толщины центрального бруса по отношению к толщине бокового бруса оптимальное соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок изменяется. Максимальное значение целевая функция принимает при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0. В этом случае площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается по сравнению с вариантом, когда выпиливаются три бруса одинаковой толщины. Сумма относительных толщин всех трех брусьев при c = 3,0 составляет 0,535 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Пифагорическая зона в этом случае равна 0,951 от диаметра бревна в вершинном торце. Таким образом, оказалось, что в этом варианте раскроя пиловочника пифагорическая зона даже немного увеличилась по сравнению с вариантом, когда выпиливаются три одинаковых по толщине бруса и выход пиломатериалов возрастает. Относительная толщина боковых брусьев в сумме оказывается меньше относительной толщины центрального бруса в 1,5 раза.

5. При условии выпиливания брусьев разной толщины оказалось, что с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. При этом суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается [73]. Исследования показали, что с увеличением относительной ширины пропила размеры брусьев и боковых обрезных досок существенно изменяются, но при этом коэффициент изменения толщины центрального бруса относительно толщины бокового бруса сохраняется прежним и равен c = 3,0.

6. При последующей распиловке брусьев на обрезные доски оказалось, что с увеличением коэффициента изменения толщины центрального бруса относительно бокового бруса c оптимальные относительные площади поперечных сечений получаемых пиломатериалов из центрального бруса возрастают, а из боковых брусьев уменьшаются [96]. В итоге суммарная площадь поперечного сечения получаемых досок из брусьев с увеличением коэффициента c возрастает до c = 2,5, а затем незначительно уменьшается. Относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок с увеличением коэффициента c вначале уменьшается до c = 2,5, а затем незначительно возрастает.

7. При раскрое пиловочника с учетом сбеговой зоны оказалось, что с увеличением длины пиловочника относительный объем получаемых брусьев и боковых обрезных досок уменьшается [92]. При увеличении длины пиловочника относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, изменяются противоречиво: относительные толщина и ширина доски увеличиваются, а ее относительная длина уменьшается [94, 95].

8. Таким образом, решена задача оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и трех пар боковых обрезных досок. Исследования показали, что оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок зависят не только от размеров пиловочника, но и от технологических факторов.

9. В данной работе постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев осуществлялась классическим методом. В результате определена оптимальная взаимосвязь размеров брусьев и боковых обрезных досок, при которой целевая функция принимает максимальное значение. На практике приходиться решать частные более конкретные задачи. Так, например, требуется найти наилучший вариант раскроя пиловочника определенных размеров с получением наилучшего (оптимального) выхода пиломатериалов различных (стандартных) размеров. Возможен и другой вариант постановки и решения задачи оптимизации раскроя пиловочника, в которой ставится задача определить размеры и необходимое количество пиловочника для выполнения заказа пиломатериалов определенного количества и требуемых размеров и качества.

2. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ЧЕТЫРЕХ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК

2.1. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины

Постановка задачи. При раскрое пиловочника крупных размеров (диаметром 60…100 см) брусово-развальным способом целесообразно рассмотреть вариант, когда выпиливают три одинаковых по толщине бруса, а из боковой части бревна получают еще четыре пары боковых обрезных досок (рис. 2.1) [38].

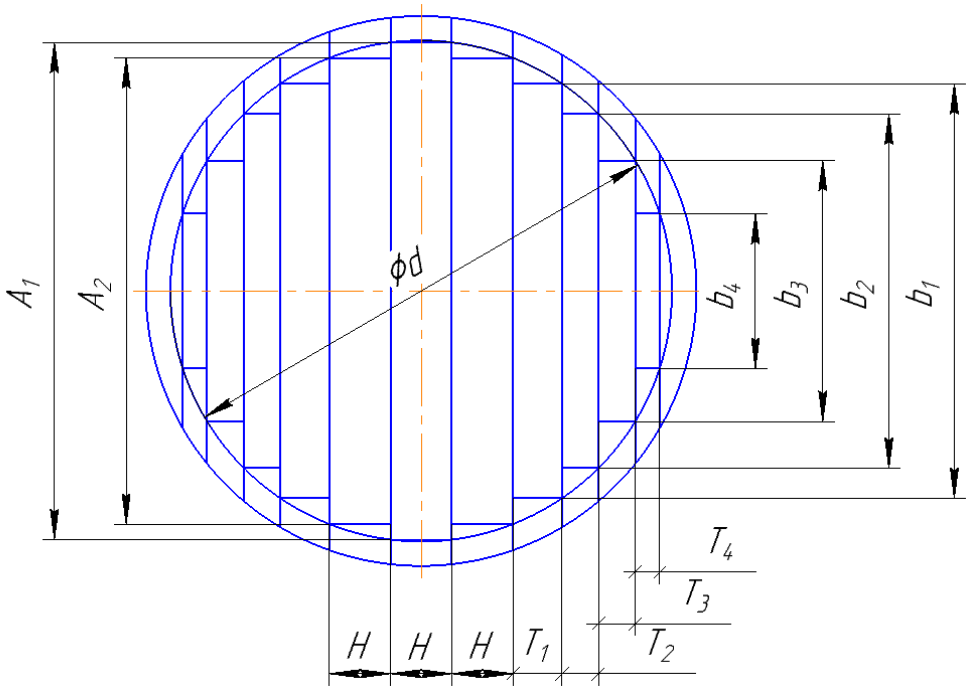


Рис. 2.1. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых обрезных досок

Такой вариант раскроя пиловочника широко используется в промышленности при распиловке пиловочника диаметром 60 см и более. Однако для данной схемы раскроя пиловочника рекомендуемых оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок до сих пор не имеется [98, 101]. Вначале рассматривается вариант раскроя пиловочника данной схемы распиловки без учета ширины пропила [58]. При этом придерживаемся общепринятой методики постановки и решения задач оптимизации раскроя пиловочника, использованной ранее в предыдущих работах и главах монографии.

Составление математической модели. Важно знать оптимальные размеры брусьев и досок, получаемые при первом проходе бру-

сово-развального способа раскроя пиловочника. В качестве критерия оптимальности выбираем объемный выход четырехкантных брусьев и боковых обрезных досок [58]. При раскрое пиловочника рассматриваем пифагорическую зону, в которой, согласно теории максимальных поставов, длина получаемых досок равна длине бревна. Тогда, в соответствии с теорией максимальных поставов, целевую функцию можно записать в виде суммы площадей поперечных сечений трех брусьев и четырех пар боковых обрезных досок [58]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4. \quad (2.1)$$

Такое написание математической модели базируется на предположении (гипотезе), что с увеличением толщины брусьев площади их поперечных сечений возрастают (при определенных условиях), а размеры боковых досок и, следовательно, площади поперечных сечений этих досок уменьшаются, и наоборот. На основании этого можно предположить с определенной вероятностью, что имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором суммарная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок принимает максимальное значение [81]. Такое соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок можно считать оптимальным [58].

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и боковых обрезных досок можно представить следующими уравнениями [58].

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0, \quad (2.2)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - 9H^2 - A_2^2 = 0. \quad (2.3)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (3H + 2T_1)^2 = 0. \quad (2.4)$$

Раскрывая скобки в уравнении связи (2.4), получаем:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2 = 0. \quad (2.4')$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2)^2 = 0. \quad (2.5)$$

Раскрывая скобки в уравнении связи (2.5), получаем:

$$d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1\ T_2 = 0. \qquad (2.5')$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 = 0. \qquad (2.6)$$

Раскрывая скобки в уравнении связи (2.6), получаем:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 12HT_3 - 8T_1\ T_2 - 8T_1\ T_3 - 8T_2\ T_3 = 0. \end{gathered} \qquad (2.6')$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 = 0. \qquad (2.7)$$

Раскрывая скобки в уравнении связи (2.7), получаем:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 8T_1\ T_2 - \\ -8T_1\ T_3 - 8T_1\ T_4 - 8T_2\ T_3 - 8T_2\ T_4 - 8T_3\ T_4 = 0. \end{gathered} \qquad (2.7')$$

Полагаем, что математическая модель составлена.

Решение математической модели. Для решения данной математической модели воспользуемся методом множителей Лагранжа [58]. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$\begin{gathered} L = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1\ b_1 + 2T_2\ b_2 + 2T_3\ b_3 + 2T_4\ b_4 + \\ +\lambda_1\left(d^2 - H^2 - A_1^2\right) + \lambda_2\left(d^2 - 9H^2 - A_2^2\right) + \\ +\lambda_3\left(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2\right) + \\ +\lambda_4\left(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1\ T_2\right) + \\ +\lambda_5\,(d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 8T_1\ T_2 - 8T_1\ T_3 - 8T_2\ T_3) + \\ +\lambda_6\,(d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - \\ -4T_4^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - \\ -8T_1\ T_2 - 8T_1\ T_3 - 8T_1\ T_4 - 8T_2\ T_3 - 8T_2\ T_4 - 8T_3\ T_4). \end{gathered} \qquad (2.8)$$

Для определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок, выпиливаемых из пифагорической зоны пиловочника находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю [58]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = H - 2\lambda_1 A_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 18\lambda_3 H - 12\lambda_3 T_1 - \\
-18\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 T_2 - \\
-18\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 - 18\lambda_6 H - \\
-12\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 12\lambda_3 H - 8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - \\
-8\lambda_4 T_2 - 8\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 H - \\
-8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 8\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - \\
-8\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_4} = 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 - 8\lambda_6 T_4 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 = 0.
\end{cases} \tag{2.9}
$$

Решаем полученную систему уравнений (2.9) совместно с уравнениями связи.

Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (2.9), из которого определяем множитель Лагранжа λ_6:

$$
T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \tag{2.10}
$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (2.9), которое представляем в виде равенства:

$$b_4 = 6\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_2 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4. \quad (2.11)$$

В равенство (2.11) подставим выражение (2.10), получим:

$$b_4^2 = 6HT_4 + 4T_1\ T_4 + 4T_2\ T_4 + 4T_3\ T_4 + 4T_4^2 = \\ = 2T_4\ (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4\ ). \quad (2.12)$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (2.9), из которого определяем множитель Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \quad (2.13)$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (2.9), которое можно представить в виде

$$b_3 = 4\lambda_5\ T_3 + 6\lambda_5\ H + 4\lambda_5\ T_1 + 4\lambda_5\ T_2 + b_4\ . \quad (2.14)$$

В равенство (2.14) подставляем выражение (2.13), получим:

$$b_3^2 = 4T_3^2 + 6HT_3 + 4T_1\ T_3 + 4T_2\ T_3 + b_3\ b_4\ . \quad (2.15)$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары обрезных досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(3H + 2T_3 + 2T_1 + 2T_2)}{b_3}. \quad (2.16)$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (2.9), из которого определяем множитель Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \quad (2.17)$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (2.9), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4\ T_1 + 4\lambda_4\ T_2 + 6\lambda_4\ H + b_3\ . \quad (2.18)$$

В последнее равенство (2.18) подставим выражение (2.17), получим:

$$b_2^2 = 4T_1\ T_2 + 4T_2^2 + 6HT_2 + b_2\ b_3\ . \quad (2.19)$$

Из равенства (2.19) можно выразить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2(3H + 2T_1 + 2T_2)}{b_2}. \quad (2.20)$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (2.9), из которого определяем множитель Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \quad (2.21)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (2.9), которое представляем в виде

$$b_1 = 6\lambda_3 H + 4\lambda_3 T_1 + b_2 . \quad (2.22)$$

В равенство (2.22) подставим выражение (2.21), получим:

$$b_1^2 = 6HT_1 + 4T_1^2 + b_1 b_2 . \quad (2.23)$$

Из равенства (2.23) можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1(3H + 2T_1)}{b_1}. \quad (2.24)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (2.9), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$H = 2\lambda_1 A_1 , \qquad \lambda_1 = \frac{H}{2A_1}. \quad (2.25)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (2.9), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$H = \lambda_2 A_2 , \qquad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}. \quad (2.26)$$

Из уравнения связи (2.2) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (2.27)$$

Используя равенство (2.27), множитель Лагранжа λ_1 можно определить по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{H}{2\sqrt{d^2 - H^2}}. \quad (2.28)$$

Из уравнения связи (2.3) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (2.29)$$

Используя равенство (2.29), выражение (2.26) можно представить в виде

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - 9H^2}}. \quad (2.30)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (2.9), которое представляем в следующем виде:

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 3b_1 . \quad (2.31)$$

В последнее равенство подставим выражения для множителей Лагранжа λ_1 *и* λ_2, получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + \frac{18H^2}{A_2} + 3b_1. \quad (2.32)$$

Из равенства (2.32) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{d^2 - H^2} + 2\sqrt{d^2 - 9H^2} - \left(\frac{H^2}{\sqrt{d^2 - H^2}} + 18\frac{H^2}{\sqrt{d^2 - 9H^2}}\right)\right). \quad (2.33)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, толщину первой пары этой обрезной доски можно определить из уравнения связи (2.4) по формуле:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \quad (2.34)$$

Аналогично, зная ширину боковой обрезной доски, её толщину можно определить из этого уравнения связи.

Толщина второй пары боковых обрезных досок определяется из соответствующего уравнения связи (2.5) по формуле:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \quad (2.35)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок определяется из уравнения связи (2.6) по формуле:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (2.36)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок [91] определяется из уравнения связи (2.7) по формуле:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (2.37)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (2.9) и учтены все уравнения связи. Получены формулы, в которых размеры брусьев и досок взаимосвязаны [91].

Алгоритм решения задачи оптимизации [91]. Анализируя эти формулы, можно сделать вывод, что определить непосредственно оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным. В связи с этим для определения оптимальных размеров брусьев и досок воспользуемся численным методом. Для упрощения решения данной задачи расчеты производятся в относительных единицах, полагаем $m_H = H/d$. Алгоритм решения задачи приводится ниже [58].

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (2.38)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - 9m_H^2}. \quad (2.39)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}\left(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H^2\left(\frac{1}{m_{A_1}} + \frac{18}{m_{A_2}}\right)\right). \quad (2.40)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - 3m_H\right). \quad (2.41)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}(3m_H + 2m_{T_1}). \quad (2.42)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1}\right)\right). \quad (2.43)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}). \quad (2.44)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}\right)\right). \quad (2.45)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}\right). \quad (2.46)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}\right)\right). \quad (2.47)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (2.48)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2(m_{T_1}m_{b_1} + m_{T_2}m_{b_2} + m_{T_3}m_{b_3} + m_{T_4}m_{b_4}). \quad (2.49)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (2.50)$$

Методика выполнения расчетов. Расчеты производятся в два этапа. Вначале задаемся толщиной бруса с градацией 0,01 в пределах 0,1…0,18 от диаметра бревна и определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции и находим её максимальное значение. Далее задаемся толщиной бруса с градацией (интервалом) 0,001 и определяем вокруг ранее полученного максимального значения целевой функции все размеры брусьев и досок, а также все величины целевой функции. На основании расчетов находим максималь-

ное значение целевой функции, которое и принимаем за оптимальное решение задачи [58]. Результаты расчетов сводятся в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величина целевой функции при заданной толщине бруса

m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
0,10	0,9949	0,9539	0,90014	0,0665	0,8375	0,0567
0,11	0,9939	0,9439	0,8797	0,0728	0,8009	0,0616
0,12	0,9927	0,9329	0,8554	0,0789	0,7598	0,0661
0,13	0,9915	0,9208	0,8285	0,0849	0,7138	0,0702
0,14	**0,9901**	**0,9075**	**0,7988**	**0,0907**	**0,6622**	**0,0739**
0,15	0,9887	0,893	0,7661	0,0963	0,6045	0,0769
0,16	0.9871	0.877	0.730	0,101	0.5399	0,0792
0,17	0.9854	0.8601	0.6905	0,1066	0.4672	0,0804
0,18	0.9836	0.8416	0.6470	0,1112	0.3849	0,0802

Окончание табл. 2.1

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,7634	0,0497	0,6793	0,0439	0,2903	0,3506	0,6409
0,7089	0,0533	0,6028	0,0462	0,317	0,358	0,675
0,6467	0,0563	0,5139	0,0475	0,343	0,3572	0,7002
0,5759	0,0585	0,4097	0,0473	0,3683	0,3473	0,7156
0,495	**0,0598**	**0,2851**	**0,0448**	**0,3927**	**0,3276**	**0,7203**
0,4017	0,0596	0,1301	0,0378	0,4162	0,2984	0,7146
0.2929	0,0572	0	0	0,43866	0,2629	0,7016
0.1627	0,0512	0	0	0,4599	0,239	0,6989
0	0	0	0	0,4800	0,2056	0,68563

Результаты расчетов. Данные табл. 2.1 показывают, что целевая функция принимает максимальное значение в диапазоне $m_H = 0{,}135 \ldots 0{,}14$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. Сумма относительных толщин всех трех брусьев составит 0,42, а относительные толщины досок изменяются в пределах 0,09…0,045. Объем получаемых досок при такой схеме раскроя пиловочника немного меньше, чем объем брусьев [58]. Пифагорическая зона в этом случае составляет 0,954.

Расчеты показали, что с увеличением относительной толщины бруса m_H площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а сумма площадей поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается.

Следовательно, имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором сумма их площадей поперечных сечений принимает максимальное значение.

Относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величина целевой функции при изменении относительной толщины бруса с интервалом Δ = 0,001 в оптимальном диапазоне m_H = 0,135…0,143 представлены в табл. 2.2 [58].

Таблица 2.2

Относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величина целевой функции при заданной толщине бруса

m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
0,135	0,990846	0,914317	0,814098	0,087864	0,688744	0,072138
0,136	0,990709	0,912982	0,811114	0,088444	0,683562	0,072502
0,137	0,990571	0,911635	0,808102	0,089021	0,678322	0,072861
0,138	0,990432	0,910277	0,805059	0,089597	0,673023	0,073214
0,139	**0,990292**	**0,908906**	**0,801987**	**0,090171**	**0,667664**	**0,073561**
0,14	0,990152	0,907524	0,798885	0,090742	0,662245	0,073902
0,141	0,99001	0,90613	0,795752	0,091311	0,656764	0,074237
0,142	0,989867	0,904723	0,792589	0,091878	0,651222	0,074566
0,143	0,989723	0,903304	0,789395	0,092442	0,645617	0,074888

Окончание табл. 2.2

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,536872	0,05933	0,350405	0,046467	0,38063	0,338699	0,719329
0,52873	0,059449	0,337858	0,046203	0,383067	0,336681	0,719749
0,520475	0,059556	0,325064	0,045908	0,385496	0,334564	0,72006
0,512106	0,05965	0,312012	0,045578	0,387916	0,332347	0,720263
0,50362	**0,059731**	**0,298691**	**0,045212**	**0,390327**	**0,330032**	**0,720358**
0,495015	0,059799	0,285089	0,044808	0,392728	0,327618	0,720346
0,486287	0,059852	0,271195	0,044363	0,39512	0,325106	0,720226
0,477435	0,05989	0,256993	0,043873	0,397502	0,322498	0,72
0,468455	0,059913	0,242469	0,043336	0,399875	0,319794	0,719669

Анализируя результаты расчетов в табл. 2.2, можно отметить, что целевая функция для данной схемы раскроя принимает максимальное (оптимальное) значение при m_H = 0,139 от диаметра пиловочника в вершинном торце. С увеличением относительной толщины бруса относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок вначале немного возрастает, а затем уменьшается (рис. 2.2). Суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых досок принимает максимальное значение при относительной толщине бруса m_H = 0,139. Таким образом, подтверждается ранее принятая гипотеза о том, что имеется такое сочетание размеров

брусьев и боковых обрезных досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение.

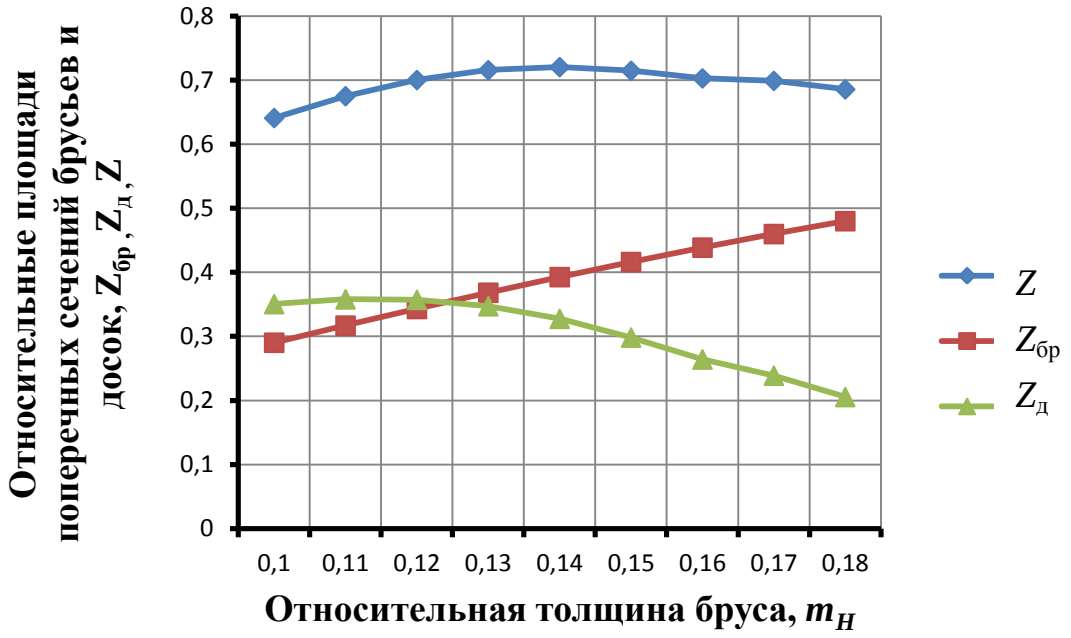


Рис. 2.2. Влияние относительной толщины бруса на относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

Таким образом, впервые установлена сложная зависимость влияния относительной толщины бруса на площади поперечных сечений трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых обрезных досок. При этом получено их оптимальное соотношение, которое не совпадает с точкой пересечения этих кривых. Одна кривая описывает изменение относительной площади поперечных сечений брусьев в зависимости от толщины бруса, $Z_{бр} = f(m_H)$. Другая кривая описывает изменение относительных площадей поперечных сечений боковых обрезных досок в зависимости от толщины бруса, $Z_д = f(m_H)$. Обычно экстремум функции наблюдается в точке пересечения уравнений, составляющих эту функцию.

С увеличением относительной толщины бруса относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (рис. 2.3). При этом в наибольшей мере уменьшаются ширины крайних боковых досок и самая крайняя боковая обрезная доска при $m_H = 0{,}16$ принимает нулевое значение. Размеры третьей боковой обрезной доски также принимают нулевое значение при относительной толщине бокового бруса $m_H = 0{,}18$ [58].

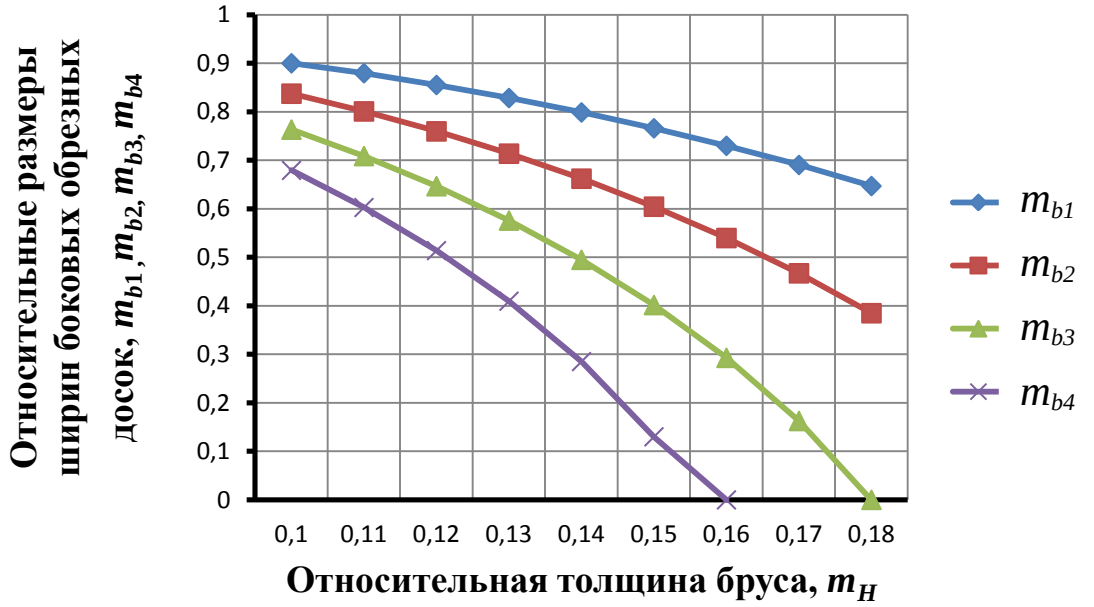


Рис. 2.3. Влияние относительной толщины бруса на относительные ширины боковых обрезных досок

С увеличением относительной толщины бруса относительная толщина первой пары боковых обрезных досок возрастает (см. рис. 2.4). При этом толщина второй пары боковых обрезных досок также возрастает, но в меньшей степени. Две боковые обрезные доски третьей пары с увеличением относительной толщины бруса вначале немного возрастают, а затем уменьшаются [58].

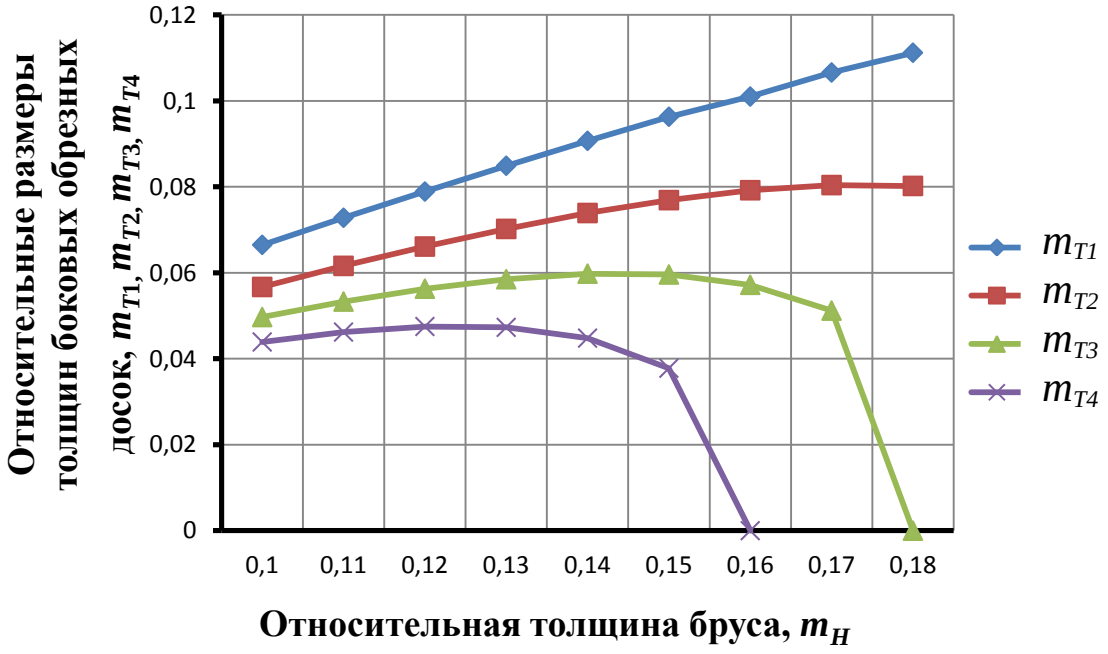


Рис. 2.4. Влияние относительной толщины бруса на относительные толщины боковых обрезных досок

Крайняя пара боковых обрезных досок вначале немного возрастает и при $m_H \geq 0{,}14$ уменьшается, а при $m_H \geq 0{,}15$ уменьшается ускоренно и при $m_H = 0{,}16$ принимает нулевое значение. Следовательно, при расчете и составлении поставов необходимо соблюдать условие, при котором крайняя боковая доска попадала бы в вариант, когда толщина центрального бруса m_H находится в диапазоне не более 0,13…0,14 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Третья пара боковых обрезных досок также уменьшается ускоренно при относительной толщине бруса $m_H \geq 0{,}15$ от диаметра пиловочника в вершинном торце и принимает нулевое значение при относительной толщине бруса $m_H = 0{,}18$.

С увеличением относительной толщины бруса относительная ширина пласти центрального бруса незначительно уменьшается (см. рис. 2.5). При этом в наибольшей мере уменьшаются ширины наружных пластей боковых брусьев. В этом случае необходимо также придерживаться рекомендаций при расчете и составлении поставов, чтобы относительная толщина брусьев m_H находилась в диапазоне не более 0,13…0,14 от диаметра пиловочника в вершинном торце.

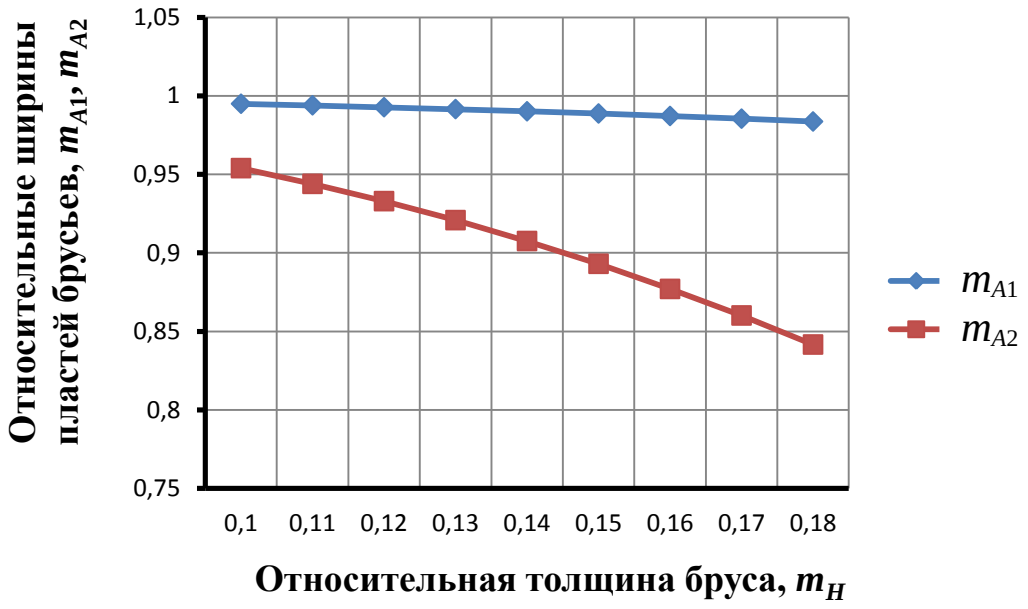


Рис. 2.5. Влияние относительной толщины бруса на относительные ширины пласти брусьев

Таким образом, для данной схемы раскроя пиловочника определены оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок, при которых целевая функция принимает максимальное значение [36]. Расчеты показали, что целевая функция при изменении бруса изменяется плавно, но размеры брусьев и особенно боковых обрезных досок

изменяются не пропорционально и противоречиво. В наибольшей степени уменьшаются относительные размеры боковых обрезных досок при увеличении относительной толщины бруса.

Следовательно, при составлении поставов необходимо придерживаться оптимальных значений прежде всего толщин брусьев. Небольшое изменение размеров брусьев будет вызывать не столь значительное отклонение размеров боковых обрезных досок от оптимальных значений. В этом случае будет обеспечиваться получение максимального выхода пиломатериалов.

Анализируя рис. 2.2, следует отметить, что при изменении относительной толщины бруса в диапазоне 0,12…0,14, а лучше в диапазоне 0,13…0,14 от диаметра пиловочника в вершинном торце целевая функция изменяется незначительно. Следовательно, этот диапазон изменения толщин брусьев и следует рекомендовать при расчете и составлении поставов.

2.2. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок

Постановка задачи. Данная задача ранее была решена без учета ширины пропила. С учетом ширины пропила (рис. 2.6) задачу оптимизации такого варианта раскроя пиловочника можно решить следующим образом [81].

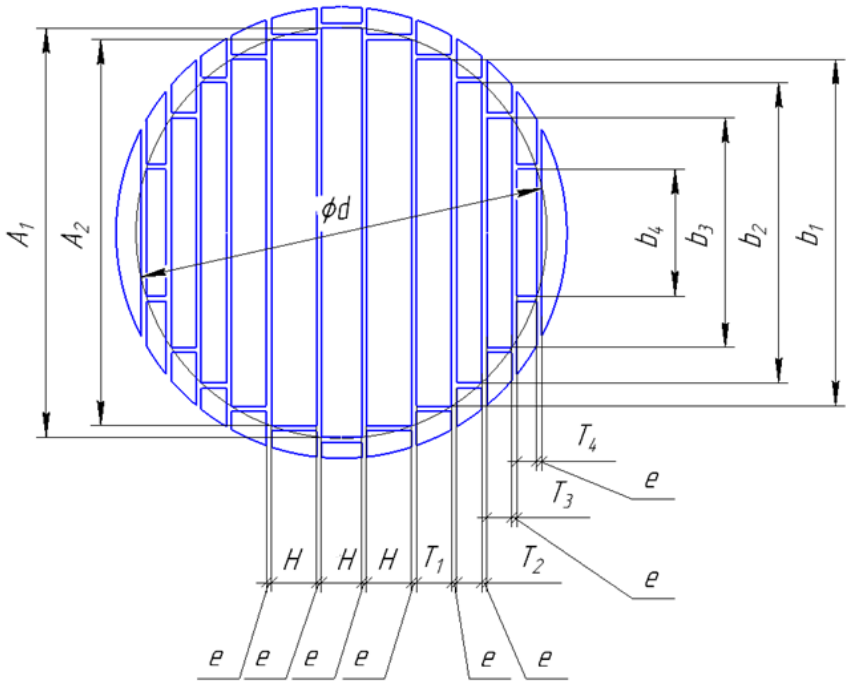


Рис. 2.6. Схема раскроя пиловочника
с выпиливанием трёх брусьев одинаковой толщины и четырех пар
боковых обрезных досок с учетом ширины пропила

Следует отметить: ранее полагали [99, 103, 104, 117], что ширина пропила оказывает влияние на относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок путем суммирования ширины пропила с размерами этих досок и ширина пропила учитывалась при расчете и составлении поставов расчетно-графическим методом [114]. При решении оптимизационных задач ширина пропила, как правило, не учитывалась, так как это затрудняло решение задачи оптимизации.

Составление математической модели. В качестве критерия оптимальности выбираем выход пилопродукции. Целевую функцию представляем в виде суммы поперечных сечений брусьев и досок, получаемых после первого прохода брусово-развального способа раскроя пиловочника, так как в задаче оптимизации учитывается только пифагорическая зона пиловочника [55]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4. \quad (2.1')$$

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора [57]. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и боковых досок с учетом ширины пропила можно представить следующими уравнениями. С целью сравнения уравнений связи с учетом ширины пропила с уравнениями связи без учета ширины пропила уравнения связи с учетом ширины пропила обозначены теми же цифрами, но со штрихом.

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (2.2')$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (3H + 2e)^2 = 0, \quad (2.3')$$

где е – ширина пропила.

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (3H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (2.4')$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (2.5')$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0. \quad (2.6')$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \quad (2.7')$$

Уравнения связи записываем в удобной форме для нахождения частных производных. Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующие выражения.

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - 9H^2 - 12He - 4e^2 = 0.$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 12HT_1 - 24He - 16T_1e = 0.$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 36He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e = 0. \end{gathered}$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 48He - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e = 0. \end{gathered}$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - \\ -100e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 60He - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40T_1e - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -40T_2e - 8T_3T_4 - 40T_3e - 40T_4e = 0. \end{gathered}$$

Полагаем, что математическая модель данной схемы раскроя пиловочника с учетом ширины пропила составлена.

Решение математической модели. Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа [81]. Функция Лагранжа с учетом ширины пропила будет иметь вид:

$$\begin{gathered} L = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + \\ +\lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - 9H^2 - 4e^2 - 12He - A_2^2) + \\ +\lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 12HT_1 - 24He - 16T_1e) + \\ +\lambda_4(d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - \\ -36He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - \\ -4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 48He - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e) + \\ \lambda_6(d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 100e^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 60He - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40T_1e - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 40T_2e - \\ -8T_3T_4 - 40T_3e - 40T_4e). \end{gathered} \tag{2.8'}$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = H - 2\lambda_1 A_1 = 0\,, \\
\dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 12\lambda_2 e - 18\lambda_3 H - \\
-12\lambda_3 T_1 - 24\lambda_3 \mathrm{e} - 18\lambda_4 H - 12\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - \\
-12\lambda_4 T_2 - 36\lambda_4 e - 18\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 - \\
-48\lambda_5 e - 18\lambda_6 H - 12\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 T_2 - \\
-12\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 T_4 - 60\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 8\lambda_3 T_1 - 12\lambda_3 H - 16\lambda_3 e - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - \\
-8\lambda_4 T_2 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - \\
-8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 8\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 H \\
-8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e = 0\,, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_2 - \\
-12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 8\lambda_6 T_2 - \\
-12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_4 - \\
-40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_4} = 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 - 8\lambda_6 T_4 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 40\lambda_6 e = 0.
\end{cases}
\qquad (2.9')
$$

Решаем систему уравнений (2.9') совместно с уравнениями связи. Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (2.9'), из которого определяем множитель Лагранжа λ_6:

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \qquad (2.10')$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (2.9'), которое представляем в виде

$$b_4 = 6\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_2 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4 + 20\lambda_6 e. \qquad (2.11')$$

В равенство (2.11') подставим выражение (2.10'), получаем:

$$b_4^2 = 2T_4\ (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e). \qquad (2.12')$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (2.9'), из которого определяем множитель Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5\, b_3\ , \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \qquad (2.13')$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (2.9'), которое можно представить в виде

$$b_3 = 6\lambda_5\, H + 4\lambda_5\, T_1 + 4\lambda_5\, T_2 + 4\lambda_5 T_3 + 16\lambda_5 e + b_4\ . \qquad (2.14')$$

В равенство (2.14') подставляем выражение (2.13'), получим:

$$b_3^2 = 2T_3\ (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) + b_3\ b_4\ . \qquad (2.15')$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)}{b_3}. \qquad (2.16')$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (2.9'), из которого определяем множитель Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4\, b_2\ , \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \qquad (2.17')$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (2.9'), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 6\lambda_4\, H + 4\lambda_4\, T_1 + 4\lambda_4\, T_2 + 12\lambda_4 e + b_3\ . \qquad (2.18')$$

В последнее уравнение равенства (2.18') подставим выражение (2.17'), получим:

$$b_2^2 \;=\; 2T_2\;(3H + 2T_1\;\; + 2T_2\;\; + 6e) + b_2\;b_3\;. \qquad (2.19')$$

Из равенства (2.19') можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3\;\; = \; b_2\;\; - \frac{2T_2\;\left(3H + 2T_1\;\; + 2T_2\;\; + 6e\right)}{b_2}. \qquad (2.20')$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (2.9'), из которого определяем множитель Лагранжа λ_3:

$$T_1\;\; = \; \lambda_3\, b_1\;, \qquad \lambda_3\;\; = \frac{T_1}{b_1}\,. \qquad (2.21')$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (2.9'), которое представляем в виде

$$b_1\;\; = \; 6\lambda_3\, H + 4\lambda_3\, T_1\;\; + 8\lambda_3 e + b_2\;. \qquad (2.22')$$

В равенство (2.12') подставляем выражение (2.11'), получим:

$$b_1^2\;\; = \; 2T_1(3H + 2T_1 + 4e) + b_1\;b_2\;. \qquad (2.23')$$

Из равенства (2.13') можно выразить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2\;\; = \; b_1\;\; - \frac{2T_1\;\;(3H + 2T_1 + 4e)}{b_1}. \qquad (2.24')$$

Рассматриваем первое уравнение системы (2.9'), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$H\;\; = \; 2\lambda_1\, A_1\;, \qquad \lambda_1\;\; = \frac{H}{2A_1}. \qquad (2.25')$$

Рассматриваем второе уравнение системы (2.9'), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$H\;\; = \; \lambda_2\, A_2\;, \qquad \lambda_2\;\; = \frac{H}{A_2}\,. \qquad (2.26')$$

Из уравнения связи (2.2') можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1\;\; = \; \sqrt{d^2 - H^2}. \qquad (2.27')$$

Используя уравнение связи (2.2), можно определить множитель Лагранжа по формуле (2.28).

Из уравнения связи (2.3') можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2 - 12He - 4e^2}. \quad (2.29')$$

Используя равенство (2.29'), можно определить множитель Лагранжа λ_2 по формуле:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - 9H^2 - 12He - 4e^2}}. \quad (2.30')$$

Рассматриваем третье уравнение системы (2.9'), которое представляем в следующем виде:

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 12\lambda_2 e + 3b_1 . \quad (2.31')$$

В равенство (2.31') подставляем выражения (2.25') и (2.26'), получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + \frac{18H^2}{A_2} + \frac{12He}{A_2} + 3b_1. \quad (2.32')$$

Из равенства (2.32') можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3}\left(A_1 + 2A_2 - H\left(\frac{H}{A_1} + \frac{18H}{A_2} + \frac{12e}{A_2}\right)\right). \quad (2.33')$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, можно определить её толщину, используя уравнение связи (2.4'):

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (3H + 4\,e)). \quad (2.34')$$

Аналогично, зная ширину доски, можно определить её толщину, используя соответствующее уравнение связи.

Толщина второй пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1 + 6e)). \quad (2.35')$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 8e)). \quad (2.36')$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 10e)). \quad (2.37')$$

Методика выполнения расчетов. Определить по этим формулам оптимальные размеры брусьев и досок непосредственно не представляется возможным. Поэтому воспользуемся численным методом.

Для этого задаемся шириной пропила, а затем задаемся толщиной бруса в определенных пределах и по полученным формулам рассчитываем остальные размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим максимальное значение целевой функции. Этот вариант и будет отвечать оптимальным размерам брусьев и досок. Для облегчения выполнения расчетов и упрощения анализа результатов полученные выше формулы представляем в относительных единицах, принимая $m_H = H/d$ и $m_e = e/d$ [55].

Расчетные формулы в относительных единицах будут иметь следующий вид.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (2.38')$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (3m_H + 2m_e)^2}. \quad (2.39')$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H\left(\frac{m_H}{m_{A_1}} + \frac{18m_H}{m_{A_2}} + \frac{12m_e}{m_{A_2}}\right)). \quad (2.40')$$

Относительная толщина пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (3m_H + 4m_e)\right). \quad (2.41')$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}(3m_H + 2m_{T_1} + 6m_e)}{m_{b_1}}. \quad (2.42')$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 6m_e\right)\right). \quad (2.43')$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)}{m_{b2}}. \quad (2.44')$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)\right). \quad (2.45')$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)}{m_{b_3}}. \quad (2.46')$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)). \quad (2.47')$$

Относительная площадь поперечного сечения брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (2.48')$$

Относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1}m_{b_1} + 2m_{b_2}m_{T_2} + 2m_{b_3}m_{T_3} + 2m_{b_4}m_{T_4}. \quad (2.49')$$

Суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (2.50')$$

Результаты расчетов. Расчеты по представленным формулам производятся в два этапа. Вначале задаемся относительной величиной ширины пропила $m_{\text{e}} = e/d$. Затем для этой относительной ширины пропила изменяем толщину бруса в пределах 0,10…0,20 и находим относительные размеры брусьев и досок, а также значение целевой функции. По результатам расчета находим максимальное значение целевой функции. В интервале первоначального максимального значения целевой функции производим расчеты с градацией изменения толщины бруса 0,001. По результатам расчетов отыскиваем максимальную величину целевой функции. Этот результат и будет являться оптимальным. Далее изменяем ширину пропила и аналогично вычисляем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции для различных толщин брусьев. Результаты расчетов сводятся в табл. 2.3 [55].

Таблица 2.3

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок и величина целевой функции для различных значений ширины пропила

m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0	0,139	0,990292	0,908906	0,801987	0,090171	0,667664
0,002	0,142	0,989867	0,902829	0,789788	0,089690	0,649565
0,004	0,144	0,989578	0,897998	0,780426	0,088624	0,636604
0,006	0,148	0,988987	0,88998	0,763938	0,088645	0,611398
0,008	0,151	0,988534	0,883198	0,750252	0,088076	0,591263
0,01	0,154	0,988071	0,876171	0,736033	0,087473	0,570378
0,012	0,158	0,987439	0,867177	0,717366	0,087348	0,541857
0,014	0,163	0,986626	0,855985	0,693658	0,087652	0,504542
0,016	0,167	0,985957	0,846115	0,672901	0,087366	0,472505

Окончание табл. 2.3

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,073561	0,50362	0,059731	0,298691	0,045212	0,390327	0,330032	0,720358
0,071463	0,481393	0,056099	0,276172	0,040302	0,396964	0,310784	0,707749
0,068971	0,467764	0,052331	0,268213	0,035753	0,401123	0,29428	0,695403
0,067017	0,435290	0,048484	0,232065	0,030205	0,409804	0,273614	0,683418
0,064663	0,411363	0,044496	0,210717	0,025038	0,415994	0,255785	0,671779
0,062218	0,386818	0,040387	0,190080	0,019806	0,422024	0,238516	0,66054
0,059887	0,350773	0,035995	0,153654	0,013832	0,430043	0,219725	0,649768
0,057541	0,301224	0,031083	0,098651	0,006784	0,439871	0,19973	0,639601
0,054798	0,260663	0,026051	0,061294	0,000345	0,447257	0,182985	0,630243

Расчеты показали, что с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается (рис. 2.7). Суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается. Таким образом, оказалось, что ширина пропила неравнозначно оказывает влияние на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок. Следует отметить, что изменение составляющих целевой функции происходит практически по прямым линиям с возрастанием или убыванием.

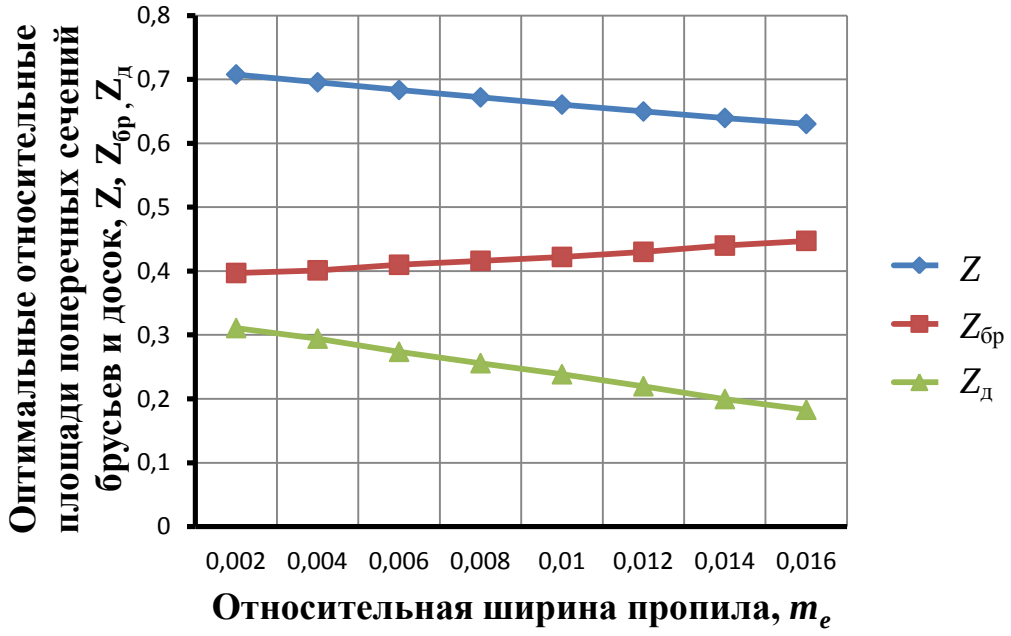


Рис. 2.7. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

С увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.8). В большей мере изменяется при этом ширина крайней боковой обрезной доски. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ и более оптимальные относительные размеры ширины боковых обрезных досок уменьшаются более значительно.

Следует отметить, что при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ оптимальная относительная ширина крайней (четвертой пары) боковой обрезной доски составляет 0,20, а оптимальная относительная ширина третьей пары боковой обрезной доски составляет

0,40 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При распиловке пиловочника диаметром в вершинном торце d = 60 см оптимальные ширины этих боковых досок соответственно составят $b_3 = 240$ мм, $b_4 = 120$ мм. Такие размеры досок используются на практике.

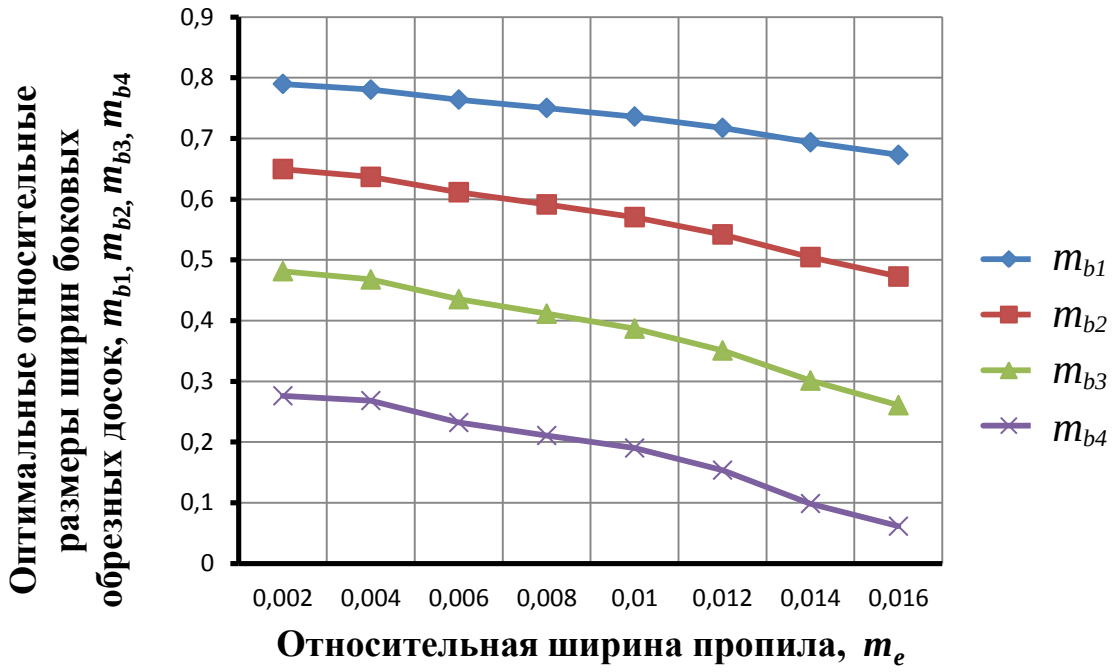


Рис. 2.8. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок

С увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.9). Наибольшее уменьшение оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок наблюдается у крайней доски. При этом толщина крайней боковой обрезной доски при $m_e = 0{,}016$ принимает практически нулевое значение. В этом случае также можно отметить, что и оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшились существенно, особенно у крайних досок.

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ оптимальная относительная толщина крайней (четвертой пары) боковой обрезной доски составляет 0,02, а оптимальная относительная толщина третьей пары боковой обрезной доски составляет 0,04 от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае при распиловке пиловочника диаметром d = 60 см получаются оптимальные боковые доски толщиной соответственно $T_4 = 12$ мм и $T_3 = 24$ мм. Доски толщиной 12 мм, как правило, не выпиливаются на практике.

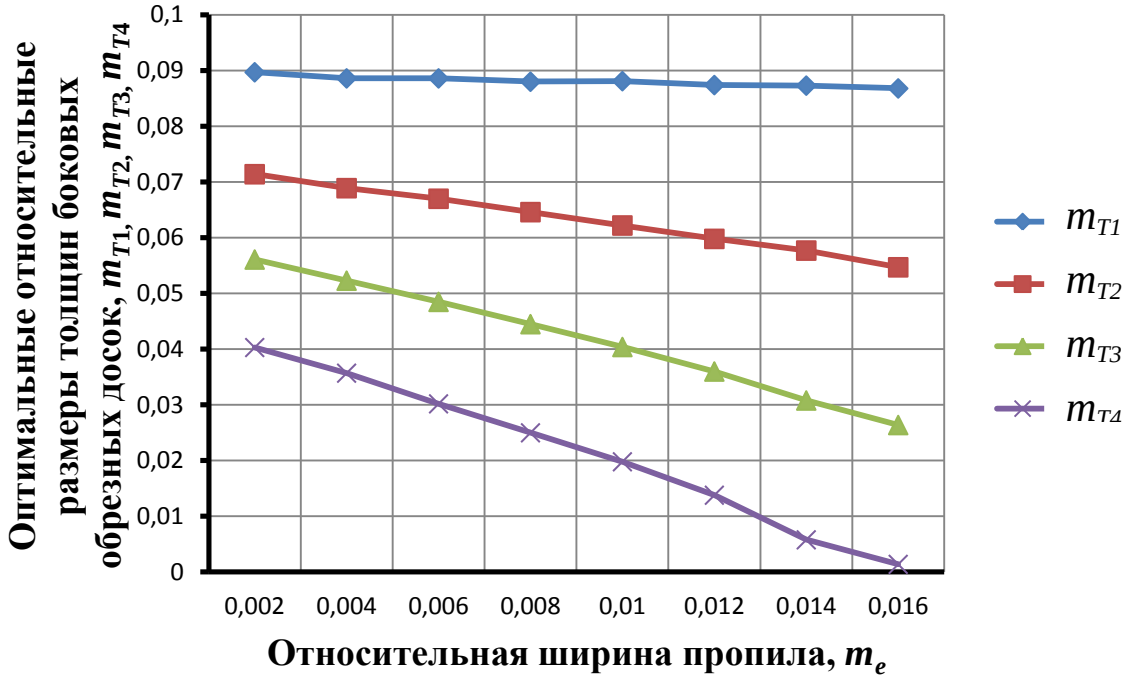


Рис. 2.9. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок

Следовательно, необходимо, чтобы относительная ширина пропила имела меньшее относительное значение. Так, например, при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски составит $m_{b4} = 0{,}03$, что позволяет получить эту доску толщиной 18 мм. Это более приемлемо для практического использования пиломатериалов.

С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бруса возрастает (см. рис. 2.10). При этом ширины пластей центрального и боковых брусьев уменьшаются [55]. В наибольшей степени с увеличением относительной ширины пропила уменьшается оптимальная относительная ширина наружной пласти боковых брусьев.

В соответствии с расчетами оптимальная относительная толщина бруса при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ составит 0,17 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Следовательно, оптимальная толщина бруса при распиловке пиловочника диаметром d = 60 см составит 102 мм. Этот размер вполне приемлем для практического использования. Таким образом, такая схема раскроя пиловочника приемлема для практики, особенно для распиловки пиловочника диаметром 70 см и более с шириной пропила 4,0 мм.

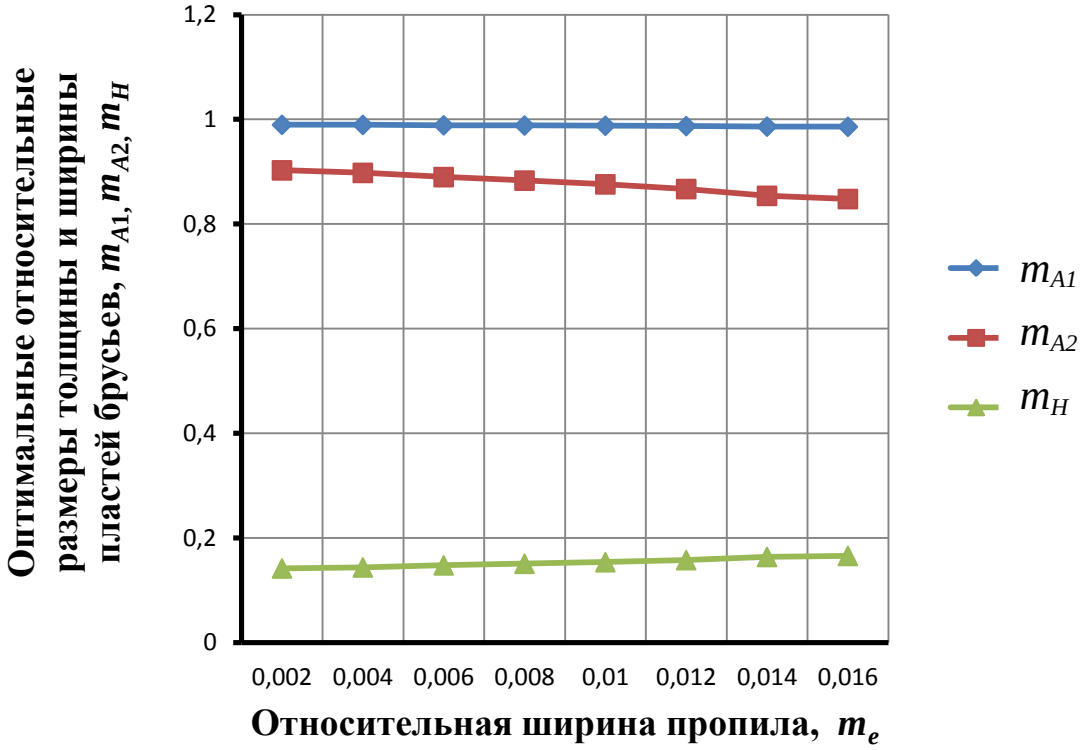


Рис. 2.10. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев

Таким образом, ширина пропила в наибольшей степени оказывает влияние на размеры боковых обрезных досок. Особенно с увеличением ширины пропила изменяются размеры крайней боковой обрезной доски. На практике относительная ширина пропила для данной группы пиловочника диаметром 60 см и более обычно находится в пределах 0,006…0,008. Для этих размеров пиловочника и относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок находятся в пределах:

$$m_{T1} = 0{,}088 \ldots 0{,}087, m_{T2} = 0{,}067 \ldots 0{,}065,$$
$$m_{T3} = 0{,}048 \ldots 0{,}045, m_{T4} = 0{,}030 \ldots 0{,}025.$$

Такой размерный ряд толщин боковых обрезных досок может быть приемлем на практике. Следовательно, ширину пропила необходимо учитывать при расчете и составлении поставов, чтобы обеспечить наибольший выход пиломатериалов [55].

2.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины

Постановка и математическая модель задачи. На лесопильных предприятиях центральный брус иногда выпиливают по толщине меньше, чем боковые. В промышленности используется чаще всего

вариант выпиливания центрального бруса по толщине больше, чем боковые (рис. 2.11). Поэтому необходимо знать, какое соотношение размеров брусьев является наиболее выгодным. При изменении размеров брусьев будут изменяться и размеры боковых обрезных досок. Поэтому задачу оптимизации раскроя пиловочника такой схемы раскроя решаем совместно с учетом размеров брусьев и боковых обрезных досок [53, 65].

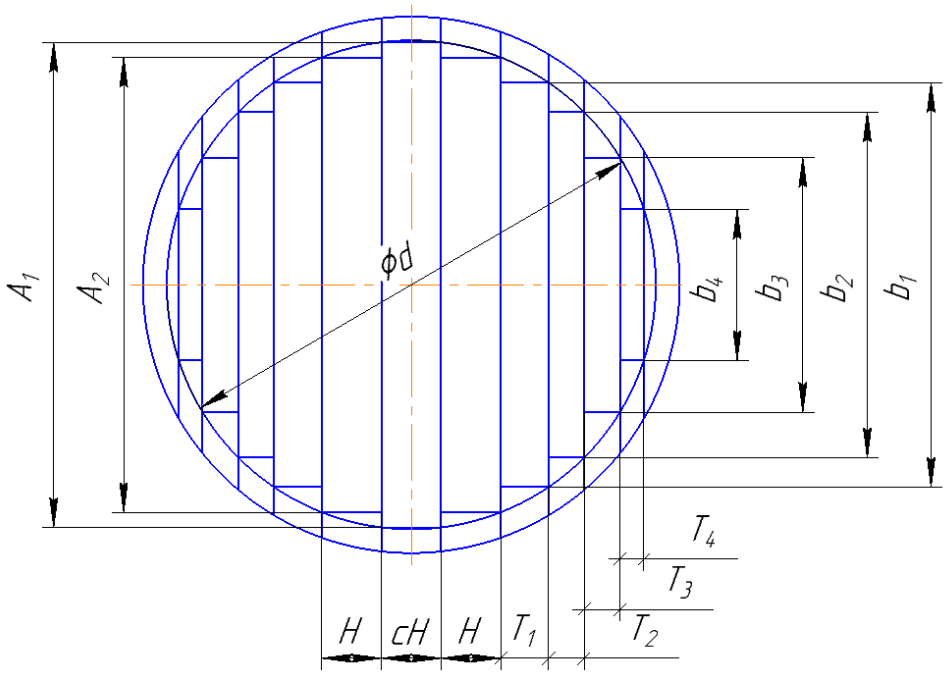


Рис. 2.11. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и четырех пар боковых обрезных досок

Толщину центрального бруса можно определить по выражению:

$$H_{\text{ц}} = cH. \tag{2.51}$$

В данной задаче оптимизации рассматривается пифагорическая зона пиловочника. Согласно теории максимальных поставов [100] длина получаемых пиломатериалов из пифагорической зоны равна длине пиловочника. Следовательно, при составлении математической модели такой схемы раскроя длину пиловочника можно исключить, приняв её за единицу. В этом случае упрощается решение задачи оптимизации. Тогда в качестве критерия оптимальности следует принять площадь поперечного сечения, получаемых брусьев и боковых обрезных досок.

Целевую функцию можно написать в следующем виде:

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4. \tag{2.52}$$

Уравнения связи представляем также по теореме Пифагора.
Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \tag{2.53}$$

Для боковых брусьев:

$$\begin{gathered} d^2 - A_2^2 - (cH + 2H)^2 = 0, \\ d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2 = 0. \end{gathered} \tag{2.54}$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1)^2 = 0. \\ d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1 = 0. \end{gathered} \tag{2.55}$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)^2 = 0. \\ d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - \\ -4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 = 0. \\ d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - \\ -4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 4T_3^2 = 0. \end{gathered} \tag{2.57}$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 = 0. \\ d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - \\ -4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\ -8T_1T_4 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 4T_4^2 = 0. \end{gathered} \tag{2.58}$$

Полагаем, что математическая модель для данной схемы раскроя пиловочника составлена.

В данной математической модели неизвестных факторов (размеров брусьев и досок) много (12 наименований), а уравнений связи всего лишь шесть штук. В таком варианте математическую модель задачи оптимизации решить классическим методом невозможно. Для решения таких задач обычно формулируют новые требования и принимают дополнительные уравнения связи. В данном случае, например, можно задавать соотношение толщин и ширин некоторых досок

или соотношение толщин различных досок между собой, а также можно решать задачу оптимизации для конкретного диаметра пиловочника. Тогда для новых условий количество неизвестных факторов сокращается и задачу оптимизации можно решить классическим методом. Но в этом случае решается новая задача оптимизации и получаются новые результаты только для этих условий раскроя пиловочника. Поэтому попытаемся найти новую методику решения данной задачи оптимизации путем получения новых дополнительных уравнений связи, позволяющих определить оптимальные размеры брусьев и досок [53].

Решение математической модели. Для решения данной математической модели воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$\begin{gathered} L = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + \\ +\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2) + \\ +\lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1) + \\ +\lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - \\ -4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2) + \\ +\lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 4T_3^2) + \\ +\lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -8HT_4 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 4T_2^2 - \\ -8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 4T_4^2). \end{gathered} \tag{2.59}$$

Для определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю [53]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = cH - 2\lambda_1 A_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = cA_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 c^2 H - 2\lambda_2 c^2 H - 8\lambda_2 cH - 8\lambda_2 H - \\
-2\lambda_3 c^2 H - 8\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 4\lambda_3 cT_1 - 8\lambda_3 T_1 — \\
2\lambda_4 c^2 H - 8\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 4\lambda_4 cT_1 - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cT_2 - 8\lambda_4 T_2 - \\
-2\lambda_5 c^2 H - 8\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 4\lambda_5 cT_1 - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cT_2 - 8\lambda_5 T_2 - \\
-4\lambda_5 cT_3 - 8\lambda_5 T_3 - 2\lambda_6 c^2 H - 8\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 4\lambda_6 cT_1 - 8\lambda_6 T_1 - \\
-4\lambda_6 cT_2 - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cT_3 - 8\lambda_6 T_3 — 4\lambda_6 cT_4 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 8\lambda_3 T_1 - 4\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - \\
-8\lambda_4 T_2 - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial c} = \mathrm{H}A_1 - 2\lambda_1 cH^2 - 2\lambda_2 cH^2 - 4\lambda_2 H^2 - 2\lambda_3 cH^2 - 4\lambda_3 H^2 - \\
-4\lambda_3 HT_1 - 2\lambda_4 cH^2 - 4\lambda_4 H^2 - 4\lambda_4 HT_1 - 4\lambda_4 HT_2 - 2\lambda_5 cH^2 - \\
-4\lambda_5 H^2 - 4\lambda_5 HT_1 - 4\lambda_5 HT_2 - 4\lambda_5 HT_3 - 2\lambda_6 cH^2 - \\
-4\lambda_6 H^2 - 4\lambda_6 HT_1 - 4\lambda_6 HT_2 - 4\lambda_6 HT_3 - 4\lambda_6 HT_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - \\
-8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_4} = 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 = 0.
\end{cases}
\tag{2.60}
$$

Решение системы. Решаем полученную систему уравнений совместно с уравнениями связи. Рассматриваем четвертое уравнение системы (2.60), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$
T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{2.61}
$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (2.60), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{2.62}$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (2.60), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{2.63}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (2.60), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \tag{2.64}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (2.60), которое представляем в виде

$$b_4 = 4\lambda_6 T_2 + 2\lambda_6 cH + 4\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4. \tag{2.65}$$

В равенство (2.65) подставим выражение (2.64), получаем:

$$b_4^2 = 2T_4\ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4). \tag{2.66}$$

Рассматриваем десятое уравнение системы (2.60), которое можно представить в виде

$$b_3 = 4\lambda_5 T_2 + 2\lambda_5 cH + 4\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_3 + b_4\ . \tag{2.67}$$

В равенство (2.67) подставляем выражение (2.63), получим:

$$b_3^2 = 2T_3\ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3) + b_3\ b_4\ . \tag{2.68}$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)}{b_3}. \tag{2.69}$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (2.60), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_2 + 2\lambda_4 cH + 4\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1 + b_3\ . \tag{2.70}$$

В последнее уравнение равенства (2.70) подставим выражение (2.62), получим:

$$b_2^2 \;=\; 2T_2\;(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2) + b_2\;b_3\;. \qquad (2.71)$$

Из равенства (2.71) можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 \;=\; b_2 \;- \frac{2T_2\;(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)}{b_2}. \qquad (2.72)$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (2.60), которое представляем в виде

$$b_1 \;=\; 4\lambda_3 T_1 + 2\lambda_3 cH + 4\lambda_3 H + b_2\;. \qquad (2.73)$$

В равенство (2.73) подставляем выражение (2.61), получим:

$$b_1^2 \;=\; 2T_1(cH + 2H + 2T_1) + b_1\;b_2\;. \qquad (2.74)$$

Из равенства (2.74) можно выразить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 \;=\; b_1 \;- \frac{2T_1\;(cH + 2H + 2T_1)}{b_1}. \qquad (2.75)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (2.60), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$cH \;=\; 2\lambda_1\,A_1\;, \qquad \lambda_1 \;=\; \frac{cH}{2A_1}. \qquad (2.76)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (2.60), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$H \;=\; \lambda_2\,A_2\,, \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{H}{A_2}\,. \qquad (2.77)$$

Из уравнения связи (2.53) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 \;=\; \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \qquad (2.78)$$

Используя равенство (2.76), можно определить множитель Лагранжа по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{cH.}{2\sqrt{d^2 - c^2H^2}}. \quad (2.79)$$

Из уравнения связи (2.54) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH + 2H)^2}. \quad (2.80)$$

Используя равенство (2.80), можно определить множитель Лагранжа λ_2 по формуле:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2}}. \quad (2.81)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (2.60), которое представляем в следующем виде:

$$cA_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 c^2 H + 2\lambda_2 c^2 H + 8\lambda_2 H + 8\lambda_2 cH + (c+2)b_1 . \quad (2.82)$$

В равенство (2.82) подставляем выражения (2.76) и (2.77), получим:

$$cA_1 + 2A_2 = \frac{c^3H^2}{A_1} + \frac{2c^2H^2 + 8H^2 + 8cH^2}{A_2} + (c+2)b_1. \quad (2.83)$$

Из равенства (2.83) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{2(d^2 - ((H(c+2))^2 + H^2(c+2)^2)}{(c+2)A_2} + \frac{c(d^2 - 2c^2H^2)}{(c+2)A_1}. \quad (2.84)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, можно определить её толщину, используя уравнение связи (2.55):

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H)) . \quad (2.85)$$

Аналогично, зная ширину доски, можно определить её толщину, используя уравнение связи.

Толщина второй пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1)). \quad (2.86)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (2.87)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (2.88)$$

Алгоритм решения задачи. Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (2.60) и учтены все уравнения связи. Получены формулы для определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок. Однако в этих формулах все размеры брусьев и досок взаимосвязаны, и непосредственно определить оптимальные размеры не представляется возможным. В связи с этим предлагается использовать численный метод [53]. Алгоритм решения задачи оптимизации данной схемы раскроя представляется ниже.

Ширина пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \quad (2.89)$$

Ширина наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH+2H)^2}. \quad (2.90)$$

Ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{c(d^2 - 2c^2H^2)}{\sqrt{d^2 - c^2H^2}(c+2)} + \frac{2\left(d^2 - 2H^2(c+2)^2\right)}{\sqrt{d^2 - (cH+2H)^2}(c+2)}. \quad (2.91)$$

Толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H)). \quad (2.92)$$

Ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1(cH + 2H + 2T_1)}{b_1}. \quad (2.93)$$

Толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$T_2 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1)\right). \quad (2.94)$$

Ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)}{b_2}. \quad (2.95)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (2.96)$$

Ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)}{b_3}. \quad (2.97)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$T_4 = 0{,}5\left(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)\right). \quad (2.98)$$

Площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cH\text{A}_1 + 2H\text{A}_2. \quad (2.99)$$

Площадь поперечных сечений всех четырех пар боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4. \quad (2.100)$$

Методика выполнения расчетов. Задаемся коэффициентом c, а затем, задаваясь толщиной боковых брусьев в определенном диапазоне, определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. В этом диапазоне изменения толщины брусьев отыскиваем максимальное значение целевой функции. Этот результат и будет являться оптимальным. Для упрощения расчетов и анализа результатов представляем формулы в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ [53].

Алгоритм решения задачи оптимизации в относительных единицах приводится ниже.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - c^2m_H^2}. \quad (2.101)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H)^2}. \quad (2.102)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b1} = \frac{c(1-2c^2 m_H^2)}{m_{A1}(c+2)} + \frac{2(1-2m_H^2(c+2)^2)}{m_{A2}(c+2)}. \quad (2.103)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T1} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b1}^2} - m_H(c+2)). \quad (2.104)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b2} = m_{b1} - \frac{2m_{T1}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1})}{m_{b1}}. \quad (2.105)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T2} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1})). \quad (2.106)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b3} = m_{b2} - \frac{2m_{T2}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2})}{m_{b2}}. \quad (2.107)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T3} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b3}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2})). \quad (2.108)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b4} = m_{b3} - \frac{2m_{T3}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3})}{m_{b3}}. \quad (2.109)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T4} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3})). \quad (2.110)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A1} + 2m_H m_{A2}. \quad (2.111)$$

Относительная площадь поперечных сечений всех четырех пар боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T1}m_{b1} + 2m_{T2}m_{b2} + 2m_{T3}m_{b3} + 2m_{T4}m_{b4}. \quad (2.112)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (2.113)$$

Методика выполнения расчетов. Расчеты выполняются по алгоритм в следующей последовательности. Вначале выбираем коэффициент изменения толщин брусьев *c*. Далее задаемся в определенном диапазоне относительной толщиной бокового бруса и затем по алгоритму выполняются расчеты. По результатам расчетов отыскивается вариант, в котором целевая функция принимает максимальное значение. Этот вариант и учитывается в дальнейшем.

Результаты расчетов по представленным формулам сведены в табл. 2.4.

Таблица 2.4

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции для различных значений коэффициента *c*

c	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
0,4	0,15	0,998198	0,932952	0,827464	0,100759	0,690713
0,5	0,149	0,997221	0,928032	0,821144	0,099111	0,683373
0,6	0,147	0,996103	0,92408	0,8173	0,097007	0,680516
0,8	0,143	0,993435	0,91634	0,809634	0,093267	0,674408
1	0,139	0,990292	0,908906	0,801987	0,090171	0,667664
1,2	0,135	0,986791	0,901874	0,794414	0,087689	0,660327
1,4	0,131	0,983038	0,895332	0,78702	0,085764	0,652564
1,5	0,129	0,9811	0,892271	0,783434	0,084988	0,648597
1,6	0,126	0,979468	0,891205	0,78373	0,083751	0,650985
1,8	0,122	0,97559	0,886045	0,77738	0,082716	0,643517
2	0,117	0,972237	0,883728	0,775902	0,081427	0,643493
2,2	0,113	0,968606	0,880202	0,771229	0,080979	0,637552
2,4	0,108	0,965824	0,879878	0,772158	0,080115	0,6403
2,5	0,106	0,964248	0,878903	0,7708	0,080039	0,638493
2,6	0,104	0,962748	0,878142	0,769722	0,07999	0,63704
2,8	**0,1**	**0,96**	**0,877268**	**0,768459**	**0,079949**	**0,635311**
2,9	0,098	0,95876502	0,877159	0,768298	0,079946	0,635087
3	0,096	0,95763	0,877268	0,768464	0,079947	0,635323
3,2	0,092	0,955682	0,878142	0,769809	0,079937	0,637251
3,4	0,088	0,95419	0,879878	0,772543	0,079881	0,641233
3,5	0,087	0,952512	0,878088	0,768685	0,080564	0,634609
3,6	0,085	0,952032	0,879445	0,770868	0,080498	0,637832
3,8	0,082	0,950213	0,879662	0,77027	0,081059	0,63605
4	0,078	0,950082	0,883728	0,777045	0,080723	0,646266

Продолжение табл. 2.4

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,080805	0,521518	0,065056	0,308647	0,048968	0,339778	0,376459	0,716237
0,079674	0,513136	0,064119	0,298638	0,04803	0,350847	0,366153	0,716999
0,07826	0,511986	0,06313	0,300151	0,047449	0,359536	0,358209	0,717744

Окончание табл. 2.4

0,075712	0,508625	0,061315	0,301041	0,046311	0,375722	0,343402	0,719125
0,073561	0,50362	0,059731	0,298691	0,045212	0,390327	0,330032	0,720358
0,0718	0,497012	0,058383	0,293149	0,044162	0,403366	0,318071	0,721437
0,070403	0,489065	0,057257	0,28483	0,043165	0,414866	0,307475	0,722341
0,069828	0,48471	0,056772	0,279818	0,042689	0,420049	0,302671	0,722719
0,068994	0,490082	0,056293	0,289833	0,0427	0,422044	0,301033	0,723078
0,0682	0,481276	0,055569	0,278857	0,041882	0,430434	0,293225	0,723659
0,067299	0,483385	0,054978	0,284255	0,04167	0,434296	0,289813	0,724108
0,066925	0,475811	0,05457	0,274063	0,041082	0,439721	0,284691	0,724412
0,066347	0,481116	0,054266	0,283356	0,041179	0,440395	0,284241	0,724636
0,066275	0,478721	0,05417	0,280026	0,041013	0,441853	0,282854	0,724706
0,066225	0,476772	0,054098	0,27729	0,04088	0,442981	0,281772	0,724753
0,066179	**0,474422**	**0,05402**	**0,273951**	**0,040723**	**0,444254**	**0,280533**	**0,724787**
0,066174	0,474115	0,054011	0,27351	0,040703	0,444404	0,280378	0,724782
0,066177	0,474444	0,054019	0,273988	0,040724	0,444233	0,280533	0,724767
0,066191	0,477157	0,054081	0,277946	0,040889	0,442931	0,281773	0,724704
0,066192	0,482812	0,054189	0,286237	0,041217	0,440352	0,284234	0,724586
0,066603	0,47239	0,054278	0,269846	0,040757	0,442827	0,281667	0,724494
0,06659	0,477018	0,054359	0,276707	0,04103	0,440827	0,28362	0,724447
0,066965	0,473568	0,054555	0,270642	0,040961	0,440351	0,283903	0,724254
0,066833	0,488432	0,054745	0,292825	0,041782	0,434287	0,289783	0,72407

Анализ результатов. Результаты расчетов показали, что с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает до величины c = 2,8, а затем незначительно уменьшается. Оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок с увеличением коэффициента c наоборот вначале уменьшается, а затем незначительно возрастает (см. рис. 2.12). При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и досок с увеличением коэффициента c вначале незначительно возрастает, а затем уменьшается и приобретает максимальное значение при значении коэффициента c = 2,8 [53]. Следует обратить внимание, что максимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и минимальная относительная площадь поперечного сечения досок получились при c = 2,9. В то же время максимальное значение целевая функция принимает при c = 2,8. Следует также отметить, что различие величины целевой функции для этих двух значений коэффициентов c = 2,8 и c = 2,9 наблюдается в шестом знаке после запятой. Кроме того, при коэффициенте c = 3,0 величина целевой функции по

сравнению с величиной целевой функции при c = 2,8 отличается всего лишь на величину равную 0,000020, что составляет всего лишь 0,003% от максимального значения целевой функции. Такое отклонение является незначительным. Можно отметить, что при изменении коэффициента в пределах c = 2,8…3,2 целевая функция изменяется также незначительно. Для определения величины коэффициента изменения толщины брусьев c, при котором целевая функция принимает максимальные значения, необходимо проведение более точных расчетов. Для практических расчетов представленные результаты вполне приемлемые [58].

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.13). При этом оказалось, что с увеличением коэффициента c в наибольшей степени изменяются относительные ширины первых двух пар боковых обрезных досок.

При увеличении коэффициента изменения толщин брусьев c относительные ширины боковых обрезных досок вначале уменьшаются более существенно до c = 2,0, а затем с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c это изменение происходит незначительно.

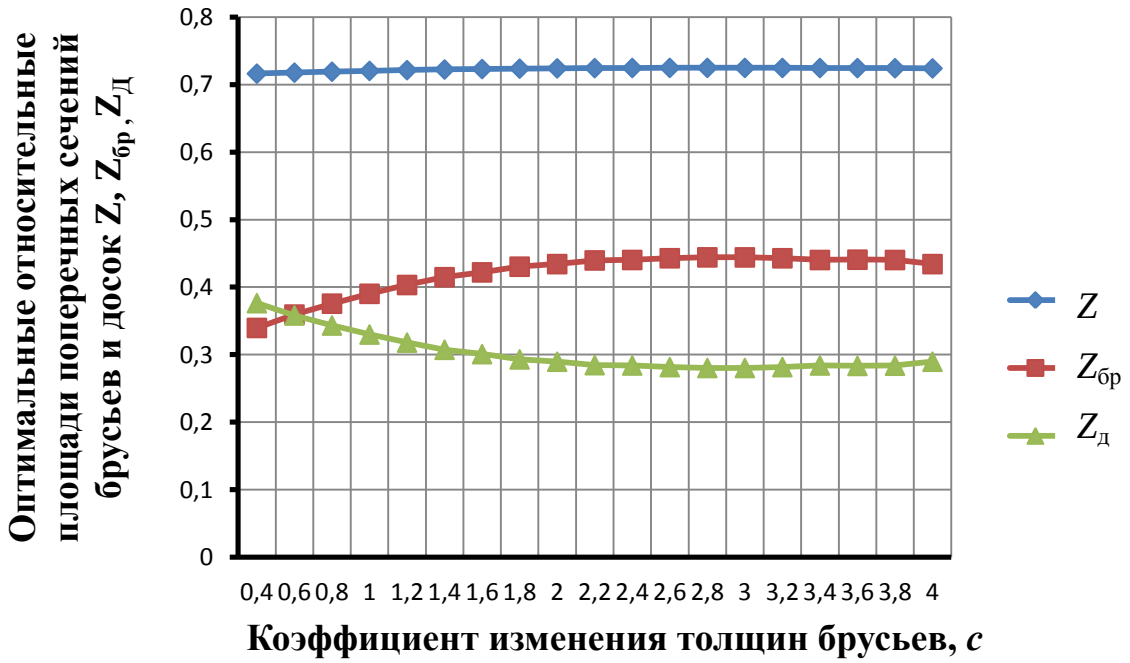


Рис. 2.12. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок умень-

шаются (см. рис. 2.14). При коэффициенте c = 2,9 относительные толщины боковых обрезных досок принимают минимальное значение, а затем при $c \geq 3{,}0$ незначительно возрастают.

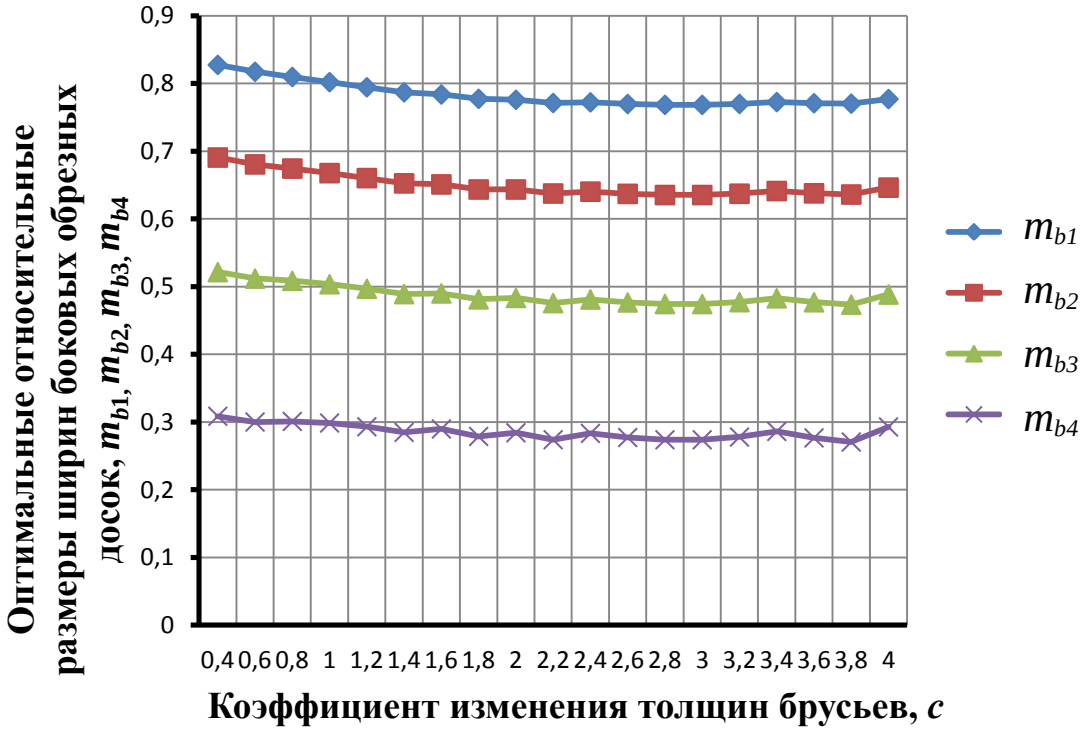


Рис. 2.13. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок

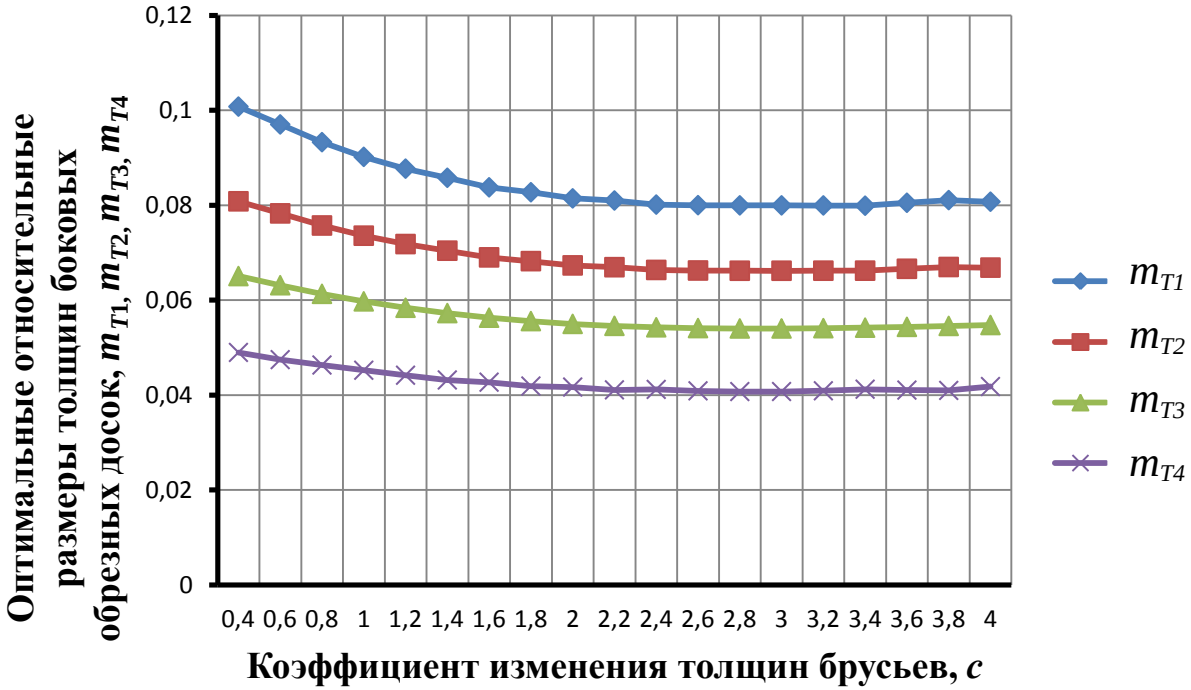


Рис. 2.14. Влияние коэффициента c на относительные толщины боковых обрезных досок

Если рассматривать график изменения относительных толщин боковых обрезных досок с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c*, необходимо обратить внимание, что при *c* = 2,2 и более относительные толщины боковых обрезных досок изменяются незначительно.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается (см. рис. 2.15). При этом оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает. Сумма оптимальных относительных толщин всех трех брусьев с увеличением коэффициента *c* вначале возрастает и при *c* = 2,8…3,0 принимает максимальное значение, а затем незначительно уменьшается. Оптимальная относительная ширина пласти центрального бруса с увеличением коэффициента *c* уменьшается. Оптимальная относительная ширина наружной пласти боковых брусьев с увеличением коэффициента *c* уменьшается до значения этого коэффициента *c* = 2,9, а затем незначительно возрастает.

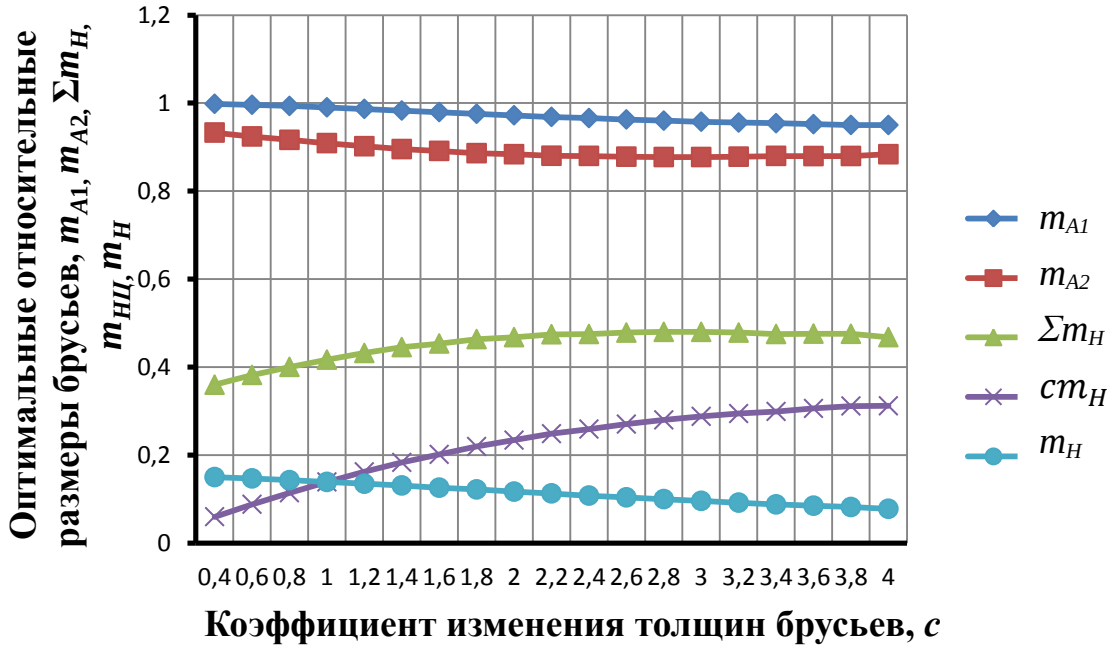


Рис. 2.15. Влияние коэффициента *c*
на оптимальные относительные размеры брусьев

Таким образом, величина коэффициента изменения толщи брусьев *c* оказывает существенное влияние на размеры как брусьев, так и боковых обрезных досок.

Влияние коэффициента *c* на изменение суммарной относительной толщины брусьев и боковых обрезных досок отражено в табл. 2.5.

Таблица 2.5.

Влияние коэффициента *c* на изменение суммарной относительной толщины брусьев и боковых обрезных досок

c	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$m_{H_б}$	0,15	0,139	0,129	0,117	0,106	0,096	0,087	0,078
cm_H	0,075	0,139	0,194	0,234	0,265	0,288	0,305	0,312
$\sum m_{H_б}$	0,3	0,278	0,258	0,234	0,212	0,192	0,174	0,156
$\sum m_H$	0,375	0,417	0,452	0,468	0,477	0,48	0,479	0,468
$\sum m_T$	0,582	0,537	0,509	0,491	0,483	0,482	0,484	0,488
$\sum m_E$	0,957	0,954	0,961	0,959	0,96	0,962	0,963	0,956

Результаты, представленные в табл. 2.4 и 2.5, показывают, что относительная толщина центрального бруса с увеличением коэффициента *c* возрастает, а относительная толщина боковых брусьев уменьшается. Суммарная относительная толщина всех трех брусьев с увеличением коэффициента *c* возрастает и достигает максимального значения $\sum m_H = 0{,}48$ при *c* = 3,0, а затем уменьшается. Суммарная относительная толщина всех трех брусьев при изменении коэффициента *c* в пределах 1,0…4,0 изменяется в диапазоне 0,417…0,48 [53].

С увеличением коэффициента *c* относительная площадь поперечного сечения получаемых пиломатериалов принимает максимальное значение при *c* = 2,8 (см. рис. 2.12).

Суммарная относительная толщина боковых досок с увеличением коэффициента *c* вначале уменьшается, принимая минимальное значение $\sum m_T = 0{,}482$ при *c* = 3,0, а затем снова возрастает. Пифагорическая зона m_E принимает максимальное значение при *c* = 3,0…3,5.

Анализируя данные табл. 2.5, можно отметить, что целевая функция при изменении коэффициента *c* в пределах от 2 до 4 изменяется незначительно. Следовательно, этот диапазон рекомендуется использовать при расчете и составлении поставов.

Следует также подчеркнуть, что при коэффициенте *c* = 3,0 толщина центрального бруса принимает оптимальное значение, равное $m_{H_ц} = 0{,}288$. Следовательно, увеличение относительной толщины центрального бруса при *c* = 3,0 по сравнению с его относительной толщиной при *c* = 1,0, равной $cm_H = 0{,}139$, составляет 2,072 раза. При *c* = 2,0 относительная толщина центрального бруса принимает значение $m_{H_ц} = 0{,}234$. Следовательно, в этом случае происходит

увеличение относительной толщины центрального бруса по сравнению с толщиной этого бруса при *c* = 1,0 в 1,68 раза.

Таким образом, следует вначале определить суммарную оптимальную толщину брусьев от данного диаметра бревна, а затем выбрать размеры брусьев. Например, диаметр пиловочника в вершинном торце равен 80 см. Суммарная толщина брусьев примерно составит 800*0,45 = 360 мм. Толщину центрального бруса можно выбрать равной 150 мм, а толщина боковых брусьев тогда составит 100 мм. Величина коэффициента *c* будет равна 1,5. Расчетная толщина крайних боковых обрезных досок составит 800 * 0,0427 = 34,2 мм, а расчетная толщина внутренней (первой) боковой обрезной доски будет равна 800 * 0,085 = 68 мм. Исходя из этих расчетов далее составляется постав [53].

2.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила

Математическая модель задачи. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев разной толщины и с учетом ширины пропила представлена на рис. 2.16 [55].

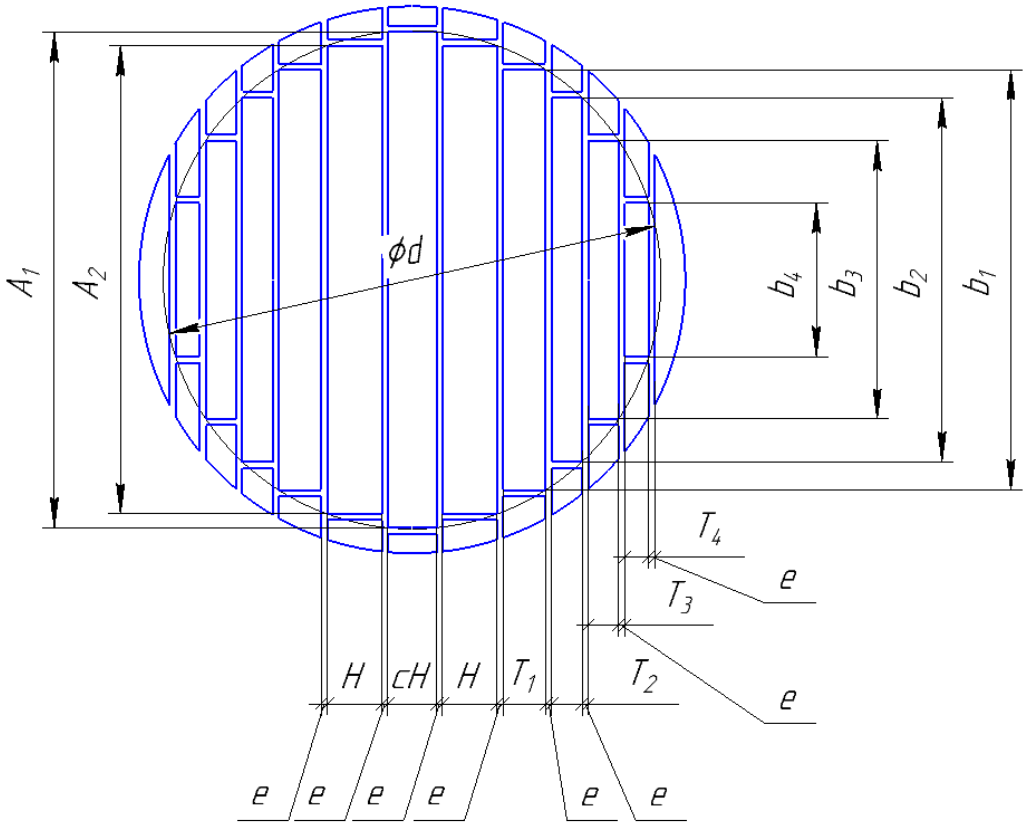


Рис. 2.16. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев разной толщины и четырех пар боковых досок с учетом ширины пропила

Целевую функцию для данной схемы раскроя пиловочника представляем в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, так как рассматривается пифагорическая зона, в которой длина полученных брусьев и досок равна длине бревна [65]:

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4. \quad (2.114)$$

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника будут иметь следующий вид [65].

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \quad (2.115)$$

Для боковых брусьев:

$$\begin{gathered} d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0, \\ d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - 8eH - 4e^2 = 0. \end{gathered} \quad (2.116)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0, \\ d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 - \\ -8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2 = 0. \end{gathered} \quad (2.117)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0, \\ d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - \\ -4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 24eT_1 - \\ -4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2 = 0. \end{gathered} \quad (2.118)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0, \\ d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - \\ -16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 32eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - \\ -4T_3^2 - 32eT_3 - 64e^2 = 0. \end{gathered} \quad (2.119)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0, \\ d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - \\ -20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 40eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 40eT_2 - \\ -4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2 = 0. \end{gathered} \quad (2.120)$$

Полагаем, что математическая модель задач оптимизации для данной схемы раскроя пиловочника составлена.

Анализируя данную математическую модель следует отметить, что количество неизвестных факторов (размеров брусьев и боковых обрезных досок, а также ширина пропила) больше чем количество уравнений связи. В связи с этим решить задачу оптимизации данной схемы раскроя пиловочника не представляется возможным.

Решение математической модели. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа [94]. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$\begin{gathered} L = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + \\ +\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - \\ -8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 - \\ -8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\ -24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 - \\ -32eT_3 - 64e^2) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - \\ -40eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2). \end{gathered} \tag{2.121}$$

Для определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок находим частные производные от функции Лагранжа, при которых целевая функция принимает максимальное значение, и приравниваем их к нулю:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = cH - 2A_1\lambda_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2A_2\lambda_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = cA_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 c^2 H - 2\lambda_2 c^2 H - 8\lambda_2 H - 8\lambda_2 e - 4\lambda_2 ce - \\
-8\lambda_2 cH - 2\lambda_3 c^2 H - 8\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 4\lambda_3 cT_1 - 8\lambda_3 T_1 - \\
-16\lambda_3 e - 8\lambda_3 ce - 2\lambda_4 c^2 H - 8\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 4\lambda_4 cT_1 - \\
-8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cT_2 - 8\lambda_4 T_2 - 24\lambda_4 e - 12\lambda_4 ce - 2\lambda_5 c^2 H - \\
-8\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 4\lambda_5 cT_1 - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cT_2 - 8\lambda_5 T_2 - \\
-4\lambda_5 cT_3 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 16\lambda_5 ce - 2\lambda_6 c^2 H - \\
-8\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 4\lambda_6 cT_1 - 8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cT_2 - 8\lambda_6 T_2 - \\
-4\lambda_6 cT_3 - 8\lambda_6 T_3 — 4\lambda_6 cT_4 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e - 20\lambda_6 ce = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial b_4} = 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 8\lambda_3 T_1 - 4\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 16\lambda_3 e - 8\lambda_4 T_1 - \\
-4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cH - \\
-8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cH - \\
-8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 24\lambda_4 e - \\
-8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e = 0.
\end{cases}
\tag{2.122}
$$

Решение системы. Решаем полученную систему уравнений совместно с уравнениями связи. Рассматриваем четвертое уравнение системы (2.122), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{2.123}$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (2.122), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{2.124}$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (2.122), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{2.125}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (2.122), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \tag{2.126}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (2.122), которое представляем в виде

$$b_4 = 4\lambda_6 T_2 + 2\lambda_6 cH + 4\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4 + 20\lambda_6 e. \tag{2.127}$$

В равенство (2.127) подставим выражение (2.126), получаем:

$$b_4^2 = 2T_4\ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e). \tag{2.128}$$

Рассматриваем десятое уравнение системы (2.122), которое можно представить в виде

$$b_3 = 4\lambda_5 T_2 + 2\lambda_5 cH + 4\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_3 + 16\lambda_5 e + b_4\ . \tag{2.129}$$

В равенство (2.129) подставляем выражение (2.125), получим:

$$b_3^2 = 2T_3\ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) + b_3\ b_4\ . \tag{2.130}$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)}{b_3}. \tag{2.131}$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (2.122), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_2 + 2\lambda_4 cH + 4\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1 + 12\lambda_4 e + b_3\ . \tag{2.132}$$

В последнее уравнение равенства (2.132), подставим выражение (2.124), получим:

$$b_2^2 = 2T_2\ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e) + b_2\ b_3\ . \tag{2.133}$$

Из равенства (2.133) можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2\ (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)}{b_2}. \qquad (2.134)$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (2.122), которое представляем в виде

$$b_1 = 4\lambda_3 T_1 + 2\lambda_3 cH + 4\lambda_3 H + 8\lambda_3 e + b_2\ . \qquad (2.135)$$

В равенство (2.135) подставляем выражение (2.123), получим:

$$b_1^2 = 2T_1(cH + 2H + 2T_1 + 4e) + b_1\ b_2\ . \qquad (2.136)$$

Из равенства (2.136) можно выразить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1\ (cH + 2H + 2T_1 + 4e)}{b_1}. \qquad (2.137)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (2.122), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$cH = 2\lambda_1\ A_1\ , \qquad \lambda_1 = \frac{cH}{2A_1}. \qquad (2.138)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (2.122), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$H = \lambda_2\ A_2\ , \qquad \lambda_2 = \frac{H}{A_2}\ . \qquad (2.139)$$

Из уравнения связи (2.115) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \qquad (2.140)$$

Используя уравнение связи (2.140), можно определить множитель Лагранжа по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{cH}{\sqrt{d^2 - c^2H^2}}. \qquad (2.141)$$

Из уравнения связи (2.116) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH + 2H + 2e)^2}. \quad (2.142)$$

Используя равенство (2.142), можно определить множитель Лагранжа λ_2 по формуле:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHe - 4H^2 - 8He - 4e^2}}. \quad (2.143)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (2.122), которое представляем в следующем виде:

$$cA_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 c^2 H + 2\lambda_2 c^2 H + \\ +8\lambda_2 H + 8\lambda_2 e + 4\lambda_2 ce + 8\lambda_2 cH + (c+2)b_1 . \quad (2.144)$$

В равенство (2.144) подставляем выражения (2.138) и (2.139), получим:

$$cA_1 + 2A_2 = \frac{c^3H^2}{A_1} + \frac{(2c^2H^2 + 8H^2 + 8cH^2 + 4cHe + 8He)}{A_2} + (c+2)b_1. \quad (2.145)$$

Из равенства (2.145) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{2\left(d^2 - ((H(c+2) + 2e)^2 + H^2(c+2)^2 + 2He(c+2)\right)}{(c+2)A_2} + \\ + \frac{c(d^2 - 2c^2H^2)}{(c+2)A_1}. \quad (2.146)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, можно определить её толщину, используя уравнение связи (2.117):

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H + 4\,e)) . \quad (2.147)$$

Аналогично, зная ширину доски, можно определить её толщину, используя уравнение связи.

Толщина второй пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 6e)). \quad (2.148)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 8e)). \quad (2.149)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 10e)). \quad (2.150)$$

Алгоритм решения задачи. Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (2.122) и учтены уравнения связи. Получены формулы для определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок. С учетом ширины пропила в этих формулах все размеры взаимосвязаны и непосредственно определить оптимальные размеры не представляется возможным. В связи с этим предлагается использовать численный метод. Для этого составляем алгоритм решения задачи [95, 97]. Для упрощения выполнения расчетов и анализа результатов алгоритм решения задачи представляется в относительных единицах, полагаем $m_e = e/d, m_H = H/d$.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (2.151)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (2.152)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + 2\frac{(1 - ((cm_H + 2m_H + 2m_e)^2 + m_H^2(c+2)^2 + 2m_e m_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (2.153)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H + 4m_e)\right). \quad (2.154)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + 2\frac{(m_{A_2}^2 - m_H^2(c+2)^2 - 2m_H m_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (2.155)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 4m_e\right). \quad (2.156)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 6m_e\right)\right). \quad (2.157)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 6m_e\right)}{m_{b_2}}. \quad (2.158)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)\right). \quad (2.159)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 8m_e\right)}{m_{b_3}}. \quad (2.160)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)\right). \quad (2.161)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}. \quad (2.162)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{T_2} m_{b_2} + 2m_{T_3} m_{b_3} + 2m_{T_4} m_{b_4}. \quad (2.163)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (2.164)$$

Методика выполнения расчетов. Расчеты выполняются в такой последовательности. Вначале задаемся величиной коэффициента изменения толщины брусьев c, затем выбираем относительную ширину пропила m_e. Для этого варианта производим расчеты по алгоритму, задаваясь относительной толщиной бруса m_H в определенных пределах. По результатам расчетов отыскиваем вариант, при котором целевая функция принимает максимальное значение [55]. Этот вариант расчета и заносим в табл. 2.5… 2.11.

Таблица 2.5

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 1

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
1	0	0,139	0,990292	0,908906	0,801987	0,090171	0,667664
1	0,004	0,144	0,989578	0,897998	0,780426	0,088624	0,640238
1	0,006	0,148	0,988987	0,88998	0,763938	0,088645	0,616968
1	0,008	0,151	0,988534	0,883198	0,750252	0,088076	0,598777
1	0,01	0,154	0,988071	0,876171	0,736033	0,087473	0,579886
1	0,012	0,158	0,987439	0,867177	0,717366	0,087348	0,553547
1	0,014	0,163	0,986626	0,855985	0,693658	0,087652	0,518695
1	0,016	0,167	0,985957	0,846115	0,672901	0,087366	0,489124

Окончание табл. 2.5

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,073561	0,50362	0,059731	0,298691	0,045212	0,390327	0,330032	0,720358
0,067464	0,478346	0,050997	0,2911	0,035261	0,401123	0,294033	0,695155
0,064849	0,451528	0,046634	0,267221	0,029689	0,409804	0,273439	0,683243
0,061882	0,433231	0,042183	0,257717	0,024469	0,415994	0,255428	0,671422
0,058876	0,414452	0,037687	0,248944	0,019223	0,422024	0,237858	0,659882
0,056061	0,384859	0,033079	0,226199	0,013553	0,430043	0,218978	0,649022
0,053327	0,342897	0,028207	0,188351	0,007364	0,439871	0,199041	0,638912
0,050241	0,309943	0,02327	0,167179	0,001586	0,447257	0,181681	0,628938

Таблица 2.6

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 1,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
1,5	0	0,129	0,9811	0,892271	0,783434	0,084988	0,648597
1,5	0,004	0,135	0,979282	0,876995	0,754955	0,083638	0,611426
1,5	0,006	0,139	0,978022	0,86689	0,735606	0,083455	0,584624
1,5	0,008	0,143	0,976724	0,856287	0,715203	0,083208	0,5563

Продолжение табл. 2.6

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
1,5	0,01	0,147	0,975387	0,845168	0,693682	0,082891	0,526324
1,5	0,012	0,151	0,974011	0,833513	0,67097	0,082492	0,494549
1,5	0,014	0,157	0,971874	0,816391	0,636452	0,082908	0,442794
1,5	0,016	0,151	0,974011	0,828154	0,663696	0,077751	0,495938

Окончание табл. 2.6

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,069828	0,48471	0,056772	0,279818	0,042689	0,420049	0,302671	0,069828
0,063762	0,446385	0,04777	0,254862	0,032068	0,435093	0,263252	0,698345
0,060947	0,415466	0,043152	0,226514	0,0262	0,444913	0,241768	0,686681
0,058033	0,382925	0,038399	0,197656	0,020246	0,454405	0,221	0,675405
0,055001	0,348613	0,033491	0,168526	0,014215	0,463552	0,201039	0,664591
0,051833	0,31236	0,028407	0,139576	0,008124	0,472334	0,181981	0,654316
0,048653	0,245755	0,022354	0,069411	0,000128	0,485223	0,159626	0,644849
0,044178	0,341232	0,01981	0,23209	0,000358	0,470716	0,160711	0,63142736

Таблица 2.7

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок, а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для $c = 2$

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
2	0	0,117	0,972237	0,883728	0,775902	0,081427	0,643493
2	0,004	0,124	0,96876	0,863704	0,739772	0,080429	0,595204
2	0,006	0,127	0,967204	0,854166	0,722703	0,079579	0,573134
2	0,008	0,131	0,965068	0,841665	0,699707	0,079215	0,541566
2	0,01	0,135	0,96286	0,828493	0,67532	0,078762	0,507951
2	0,012	0,14	0,96	0,811754	0,643603	0,07868	0,462342
2	0,014	0,142	0,958824	0,802984	0,628051	0,077086	0,443901

Окончание табл. 2.7

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,067299	0,483385	0,054978	0,284255	0,04167	0,434296	0,289813	0,724108437
0,061359	0,429525	0,04574	0,237193	0,030204	0,454451	0,245661	0,700112
0,058151	0,406845	0,041018	0,22265	0,024701	0,462628	0,226057	0,688685
0,055114	0,370461	0,036095	0,189462	0,01852	0,473364	0,204312	0,677676
0,051931	0,331823	0,030978	0,155689	0,012232	0,483665	0,183503	0,667169
0,048671	0,275655	0,025278	0,099362	0,004897	0,496091	0,161191	0,657282
0,044952	0,262417	0,020439	0,1121	0,000371	0,500354	0,147547	0,6479

Таблица 2.8

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 2,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
2,5	0	0,106	0,964248	0,878903	0,7708	0,080039	0,638493
2,5	0,004	0,112	0,96	0,858985	0,736219	0,078372	0,593841
2,5	0,006	0,116	0,957027	0,845484	0,712103	0,078037	0,560856
2,5	0,008	0,119	0,954722	0,834175	0,692294	0,077058	0,535212
2,5	0,01	0,123	0,951548	0,819206	0,665306	0,076535	0,49814
2,5	0,012	0,128	0,947418	0,8	0,629852	0,076357	0,447348
2,5	0,014	0,128	0,947418	0,796984	0,626501	0,07371	0,449685

Окончание табл. 2.8

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,066275	0,478721	0,05417	0,280026	0,041013	0,441853	0,282854	0,724706953
0,05992	0,431473	0,044772	0,244256	0,029792	0,461213	0,239752	0,700965
0,056919	0,392813	0,039853	0,206214	0,023444	0,47369	0,215967	0,689657
0,053551	0,366175	0,034914	0,188724	0,017742	0,482563	0,196282	0,678845
0,050263	0,323158	0,029624	0,149653	0,011197	0,494126	0,174413	0,668538
0,046823	0,260128	0,023607	0,084874	0,003409	0,507974	0,15094	0,658914
0,042883	0,279332	0,019504	0,145245	0,000601	0,507202	0,141998	0,649199

Таблица 2.9

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 3

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
3	0	0,096	0,95763	0,877268	0,768464	0,079947	0,635323
3	0,004	0,101	0,952991	0,858389	0,736626	0,07765	0,595729
3	0,006	0,105	0,949092	0,843582	0,71048	0,077359	0,559847
3	0,008	0,108	0,946057	0,831182	0,689042	0,076361	0,531959
3	0,01	0,112	0,941862	0,814616	0,659559	0,075826	0,491329
3	0,012	0,116	0,937495	0,796984	0,627961	0,075123	0,447501
3	0,014	0,116	0,937495	0,793937	0,624898	0,072353	0,450595

Окончание табл. 2.9

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,066177	0,474444	0,054019	0,273988	0,040724	0,444233	0,280533	0,724766511
0,059442	0,435445	0,044515	0,251389	0,029835	0,462151	0,23899	0,70114
0,056439	0,392784	0,039518	0,207738	0,023277	0,476116	0,213833	0,689949
0,053024	0,363151	0,03448	0,186221	0,017389	0,486058	0,193164	0,679222
0,04966	0,315264	0,029015	0,140583	0,010532	0,49894	0,17008	0,669019
0,046019	0,263572	0,023178	0,093914	0,00347	0,511148	0,148405	0,659554
0,042066	0,265823	0,018605	0	0	0,513547	0,136706	0,6502536

Таблица 2.10

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 3,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
3,5	0	0,086	0,953624	0,881062	0,774441	0,079823	0,644024
3,5	0,004	0,092	0,94674	0,85779	0,734446	0,078333	0,591385
3,5	0,006	0,095	0,943103	0,845168	0,712733	0,077468	0,562861
3,5	0,008	0,098	0,939335	0,83185	0,689779	0,07651	0,532711
3,5	0,01	0,101	0,935435	0,817802	0,665498	0,07545	0,50079
3,5	0,012	0,106	0,928633	0,794702	0,623682	0,075339	0,440631
3,5	0,014	0,105	0,930024	0,795845	0,629046	0,071934	0,45766

Окончание табл. 2.10

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,066179	0,486801	0,054254	0,292096	0,041438	0,438584	0,285908	0,724491978
0,059861	0,428135	0,044663	0,239586	0,02958	0,462684	0,238283	0,700966
0,056558	0,396753	0,039687	0,213114	0,023551	0,474164	0,215626	0,68979
0,053138	0,363874	0,034576	0,18686	0,017469	0,485235	0,193856	0,679091
0,049585	0,329384	0,029313	0,161327	0,011353	0,495872	0,17306	0,668932
0,046005	0,253181	0,022865	0,078442	0,00275	0,513	0,146527	0,659527
0,04188	0,294935	0,019195	0,170561	0,000915	0,508911	0,140468	0,649379

Таблица 2.11

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 4

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
4	0	0,078	0,950082	0,883728	0,777045	0,080723	0,646266
4	0,004	0,084	0,941862	0,858985	0,73419	0,079472	0,588938
4	0,006	0,086	0,93897	0,849244	0,718105	0,077967	0,569591
4	0,008	0,089	0,934486	0,835165	0,693742	0,077112	0,537189
4	0,01	0,092	0,929826	0,820254	0,667894	0,076128	0,502789
4	0,012	0,096	0,923333	0,8	0,631756	0,075584	0,452015
4	0,014	0,096	0,923333	0,796984	0,629242	0,072605	0,456348

Окончание табл. 2.11

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
0,066833	0,488432	0,054745	0,292825	0,041782	0,434287	0,289783	0,724069819
0,060617	0,422572	0,045075	0,229218	0,029523	0,460775	0,239724	0,700499
0,056997	0,405097	0,040173	0,223762	0,024185	0,469076	0,220278	0,689354
0,053619	0,36881	0,035022	0,192281	0,017917	0,481336	0,197322	0,678658
0,050076	0,330603	0,02968	0,161146	0,01158	0,493103	0,175404	0,668506
0,046421	0,268798	0,023593	0,099714	0,00391	0,50816	0,150931	0,65909
0,042296	0,291407	0,019399	0,164047	0,000927	0,507581	0,141585	0,649166

Анализ результатов. Некоторые результаты расчетов представлены на рисунках. При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается (рис. 2.17) [65]. При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

Следовательно, с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок изменяются неравнозначно.

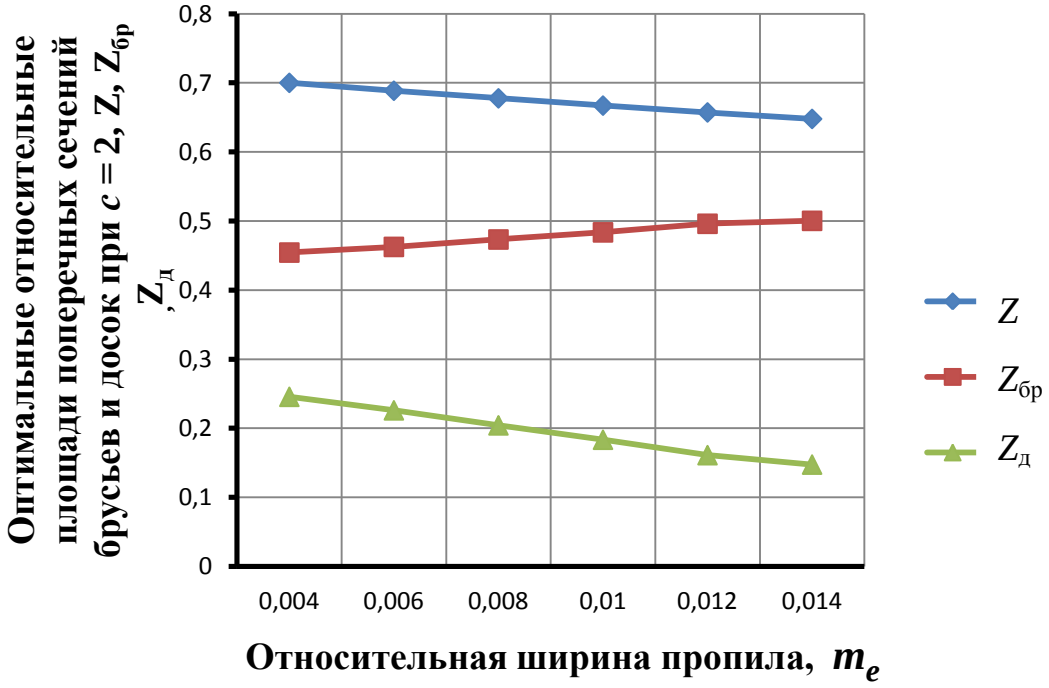


Рис. 2.17. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и досок при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.18). Следует отметить, что уменьшение относительной ширины первой пары боковых обрезных досок происходит несколько замедленнее, чем остальные пары боковых обрезных досок. Пользуясь этим графиком, зная относительную ширину пропила, можно легко определить оптимальную относительную ширину, а затем и реальную ширину боковых обрезных досок.

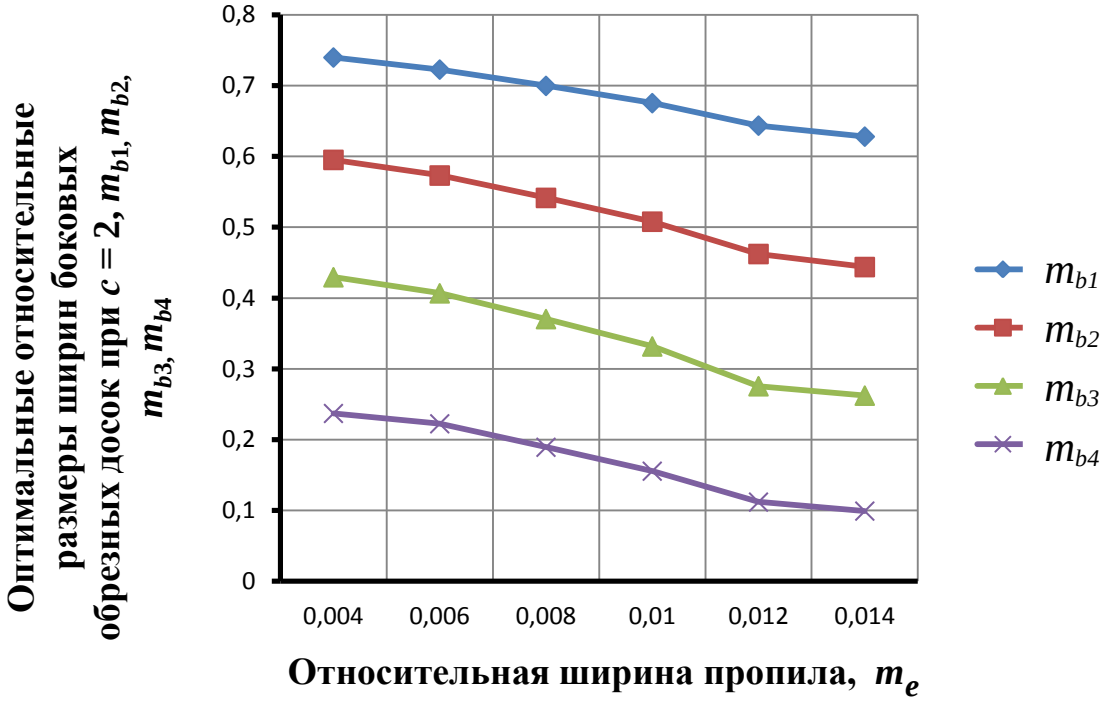


Рис. 2.18. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.19). При этом оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски уменьшается более интенсивно и при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}014$ становится почти равной нулю. Оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила уменьшается незначительно. Относительные толщины других боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила уменьшаются более существенно.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (см. рис. 2.20). Сумма оптимальных относительных толщин брусьев с увеличением относительной ширины пропила возрастает. При этом относительные ширины пластей центрального бруса немного уменьшаются, а относительные ширины боковых брусьев уменьшаются в большей степени [65]. Следовательно, относительная ширина пропила изменяет все размеры брусьев и боковых обрезных досок неравнозначно.

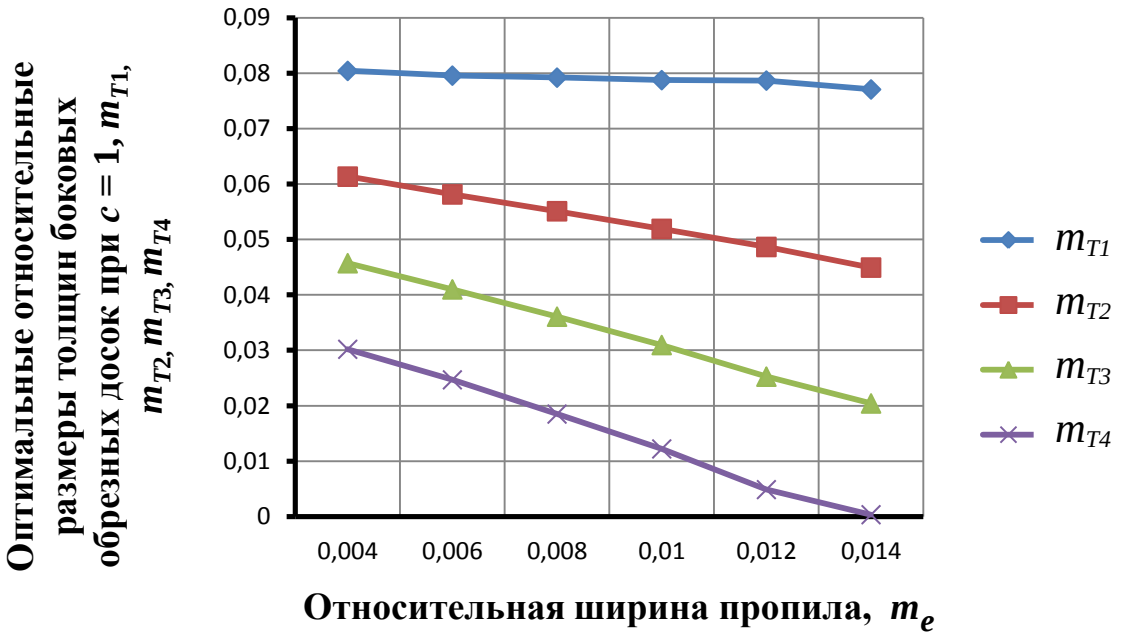


Рис. 2.19. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 2.21) [55]. При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

Если сравнить рис. 2.21 и 2.17, то можно отметить, что целевая функция отличается незначительно, относительная площадь поперечного сечения досок при c = 2,0 принимает большее значение, а относительная площадь поперечного сечения брусьев, наоборот, при c = 3,0 (см. рис. 2.21) принимает большее значение по сравнению с вариантом, когда коэффициент c = 2,0 (см. рис. 2.17).

Следовательно, выбирая величину коэффициента изменения толщин брусьев с в пределах 1,0…4.0 можно получить необходимые размеры брусьев и боковых обрезных досок, которые требуются по спецификации (заказу) потребителя.

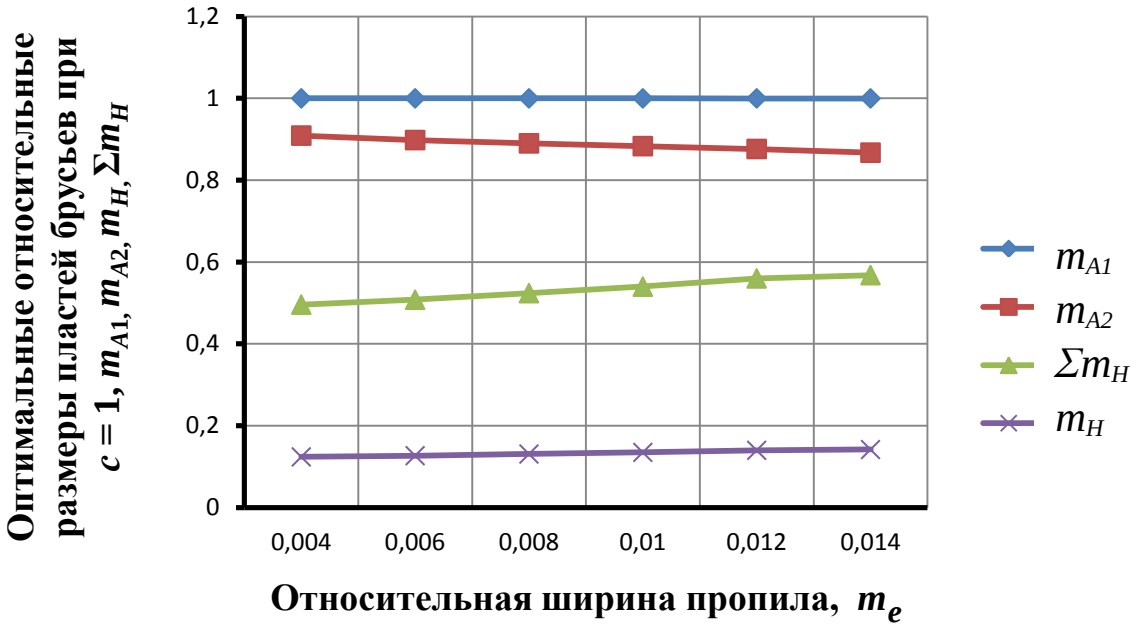


Рис. 2.20. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев при коэффициенте c = 2,0

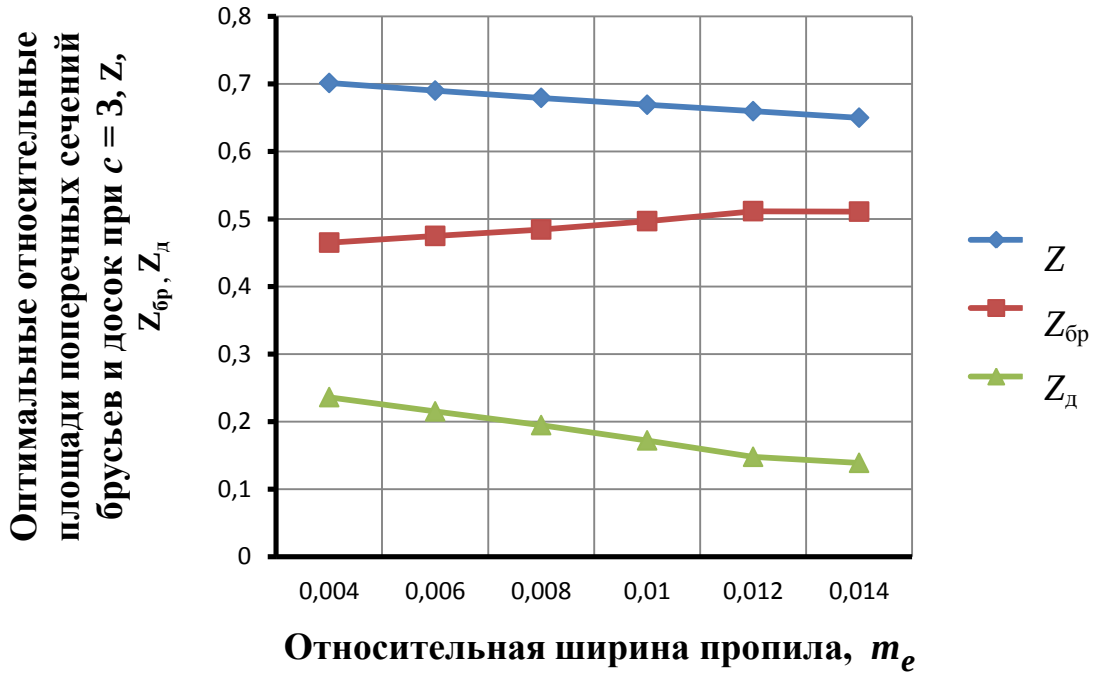


Рис. 2.21. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.22). Оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила уменьшается в большей степени, чем другие боковые доски, и при $m_e = 0{,}014$ принимает нулевое значение.

Следует обратить внимание, прежде всего, на размеры крайней (четвертой) пары боковых обрезных досок. Так, при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ оптимальная относительная ширина этой боковой обрезной доски составит $m_{b4} = 0{,}21$. Тогда ширина этой доски, при диаметре пиловочника 60 см, составит $b_4 = 126$ мм. Это вполне приемлемо для получения пиломатериалов стандартных размеров.

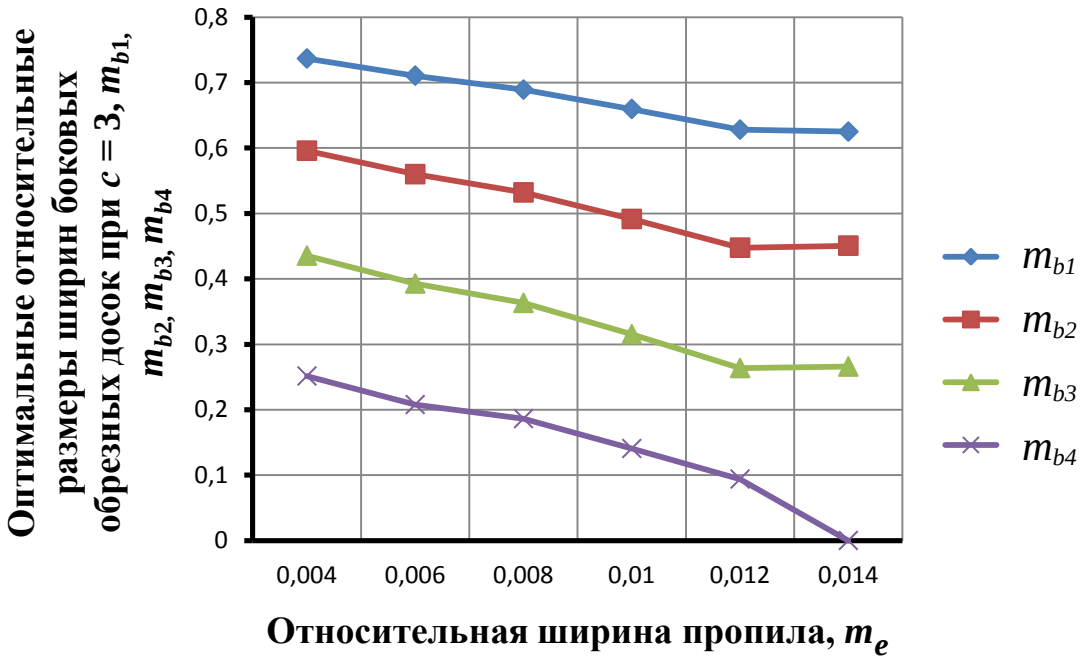


Рис. 2.22. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.23). При этом оптимальная относительная толщина крайней обрезной боковой доски при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}014$ стремится к 0.

Прежде всего, необходимо обратить внимание на толщину крайней (четвертой) боковой обрезной доски. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ оптимальная относительная толщина этой доски составит $m_{T4} = 0{,}024$. Тогда оптимальная толщина этой доски при распиловке пиловочника диаметром в вершинном торце d = 60 см составит всего лишь 14,4 мм. Такие доски считаются тонкими. Следовательно, для получения доски толщиной 19 мм необходимо осуществлять распиловку пиловочника диаметром 70 см и более.

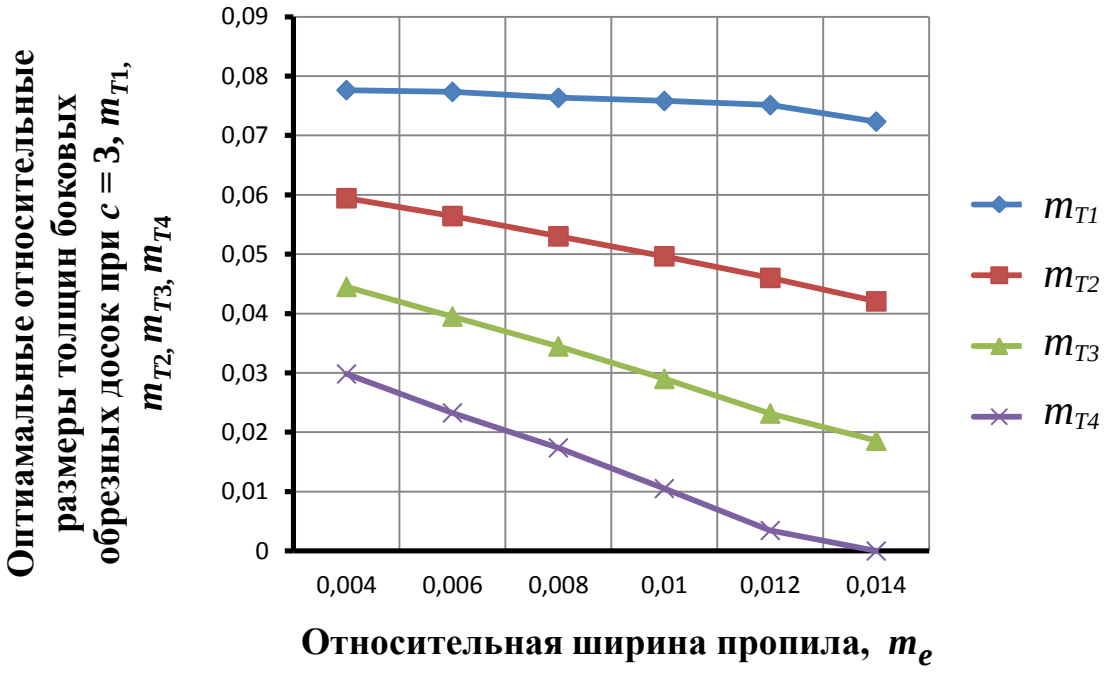


Рис. 2.23. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (см. рис. 2.24), а суммарная оптимальная относительная толщина всех трех брусьев с увеличением относительной ширины пропила возрастает. При этом оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев уменьшаются.

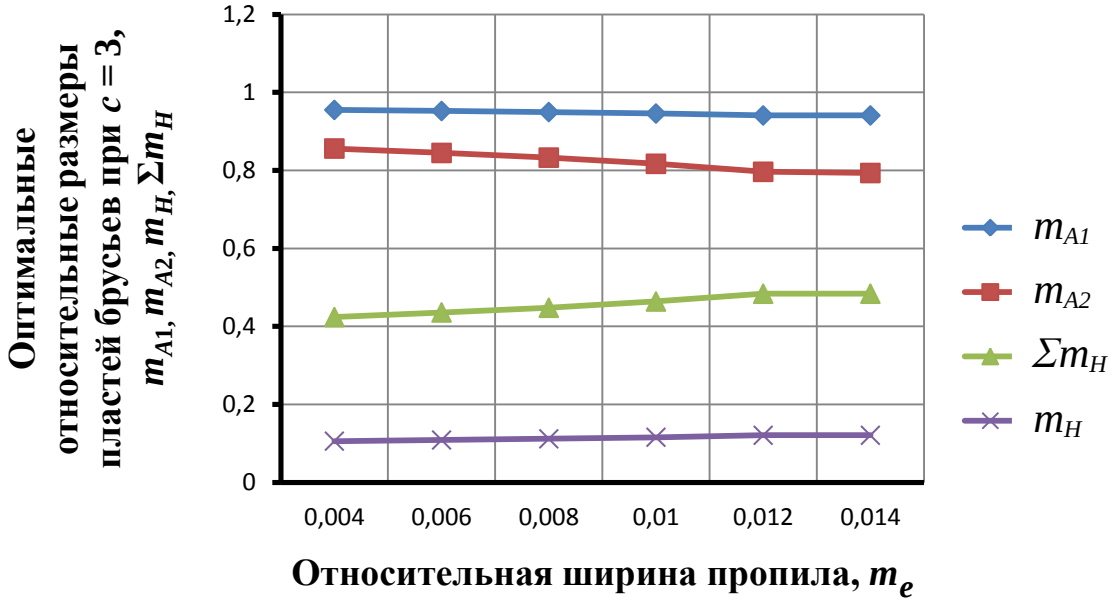


Рис. 2.24. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины пластей и толщины брусьев при коэффициенте c = 3,0

Следует также отметить, что при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает.

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок вначале уменьшается и при c = 3,0 и более увеличивается. Целевая функция с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c вначале возрастает и при c = 3,0 принимает максимальное значение, а затем с увеличением коэффициента c уменьшается. Таким образом, ширина пропила оказывает существенное влияние на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок. Исследованиями установлена главная закономерность: с увеличением ширины пропила оптимальная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. Этот важный аспект необходимо учитывать при расчете и составлении поставов.

2.5. Определение оптимальных размеров брусьев разной толщины и боковых обрезных досок с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски

Постановка и математическая модель задачи оптимизации. При раскрое брусьев на обрезные доски возникают потери древесины в опилки и объем пиломатериалов снижается. В связи с этим величина целевой функции изменится и изменятся ее составляющие [91]. Предполагаем, что это, возможно, повлияет на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок [96]. Рассматриваем схему раскроя пиловочника с учетом ширины пропила, а также с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски (рис. 2.25) [91].

Целевую функцию представляем в виде суммы площадей поперечных сечений, получаемых пиломатериалов в виде брусьев и боковых обрезных досок.

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}.$$

С учетом этих потерь площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса, можно определить по формуле:

$$Z_{\text{ц}} = cHA_1 - cH(n_{\text{ц}} + 1)e. \quad (2.165)$$

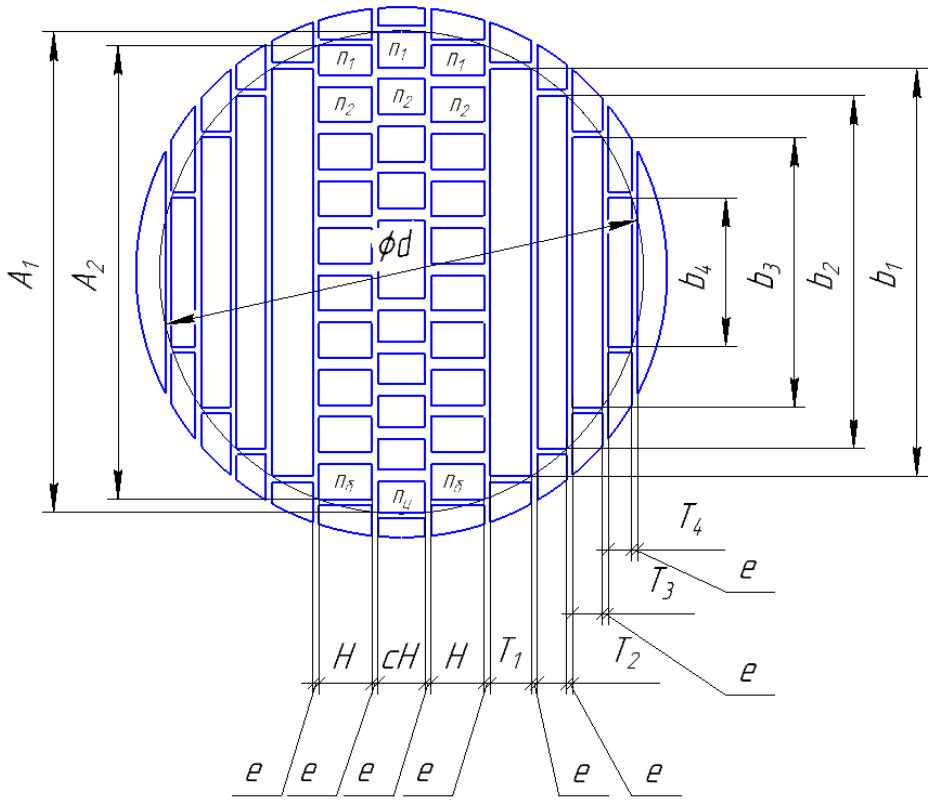


Рис. 2.25. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с их последующей распиловкой на обрезные доски с учетом ширины пропила

Площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев, определится по формуле:

$$Z_{\text{б}} = 2HA_2 - 2H(n_{\text{б}} + 1)e. \quad (2.166)$$

Суммарная площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев с учетом ширины пропила, определится по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = Z_{\text{ц}} + Z_{\text{б}} = cH\left(A_1 - \left(n_{\text{ц}} + 1\right)e\right) + 2H(A_2 - (n_{\text{б}} + 1)e). \quad (2.167)$$

В относительных единицах площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев, определится по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H\left(m_{A_1} - \left(n_{\text{ц}} + 1\right)m_e\right) + 2m_H(m_{A_2} - (n_{\text{б}} + 1)m_e). \quad (2.168)$$

Поэтому при определении оптимальных размеров брусьев и досок с учетом ширины пропила необходимо в алгоритме решения за-

дачи вместо формулы (2.162) использовать формулу (2.168). При этом число досок, выпиливаемых из центрального бруса, можно определить по формуле:

$$n_{\text{ц}} = \frac{A_1}{T_{\text{ц}} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{\text{ц}}} + m_e}. \quad (2.169)$$

Число досок, получаемых из бокового бруса, можно определить по формуле:

$$n_{\text{б}} = \frac{A_2}{T_{\text{б}} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{\text{б}}} + m_e}. \quad (2.170)$$

При расчете количества досок, получаемых из брусьев, принимается целое число.

На практике возможен вариант, когда необходимые толщины обрезных досок известны. Тогда по формулам (2.169) и (2.170) определяем количество выпиливаемых досок необходимого размера из центрального и бокового брусьев. Затем площадь поперечного сечения этих досок определяем по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{T_{\text{ц}}} n_{\text{ц}} + 2m_H m_{T_{\text{б}}} n_{\text{б}}. \quad (2.171)$$

Далее по алгоритму решения задачи, представленному в разделе 2.4 (формулы 2.151…2.164), определяем оптимальные размеры брусьев и досок.

Выполнение расчетов. Расчеты производятся в такой последовательности. Задаемся значением величины коэффициента c, а также относительной шириной пропила m_e и изменяем относительную толщину бокового бруса m_H, а затем определяем относительные ширины пластей этих брусьев m_{A1} и m_{A2}. Далее по формулам (2.169) и (2.170) определяем расчетное количество выпиливаемых досок из этих брусьев с учетом относительной ширины пропила m_e. Затем выбираем целое число для выпиливаемых досок из брусьев. Далее определяем все размеры брусьев и досок, а также площади поперечных сечений брусьев и досок. Анализируем результаты расчетов для различных вариантов относительных толщин брусьев m_H и находим наилучший (оптимальный) вариант [91]. Результаты расчетов заносим в табл. 2.12.

Таблица 2.12

Оптимальные относительные размеры и площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок с учетом последующей распиловки брусьев при относительной ширине пропила, равной m_e = 0,01

c	m_e	$n_б$	$n_ц$	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}
1	0,01	0	0	0,154	0,987439	0,869462	0,72082	0,089561	0,553549
1	0,01	6	8	0,155	0,987914	0,874514	0,732284	0,088	0,573417
1	0,01	8	10	0,155	0,987914	0,874514	0,732284	0,088	0,573417
1	0,01	10	12	0,154	0,988071	0,876171	0,736033	0,087473	0,579886
1	0,01	12	14	0,153	0,988226	0,877815	0,739747	0,086943	0,586279
1	0,01	14	16	0,151	0,988534	0,881062	0,747068	0,085874	0,594247
1,5	0,01	0	0	0,147	0,975725	0,847372	0,698334	0,082386	0,534167
1,5	0,01	6	8	0,144	0,976393	0,851718	0,707486	0,081364	0,549534
1,5	0,01	8	10	0,143	0,976724	0,853862	0,711987	0,080846	0,557062
1,5	0,01	10	12	0,143	0,976724	0,853862	0,711987	0,080846	0,557062
1,5	0,01	12	14	0,142	0,977052	0,855985	0,71644	0,080325	0,564489
1,5	0,01	14	16	0,140	0,975725	0,847372	0,712378	0,075398	0,563823
2	0,01	0	0	0,135	0,963419	0,831182	0,680753	0,078257	0,516937
2	0,01	6	8	0,132	0,964523	0,836478	0,691417	0,077228	0,534495
2	0,01	8	10	0,131	0,965068	0,839085	0,696651	0,076705	0,543074
2	0,01	10	12	0,131	0,965068	0,839085	0,696651	0,076705	0,543074
2	0,01	12	14	0,130	0,965609	0,841665	0,701821	0,076177	0,551522
2	0,01	14	16	0,130	0,95823	0,805938	0,672003	0,064274	0,530343
2,5	0,01	0	0	0,123	0,952352	0,822338	0,671471	0,076015	0,508219
2,5	0,01	6	8	0,120	0,953939	0,828493	0,683549	0,074953	0,527864
2,5	0,01	8	10	0,120	0,953939	0,828493	0,683549	0,074953	0,527864
2,5	0,01	10	12	0,119	0,954722	0,831517	0,689464	0,07441	0,537438
2,5	0,01	12	14	0,118	0,955497	0,834505	0,6953	0,07386	0,546854
2,5	0,01	14	16	0,117	0,934866	0,752143	0,619804	0,052878	0,485901
3	0,01	0	0	0,112	0,942927	0,818153	0,666435	0,075282	0,502513
3	0,01	6	8	0,109	0,945024	0,825091	0,679881	0,074161	0,524262
3	0,01	8	10	0,109	0,945024	0,825091	0,679881	0,074161	0,524262
3	0,01	10	12	0,108	0,946057	0,828493	0,686454	0,073587	0,534839
3	0,01	12	14	0,107	0,947079	0,83185	0,69293	0,073002	0,545225
3	0,01	14	16	0,106	0,90613	0,688749	0,561828	0,041127	0,440714
3,5	0,01	0	0	0,101	0,935435	0,817802	0,665498	0,07545	0,50079
3,5	0,01	6	8	0,099	0,93805	0,825433	0,68024	0,074245	0,524603
3,5	0,01	8	10	0,099	0,93805	0,825433	0,68024	0,074245	0,524603
3,5	0,01	10	12	0,098	0,939335	0,829168	0,687434	0,073623	0,536158
3,5	0,01	12	14	0,098	0,939335	0,829168	0,687434	0,073623	0,536158
3,5	0,01	14	16	0,097	0,940606	0,832849	0,694513	0,07299	0,547489

Продолжение табл. 2.12

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$Z_ц$	$Z_б$	$Z_{бр}$	$Z_Д$	Z
0,059847	0,37347	0,037413	0,187614	0,0173	0,154435	0,27159	0,426025	0,229808	0,655833628
0,059132	0,404449	0,037649	0,234183	0,018816	0,139177	0,249399	0,388576	0,235963	0,624539
0,059132	0,404449	0,037649	0,234183	0,018816	0,136077	0,243199	0,379276	0,235963	0,61313
0,058876	0,414452	0,037687	0,248944	0,019223	0,132143	0,235981	0,368124	0,237858	0,602082
0,058612	0,424301	0,037706	0,263362	0,019588	0,128249	0,228831	0,35708	0,239672	0,591282
0,059768	0,432461	0,038685	0,27115	0,020442	0,123599	0,220781	0,344379	0,243886	0,588265

Окончание табл 2.12

m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	$Z_{ц}$	$Z_{б}$	$Z_{бр}$	$Z_{д}$	Z
0,054804	0,360702	0,033651	0,186675	0,01487	0,211494	0,244513	0,456006	0,203442	0,659448488
0,054372	0,384207	0,033888	0,221343	0,015975	0,191461	0,225135	0,416596	0,207997	0,624593
0,054139	0,395639	0,033968	0,23794	0,016437	0,185912	0,218464	0,404377	0,210141	0,61339
0,054139	0,395639	0,033968	0,23794	0,016437	0,181622	0,212744	0,394367	0,210141	0,602667
0,053896	0,406867	0,034023	0,254091	0,016847	0,176162	0,20618	0,382342	0,21219	0,591962
0,05205	0,411336	0,032794	0,265998	0,016245	0,176454	0,203633	0,380086	0,201739	0,581825
0,051755	0,34553	0,031192	0,176102	0,012982	0,255516	0,220077	0,475593	0,186183	0,661776183
0,051358	0,372076	0,031515	0,214836	0,014224	0,230874	0,20235	0,433224	0,191258	0,624483
0,051137	0,384939	0,031628	0,233273	0,014735	0,224028	0,19626	0,420288	0,193641	0,614929
0,051137	0,384939	0,031628	0,233273	0,014735	0,218788	0,19102	0,409808	0,193641	0,603449
0,050903	0,397543	0,031712	0,251154	0,015182	0,212058	0,185033	0,397091	0,195913	0,593004
0,043618	0,390892	0,026326	0,26691	0,011643	0,225434	0,187598	0,413032	0,159446	0,572478
0,050099	0,338425	0,029883	0,172246	0,01203	0,287417	0,19821	0,485628	0,177377	0,663004635
0,049712	0,367891	0,03027	0,214872	0,013387	0,259182	0,182038	0,44122	0,182975	0,624195
0,049712	0,367891	0,03027	0,214872	0,013387	0,253182	0,177238	0,43042	0,182975	0,61523
0,049492	0,382122	0,030404	0,235064	0,013934	0,245355	0,171721	0,417076	0,18559	0,605986
0,049254	0,396038	0,030503	0,254593	0,014407	0,237622	0,166263	0,403885	0,188076	0,596751
0,034628	0,361326	0,019213	0,262163	0,006292	0,271528	0,171009	0,442536	0,116384	0,57892
0,049503	0,332174	0,029324	0,165639	0,011484	0,310665	0,17941	0,490075	0,173379	0,663453246
0,049117	0,364701	0,029784	0,212618	0,013005	0,279593	0,16461	0,444203	0,179597	0,6238
0,049117	0,364701	0,029784	0,212618	0,013005	0,273053	0,16025	0,433303	0,179597	0,61392
0,04889	0,380362	0,029942	0,234757	0,013608	0,264402	0,155194	0,419597	0,182491	0,604508
0,048643	0,395647	0,030056	0,256109	0,014123	0,255862	0,150196	0,406058	0,185231	0,594539
0,025197	0,338072	0,011736	0,27273	0,000485	0,311383	0,151927	0,46331	0,076622	0,579932
0,049585	0,329384	0,029313	0,161327	0,011353	0,327141	0,163176	0,490317	0,17306	0,663377199
0,049179	0,364983	0,029833	0,212782	0,013043	0,293849	0,149576	0,443425	0,179935	0,623360229
0,049179	0,364983	0,029833	0,212782	0,013043	0,286919	0,145616	0,432535	0,179935	0,612470229
0,048935	0,382072	0,030008	0,236912	0,013699	0,277602	0,140957	0,418559	0,183118	0,601676675
0,048935	0,382072	0,030008	0,236912	0,013699	0,270742	0,137037	0,407779	0,183118	0,590896675
0,048666	0,39872	0,03013	0,26012	0,014252	0,261621	0,132473	0,394093	0,186115	0,580208349

Анализ результатов. По результатам расчетов построены графики влияния коэффициента изменения толщин брусьев *c* на оптимальные относительные площади поперечных сечений обрезных досок для различных вариантов распиловки брусьев на обрезные доски.

При последующей распиловке брусьев на обрезные доски и выпиливании из центрального бруса 10 досок, а из боковых брусьев по 8 досок с увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых досок уменьшается, оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из центрального бруса, возрастает (рис. 2.26).

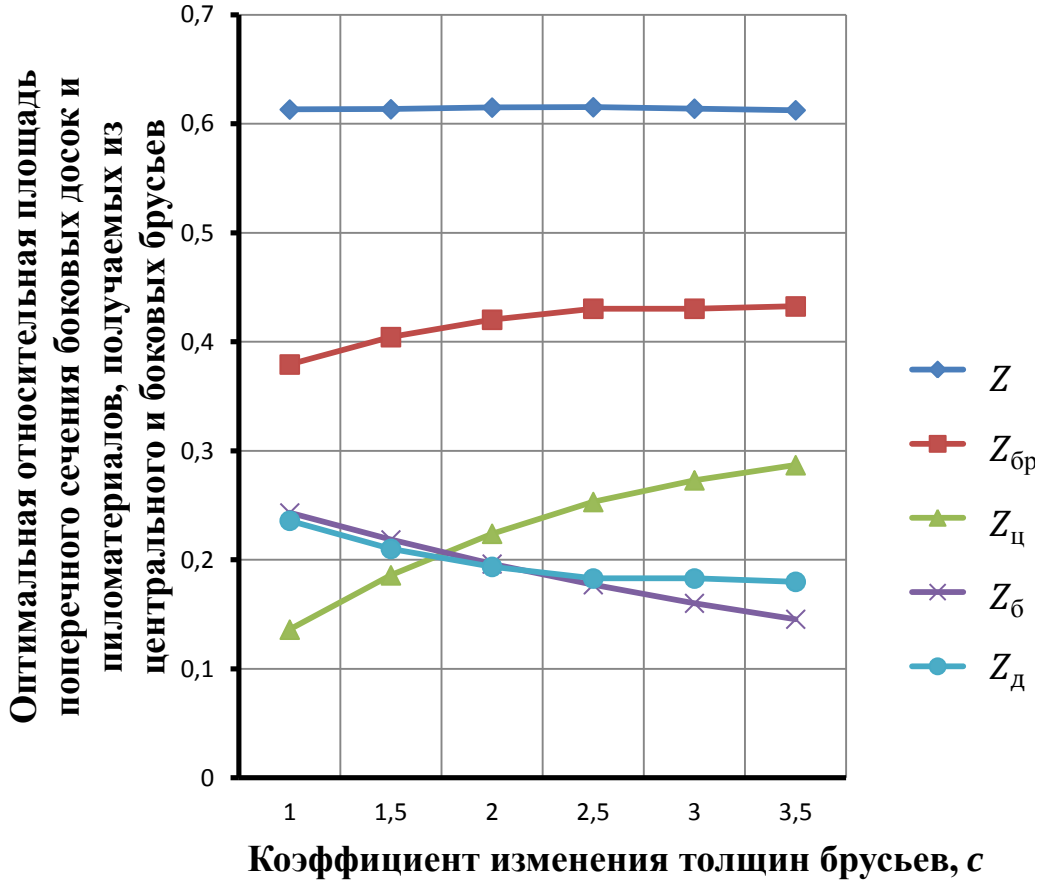


Рис. 2.26. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых досок $Z_д$ с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски при $m_e = 0{,}01$, $n_б = 8$, $n_ц = 10$

При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, возрастает. Общая суммарная площадь поперечного сечения обрезных досок вначале немного возрастает до $c = 2{,}5$, а затем незначительно уменьшается. Таким образом, с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски глобальный максимум целевой функции смещается к коэффициенту $c = 2{,}5$.

При выпиливании из центрального бруса 12 обрезных досок, а из боковых по 10 обрезных досок с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (рис. 2.27). При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c уменьшается.

Оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок Z при этом изменяется незначительно, принимая максимальное значение при c = 2,5 [91].

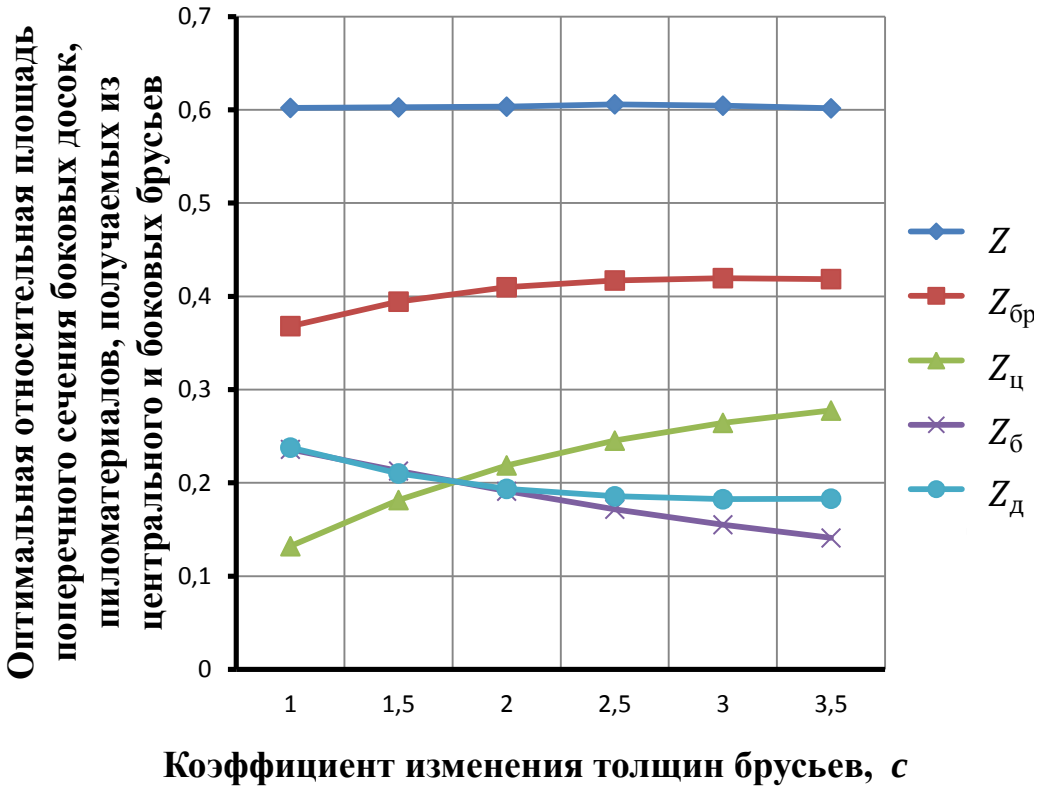


Рис. 2.27. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_{бр}$ брусьев при m_e = 0,01, $n_б$ = 10, $n_ц$ = 12

При раскрое центрального бруса с получением $n_ц$ = 14 обрезных досок, а из боковых брусьев получают по $n_б$ = 12 обрезных досок, с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 2.28) [91]. При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c уменьшается. В сумме оптимальная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает.

В итоге общая сумма всех оптимальных относительных площадей поперечных досок, получаемых из пиловочника Z, изменяется незначительно и принимает максимальное значение при c = 2,5.

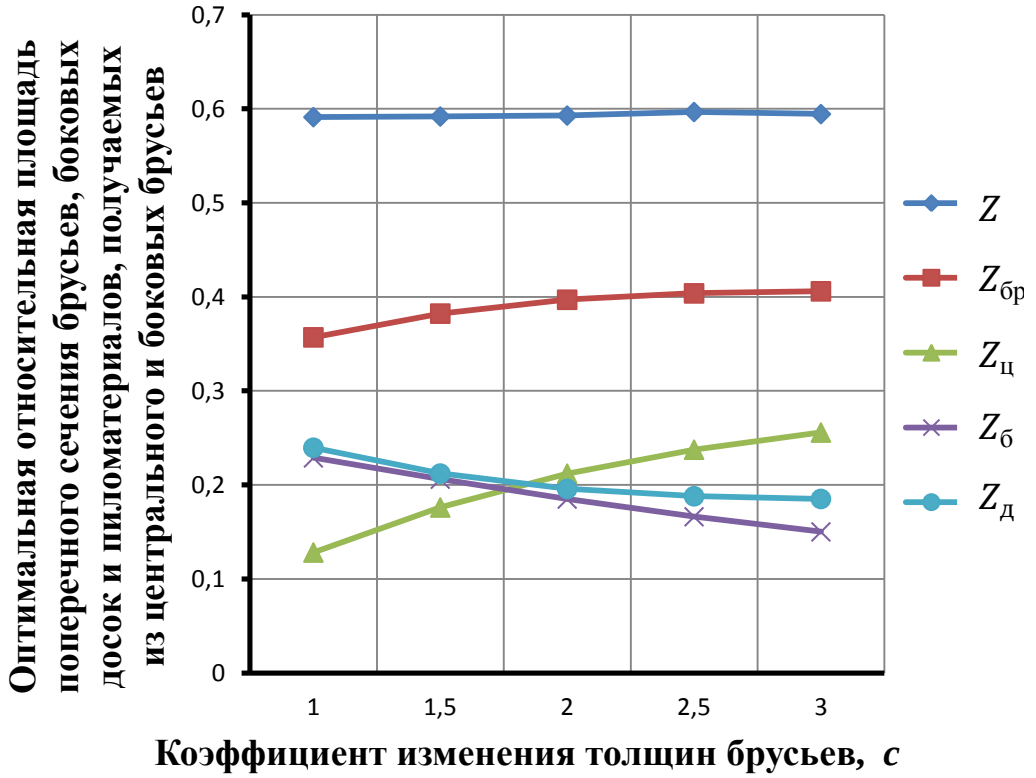


Рис. 2.28. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_{бр}$ брусьев при m_e = 0,01, $n_б$ = 12, $n_ц$ = 14

При распиловке центрального бруса с получением 16 обрезных досок, а каждый боковой брус распиливают на 14 обрезных досок, с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 2.29) [91]. При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c также уменьшается. Оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает. В итоге общая сумма всех оптимальных относительных площадей поперечных сечений досок, получаемых из пиловочника Z, уменьшается незначительно.

Площадь поперечного сечения боковых обрезных досок определяется по формулам, представленных в предыдущем разделе 2.4.

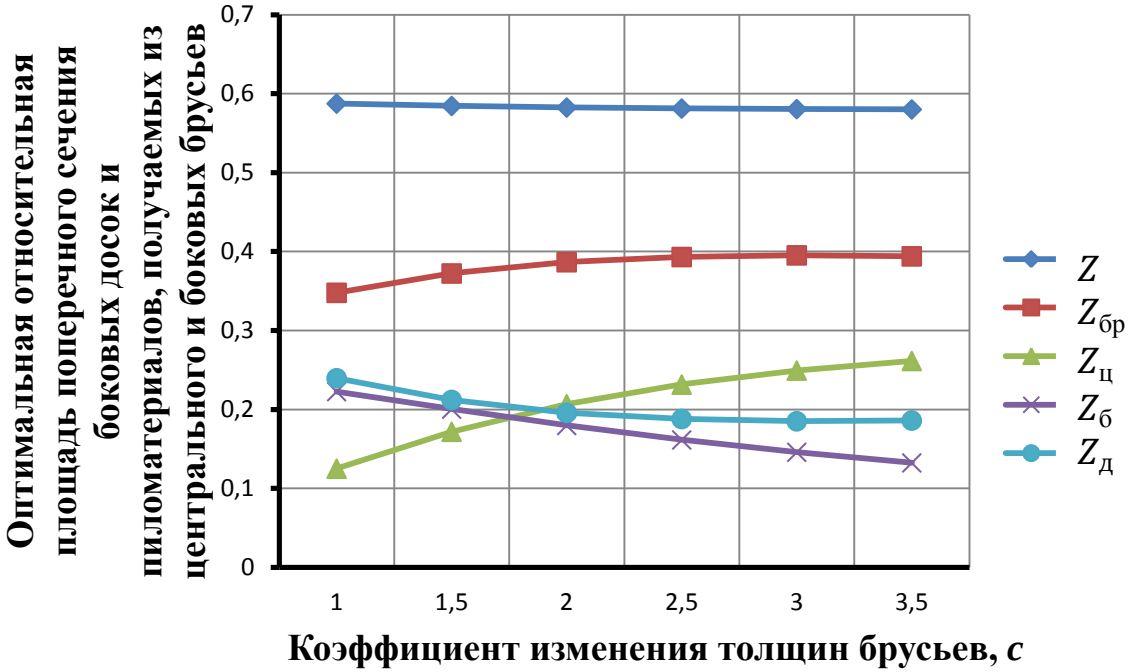


Рис. 2.29. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_{бр}$ брусьев при m_e = 0,01, $n_б$ = 14, $n_ц$ = 16

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 1,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ возрастает незначительно, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения получаемых досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшается (см. рис. 2.30). В итоге суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и досок, получаемых из брусьев, уменьшается. Это объясняется тем, что потери древесины в опилки при раскрое брусьев с увеличением количества пропилов превышает прирост оптимальных относительных размеров боковых обрезных досок.

Сравнивая между собой результаты (см. рис. 2.26…. 2.29), следует отметить, что при увеличении коэффициента изменения толщин брусьев c наблюдается общая закономерность изменения площадей поперечного сечения досок получаемых из брусьев и боковых обрезных досок, а также общей площади поперечного сечения всех получаемых пиломатериалов. Однако, с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев, все составляющие целевой функции изменяются и в итоге целевая функция уменьшается.

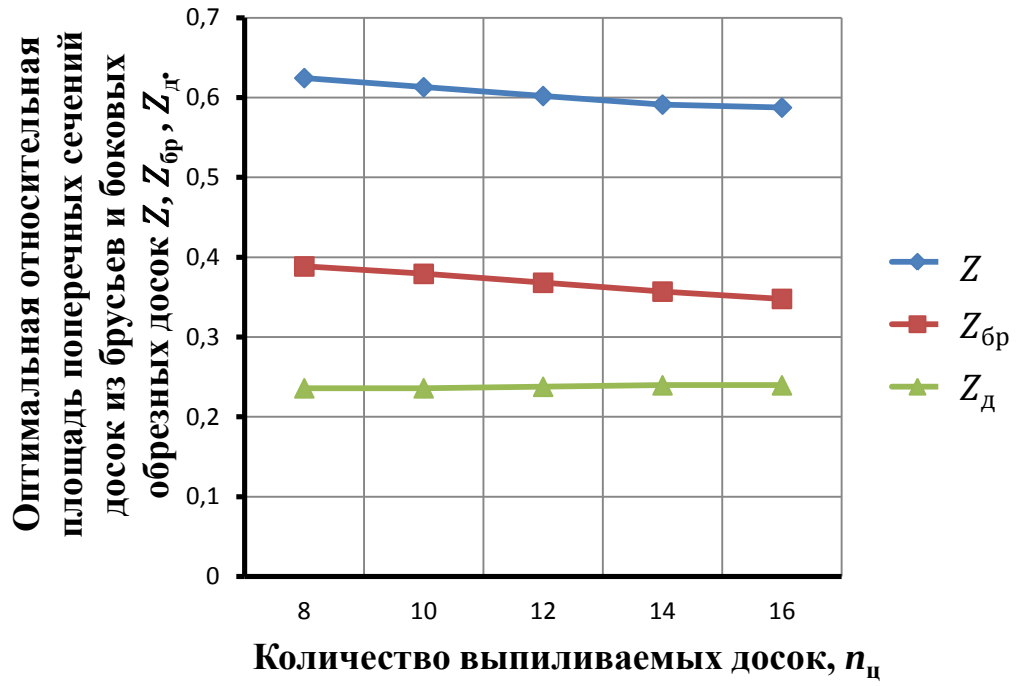


Рис. 2.30. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых досок $Z_д$ при коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,5 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальные относительные площади поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ возрастают незначительно, а оптимальные относительные площади поперечного сечения получаемых досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшаются (см. рис. 2.31). В результате суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и досок, получаемых из брусьев, уменьшается.

При оптимальном значении коэффициента изменения толщин брусьев c = 3,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ незначительно возрастают, а оптимальные относительные площади поперечных сечения досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, уменьшаются (см. рис. 2.32). Следовательно, уменьшение выхода обрезных пиломатериалов происходит за счет потерь древесины в опилки при последующем раскрое брусьев.

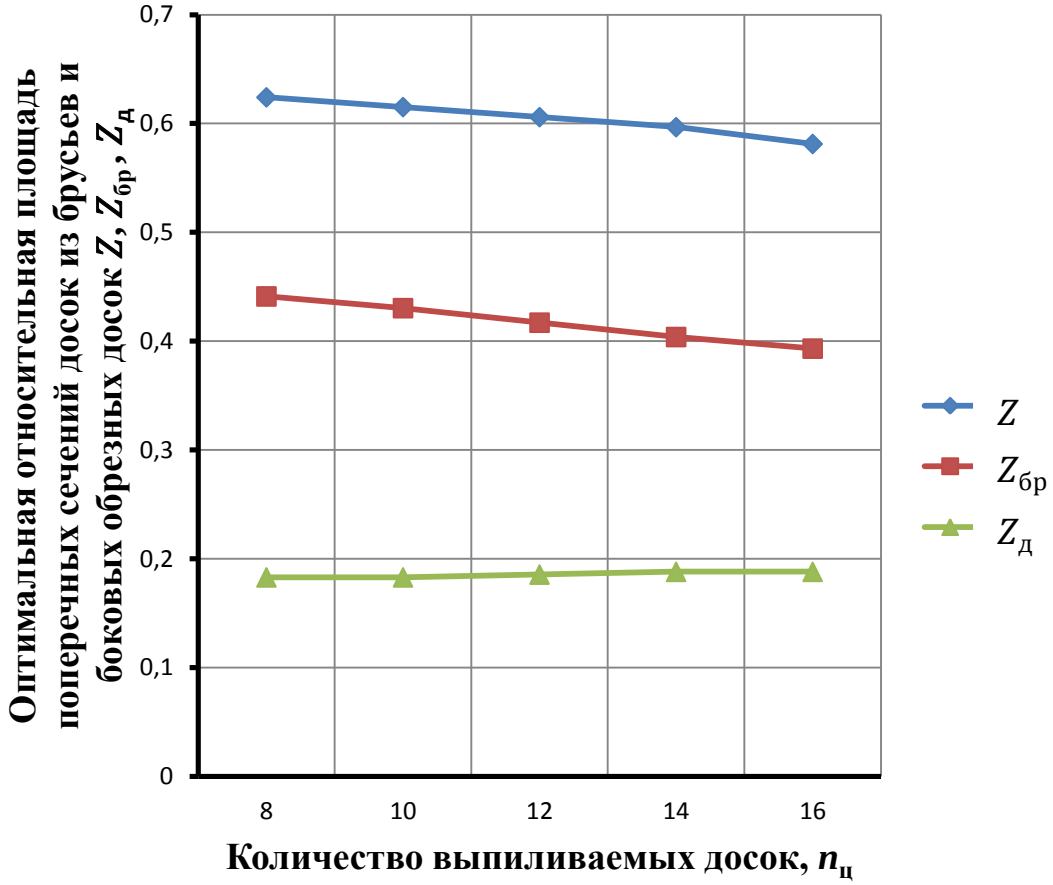


Рис. 2.31. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых досок $Z_д$ при коэффициенте c = 2,5

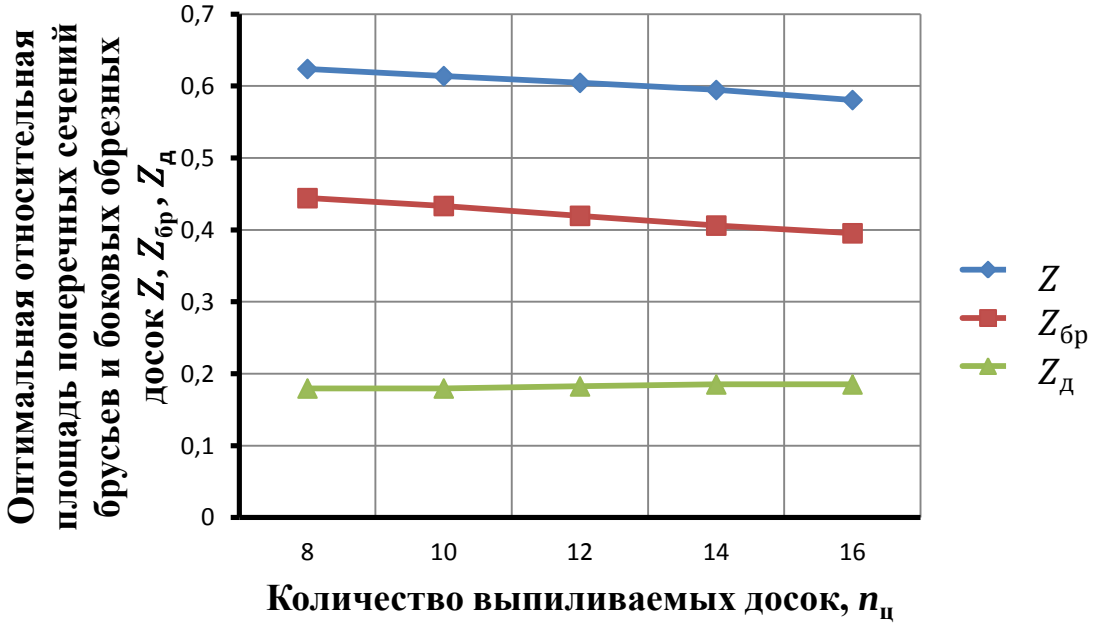


Рис. 2.32. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых досок $Z_д$ при коэффициенте c = 3,0

Расчеты показали сложный характер изменения размерных параметров получаемых брусьев и боковых обрезных досок при последующей распиловке брусьев на обрезные доски.

С увеличением количества выпиливаемых обрезных досок из центрального бруса $n_ц$ оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшаются, как при c = 1,0 (см. рис. 2.30), так и при c = 3,0 (см. рис. 2.32). При этом оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ возрастают для любых значений коэффициента c. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений досок из брусьев и боковых обрезных досок с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ уменьшается. Такая закономерность справедлива для любого значения коэффициента c. При этом наблюдается разное сочетание $Z_д$ и $Z_{бр}$ для различных значений коэффициента c.

Сравнивая графики на рис. 2.30…2.32, следует отметить, что оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c уменьшается. При этом с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, возрастает. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев и боковых обрезных досок, уменьшается незначительно.

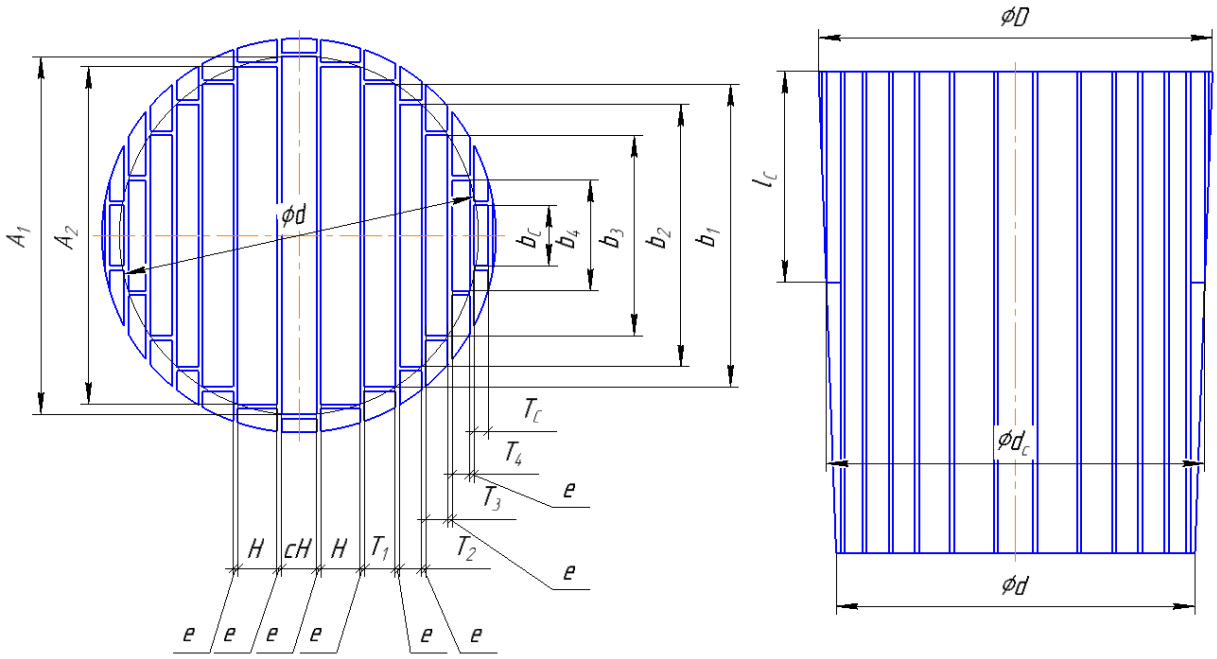
Сравнивая эти закономерности, можно отметить, что при увеличении количества выпиливаемых обрезных досок, как из центрального бруса, так и из боковых брусьев, выход обрезных пиломатериалов несколько уменьшается, так как потери древесины в опилки по сравнению с вариантом, когда выпиливается меньшее количество обрезных досок, увеличивается.

Следовательно, размеры брусьев и боковых обрезных досок не только просто взаимосвязаны, но и имеют сложную противоречивую зависимость, в том числе и от последующей распиловки брусьев на обрезные доски.

Таким образом, впервые было установлено влияние последующего раскроя брусьев на обрезные доски на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок.

2.6. Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны

Постановка и математическая модель задачи. С учетом сбеговой зоны схема раскроя пилвочника представлена на рис. 2.33 [89, 90].



а *б*

Рис. 2.33. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и четырех пар боковых досок с учетом ширины пропила и величины сбега бревна: *а* – поперечное сечение; *б* – продольное сечение

Для решения задачи оптимизации составляем уравнение целевой функции [94, 95]. В качестве критерия оптимальности выбираем объем получаемых пиломатериалов. Целевая функция записывается в виде суммарного объема пиломатериалов V, получаемого из пифагорической зоны $V_{\text{П}}$, и объема обрезных досок $V_{\text{с}}$, получаемого из сбеговой зоны [94]:

$$V = V_{\text{П}} + V_{\text{с}}. \qquad (2.172)$$

Объем пиломатериалов, получаемый из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$V_{\text{П}} = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 2b_4T_4). \qquad (2.173)$$

Объем обрезных досок, получаемый из сбеговой зоны, можно записать в следующем виде:

$$V_{\text{с}} = 2b_{\text{с}}T_{\text{с}}l_{\text{с}}. \qquad (2.174)$$

Диаметр бревна в нижнем торце D можно выразить в следующем виде:

$$D = d + K_c dl = d(1 + K_c l). \quad (2.175)$$

Диаметр пиловочника, при котором начинаем выпиливать сбеговую доску, определится по уравнению:

$$d_c = d\big(1 + K_c(l - l_c)\big). \quad (2.176)$$

Целевая функция (2.172) составлена с учетом следующего предположения. При увеличении пифагорической зоны объем получаемых пиломатериалов из этой зоны возрастает, а объем досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшается, и наоборот. Очевидно, имеется такое соотношение этих объемов, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника написаны с учетом теоремы Пифагора. Для пифагорической зоны уравнения связи будут иметь следующий вид [92].

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \quad (2.177)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0. \quad (2.178)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (2.179)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (2.180)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0. \quad (2.181)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \quad (2.182)$$

Уравнение связи для досок, получаемых из сбеговой зоны:

$$d_c^2 - b_c^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_c + 12e)^2 = 0. \quad (2.183)$$

В уравнении связи (2.183) диаметр пиловочника d_c^2 определяется по формуле:

$$d_c^2 = d^2 + d^2 K_c{}^2 l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c. \quad (1.184)$$

Тогда уравнение связи для досок, получаемых из сбеговой зоны, будет иметь следующий вид:

$$d^2 + d^2 K_c{}^2 l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c - \\ -b_c^2 - c^2 H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_c - \\ -24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_c - 48eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_c - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -8T_2T_c - 48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_c - 48eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_c - \\ -48eT_4 - 4T_c^2 - 48eT_c - 144e^2 = 0.$$

Полагаем, что математическая модель данной задачи оптимизации с учетом пифагорической и сбеговой зон пиловочника составлена.

Решение математической модели. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа [95]. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$L = L(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 2b_4T_4) + 2b_cT_cl_c + \\ +\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - \\ -8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 - \\ -8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\ -24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 - \\ -32eT_3 - 64e^2) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - \\ -40eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2) + \lambda_7(d^2 + \\ +d^2 K_c^2 l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c - \\ -b_c^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_c - \\ -24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_c - 48eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_c - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -8T_2T_c - 48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_c - 48eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_c - \\ -48eT_4 - 4T_c^2 - 48eT_c - 144e^2). \quad (2.185)$$

Для отыскания оптимальных размеров брусьев и досок, получаемых из пифагорической и сбеговой зон пиловочника и находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = cHl - 2A_1\lambda_1 = 0, \dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2Hl - 2A_2\lambda_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = l(cA_1 + 2A_2) - 2\lambda_1 c^2 H - 2\lambda_2 c^2 H - 8\lambda_2 H - 8\lambda_2 e - 4\lambda_2 ce - \\
-8\lambda_2 cH - 2\lambda_3 c^2 H - 8\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 4\lambda_3 cT_1 - 8\lambda_3 T_1 - 16\lambda_3 e - 8\lambda_3 ce - \\
-2\lambda_4 c^2 H - 8\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 4\lambda_4 cT_1 - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cT_2 - 8\lambda_4 T_2 - \\
-24\lambda_4 e - 12\lambda_4 ce - 2\lambda_5 c^2 H - 8\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 4\lambda_5 cT_1 - 8\lambda_5 T_1 - \\
-4\lambda_5 cT_2 - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cT_3 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 16\lambda_5 ce - 2\lambda_6 c^2 H - \\
-8\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 4\lambda_6 cT_1 - 8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cT_2 - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cT_3 - \\
-8\lambda_6 T_3 — 4\lambda_6 cT_4 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e - 20\lambda_6 ce - 8\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - \\
-8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_c - 48\lambda_7 e - 2\lambda_7 c^2 H - 24\lambda_7 ce - \\
-8\lambda_7 cH - 4\lambda_7 cT_1 - 4\lambda_7 cT_2 - 4\lambda_7 cT_3 - 4\lambda_7 cT_4 - 4\lambda_7 cT_c = 0, \\
\partial L/\partial b_1 = 2T_1 l - 2\lambda_3 b_1 = 0, \partial L/\partial b_2 = 2T_2 l - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\partial L/\partial b_3 = 2T_3 l - 2\lambda_5 b_3 = 0, \partial L/\partial b_4 = 2T_4 l - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\partial L/\partial b_c = 2T_c l_c - 2\lambda_7 b_c = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 l - 8\lambda_3 T_1 - 4\lambda_3 cH - 8\lambda_3 H - 16\lambda_3 e - 8\lambda_4 T_1 - 4\lambda_4 cH - \\
-8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - 24\lambda_4 e - 8\lambda_5 T_1 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - \\
-8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - 8\lambda_6 T_1 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e - 8\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - \\
-8\lambda_7 T_c - 48\lambda_7 e - 4\lambda_7 cH = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 l - 8\lambda_4 T_2 - 4\lambda_4 cH - 8\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 24\lambda_4 e - \\
-8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e - 8\lambda_7 H - \\
-8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_c - 48\lambda_7 e - 4\lambda_7 cH = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 l - 8\lambda_5 T_2 - 4\lambda_5 cH - 8\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_3 - 32\lambda_5 e - \\
-8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e - 8\lambda_7 H - \\
-8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_c - 48\lambda_7 e - 4\lambda_7 cH = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 l - 8\lambda_6 T_2 - 4\lambda_6 cH - 8\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_4 - 40\lambda_6 e - 8\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - \\
-8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_c - 48\lambda_7 e - 4\lambda_7 cH = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_c} = 2b_c l_c - 8\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - \\
-8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_c - 48\lambda_7 e - 4\lambda_7 cH = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial l_c} = 2b_c T_c - 2\lambda_7 d^2 K_c - 2\lambda_7 d^2 K_c^2 l + 2\lambda_7 d^2 K_c^2 l_c = 0.
\end{cases}
\tag{2.186}
$$

Решение системы уравнений. Из системы уравнений определяем размеры досок, получаемых из пифагорической и сбеговой зон. Величина пифагорической зоны определяется по формуле:

$$E = cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e. \quad (2.187)$$

Решаем полученную систему уравнений совместно с уравнениями связи. Рассматриваем четвертое уравнение системы (2.186), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1, \qquad \lambda_3 = \frac{T_1 l}{b_1}. \quad (2.188)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (2.186), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2, \qquad \lambda_4 = \frac{T_2 l}{b_2}. \quad (2.189)$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (2.186), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3, \qquad \lambda_5 = \frac{T_3 l}{b_3}. \quad (2.190)$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (2.186), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4 l}{b_4}. \quad (2.191)$$

Рассматриваем двенадцатое уравнение системы (2.186), которое представляем в виде

$$b_4 l = 4\lambda_6 T_2 + 2\lambda_6 cH + 4\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4 + 40\lambda_6 e + b_c l_c. \quad (2.192)$$

В равенство (2.192) подставим выражение (2.191), получаем:

$$b_4^2 = 2T_4(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e) + b_c l_c b_4. \quad (2.193)$$

Рассматриваем одиннадцатое уравнение системы (2.186), которое можно представить в виде

$$b_3\, l = 4\lambda_5 T_2 + 2\lambda_5 cH + 4\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_3 + 16\lambda_5 e + b_4. \quad (2.194)$$

В равенство (2.194) подставляем выражение (2.190), получим:

$$b_3^2 = 2T_3\,(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) + b_3\, b_4\,. \quad (2.195)$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_4 \;=\; b_3 \;-\frac{2T_3(cH+2H+2T_1+2T_2+2T_3+8e)}{b_3}. \qquad (2.196)$$

Рассматриваем десятое уравнение системы (2.186), которое представляем в следующем виде:

$$b_2\; l \;=\; 4\lambda_4 T_2 + 2\lambda_4 cH + 4\lambda_4 H + 4\lambda_4 T_1 + 12\lambda_4 e + b_3\;. \qquad (2.197)$$

В последнее уравнение равенства (2.197) подставим выражение (2.189), получим:

$$b_2^2 \;=\; 2T_2\;(cH+2H+2T_1+2T_2+6e) + b_2\; b_3\;. \qquad (2.198)$$

Из равенства (2.198) можно определить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 \;=\; b_2 \;-\frac{2T_2\;(cH+2H+2T_1+2T_2+6e)}{b_2}. \qquad (2.199)$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (2.186), которое представляем в виде

$$b_1\; l \;=\; 4\lambda_3 T_1 + 2\lambda_3 cH + 4\lambda_3 H + 8\lambda_3 e + b_2\;. \qquad (2.200)$$

В равенство (2.200) подставляем выражение (2.188), получим:

$$b_1^2 \;=\; 2T_1(cH+2H+2T_1+4e) + b_1\; b_2\;. \qquad (2.201)$$

Из равенства (2.201) можно выразить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 \;=\; b_1 \;-\frac{2T_1\;(cH+2H+2T_1+4e)}{b_1}. \qquad (2.202)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (2.186), из которого определяем множитель Лагранжа λ_1:

$$\mathrm{c}Hl \;=\; 2\lambda_1\, A_1\,, \qquad \lambda_1 \;=\; \frac{\mathrm{c}Hl}{2A_1}. \qquad (2.203)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (2.186), из которого определяем множитель Лагранжа λ_2:

$$Hl \;=\; \lambda_2\, A_2\,, \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{Hl}{A_2}\,. \qquad (2.204)$$

Из уравнения связи (2.186) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \quad (2.205)$$

Используя уравнение связи (2.205), можно определить множитель Лагранжа по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{cH}{\sqrt{d^2 - c^2H^2}}. \quad (2.205)$$

Из уравнения связи (2.187) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH + 2H + 2e)^2}. \quad (2.207)$$

Используя равенство (2.207), можно определить множитель Лагранжа λ_2 по формуле:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{d^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHe - 4H^2 - 8He - 4e^2}}. \quad (2.208)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (2.186), которое представляем в следующем виде:

$$l(cA_1 + 2A_2) = 2\lambda_1 c^2 H + 2\lambda_2 c^2 H + \\ +8\lambda_2 H + 8\lambda_2 e + 4\lambda_2 ce + 8\lambda_2 cH + (c+2)b_1 . \quad (2.209)$$

В равенство (2.209) подставляем выражения (2.203) и (2.204), получим:

$$cA_1 + 2A_2 = \frac{c^3H^2}{A_1} + \frac{(2c^2H^2 + 8H^2 + 8cH^2 + 4cHe + 8He)}{A_2} + (c+2)b_1. \quad (2.210)$$

Из равенства (2.210) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{c(d^2 - 2c^2H^2)}{(c+2)A_1} + \\ + \frac{2\left(d^2 - ((H(c+2) + 2e)^2 + H^2(c+2)^2 + 2He(c+2)\right)}{(c+2)A_2}. \quad (2.211)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, можно определить её толщину, используя уравнение связи (2.188):

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H + 4\,e)) . \qquad (2.212)$$

Аналогично, зная ширину доски, можно определить её толщину, используя уравнение связи.

Толщина второй пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 6e)). \qquad (2.213)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 8e)). \qquad (2.214)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок определится по формуле:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 10e)). \qquad (2.215)$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (2.186), из которого определяем множитель Лагранжа λ_7:

$$T_c l_c = \lambda_7 b_c, \qquad \lambda_7 = \frac{T_c l_c}{b_c}. \qquad (2.216)$$

Рассматриваем тринадцатое уравнение системы (2.186), которое представляем в виде

$$2b_c l_c = 8\lambda_7 H + 8\lambda_7 T_1 + 8\lambda_7 T_2 + 8\lambda_7 T_3 + 8\lambda_7 T_4 + \\ +8\lambda_7 T_c + 48\lambda_7 e + 4\lambda_7 cH. \qquad (2.217)$$

В равенство (2.217) подставим выражение (2.216), получаем:

$$b_c^2 = 2T_c(2H + cH + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_c + 12e). \qquad (2.218)$$

Толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, определится по формуле:

$$T_c = 0{,}5(\sqrt{d_c^2 - b_c^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 12e)). \qquad (2.219)$$

Длина доски, получаемой из сбеговой зоны, ранее была определена и находится по формуле:

$$l_C = \frac{D - \sqrt{8{T_C}^2 + 6ET_C + E^2}}{K_c}. \qquad (2.220)$$

Полагаем, что математическая модель задачи оптимизации решена. Получены формулы для определения оптимальных размеров брусьев и досок с учетом сбеговой зоны. Однако по этим формулам непосредственно определить оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным [17, 89].

Алгоритм решения задачи. Для решения задачи воспользуемся численным методом. Для определения оптимальных размеров брусьев и досок расчеты производим в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ и $m_e = e/d$ [95].

Алгоритм решения задачи представляем в следующем виде.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (2.221)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (2.222)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \frac{2(1 - ((cm_H + 2m_H + 2m_e)^2 + m_H^2(c+2)^2 + 2m_e m_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (2.223)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H + 4m_e)\right). \quad (2.224)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \frac{2(m_{A_2}^2 - m_H^2(c+2)^2 - 2m_H m_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (2.225)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 4m_e\right). \quad (2.226)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 6m_e\right)\right). \quad (2.227)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 6m_e\right). \quad (2.228)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)\right). \quad (2.229)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 8m_e\right). \quad (2.230)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)\right). \quad (2.231)$$

Относительная величина пифагорической зоны определяется по формуле:

$$m_E = cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e. \quad (2.232)$$

Относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны:

$$m_{T_c} = 0{,}5(\sqrt{d_c^2 - m_{b_c}^2} - \\ -\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e\right)). \quad (2.233)$$

Относительная ширина наружной пласти сбеговой доски:

$$m_{b_C} = \sqrt{2m_E m_{T_C} + 4m_{T_c}^2}. \quad (2.234)$$

Относительная длина сбеговой доски:

$$m_{l_C} = \frac{m_D - \sqrt{8m_{T_c}^2 + 6m_E m_{T_C} + m_E^2}}{K_c}. \quad (2.235)$$

Решая равенства (2.175) и (2.176), можно написать:

$$m_{d_c} = m_D - K_c m_{lc}. \quad (2.236)$$

Используя равенство (2.236), относительную толщину доски, получаемой из сбеговой зоны, можно определить по формуле:

$$m_{T_c} = \frac{\sqrt{16m_D^2 + 9m_E^2} - 5m_E^2}{16}. \quad (2.237)$$

Критерием оптимальности при раскрое пиловочника выбираем относительный выход пиломатериалов, который определяется относительно общего объема пиловочника (бревна). Общий объем пиловочника определяется по формуле:

$$V_{оп} = \frac{\pi(d + D)^2}{16} l. \quad (2.238)$$

В задаче оптимизации объем получаемых пиломатериалов в целевой функции определяется в относительных единицах в виде суммы брусьев, боковых обрезных досок, а также досок, получаемых из сбеговой зоны. В связи с этим общий объем пиловочника необходимо представлять в относительных единицах. В относительных единицах общий объем пиловочника определяется по формулам:

$$m_{Vоп} = \frac{\pi(1 + m_D)^2}{16} l. \quad (2.239)$$

Относительный диаметр пиловочника в нижнем торце определяется по формуле:

$$m_D = 1 + K_c l. \quad (2.240)$$

Относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника, определяется по формуле:

$$m_{Vc} = 2m_{Tc} m_{bc} m_{lc}. \quad (2.241)$$

Относительный объем боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, определяется по формуле:

$$m_{V\text{д}} = 2(m_{T1}m_{b1} + m_{T2}m_{b2} + m_{T3}m_{b3} + m_{T4}m_{b4})l. \quad (2.242)$$

Относительный объем брусьев, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, определяется по формуле:

$$m_{V\text{бр}} = m_H(cm_{A1} + 2m_{A2})l. \quad (2.243)$$

Относительный объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, определяется по формуле:

$$m_{V\text{п}} = m_{V\text{д}} + m_{V\text{бр}}. \quad (2.244)$$

Относительный объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговой зон пиловочника, определяется по формуле:

$$m_V = m_{V\text{п}} + m_{V\text{с}}. \quad (2.245)$$

На практике при расчете и составлении поставов определяют также и выход пиломатериалов из бревна. В относительных единицах выход пиломатериалов из бревна можно определить по формулам.

Общий относительный выход пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговой зон пиловочника, определяется по формуле:

$$\Pi_V = \frac{V}{V_{\text{оп}}} = \frac{m_V}{m_{V\text{оп}}}. \quad (2.246)$$

Общий относительный выход брусьев:

$$\Pi_{V\text{бр}} = \frac{V_{\text{бр}}}{V_{\text{оп}}} = \frac{m_{V\text{бр}}}{m_{V\text{оп}}}. \quad (2.247)$$

Относительный выход боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны:

$$\Pi_{V\text{д}} = \frac{V_{\text{д}}}{V_{\text{оп}}} = \frac{m_{V\text{д}}}{m_{V\text{оп}}}. \quad (2.248)$$

Относительный выход досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника:

$$\Pi_{V\text{с}} = \frac{V_{\text{с}}}{V_{\text{оп}}} = \frac{m_{V\text{с}}}{m_{V\text{оп}}}. \quad (2.249)$$

Относительный выход пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны:

$$\Pi_{V\text{п}} = \frac{V_{\text{п}}}{V_{\text{оп}}} = \frac{m_{V\text{п}}}{m_{V\text{оп}}}. \quad (2.250)$$

Результаты расчетов. Расчеты выполняются в такой последовательности. Вначале задаемся длиной бревна l и коэффициентом изменения толщины брусьев c. Далее задаемся относительным сбегом бревна по диаметру $Кс$ и относительной шириной пропила m_e. Для этих параметров по алгоритму определяем все размеры досок и величину целевой функции для определенного диапазона относительной толщины брусьев m_H [89, 90]. По результатам расчетов находим оптимальное (максимальное) значение целевой функции. Этот результат и считается искомым. Далее на основании полученных расчетов выполнен анализ влияния различных факторов на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также и на размеры досок, получаемых из параболической (сбеговой) зоны пиловочника.

Основные относительные зависимости выхода брусьев и досок в относительных единицах, а также их относительных объемов представлены на последующих рисунках.

При распиловке пиловочника с учетом сбеговой зоны с увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины бруса c = 1,0 и длине пиловочника l = 3 м оптимальная относительная толщина бокового бруса возрастает и пифагорическая зона также увеличивается (см. рис. 2.34). Возрастает при этом также и относительная толщина центрального бруса. В результате сумма толщин брусьев возрастает. Пифагорическая зона с увеличением относительной ширины пропила для этих условий раскроя пиловочника возрастает.

При увеличении относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника m_{Vc}, уменьшается, оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает, а оптимальный относительный объем боковых досок $m_{V\text{д}}$ уменьшается (см. рис. 2.35). В результате суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, уменьшается. Такие результаты получены для пиловочника длиной l = 3,0 м и при коэффициенте соотношения толщин брусьев c = 1,0.

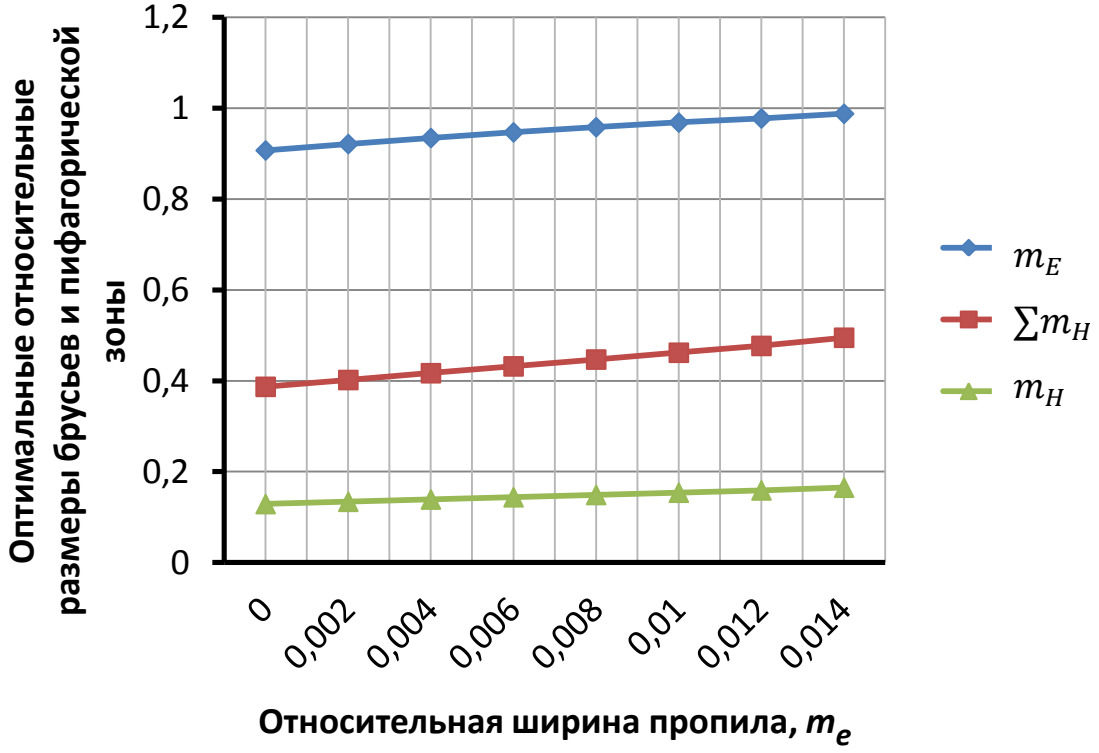


Рис. 2.34. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_H, m_E, $\sum m_H$ при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

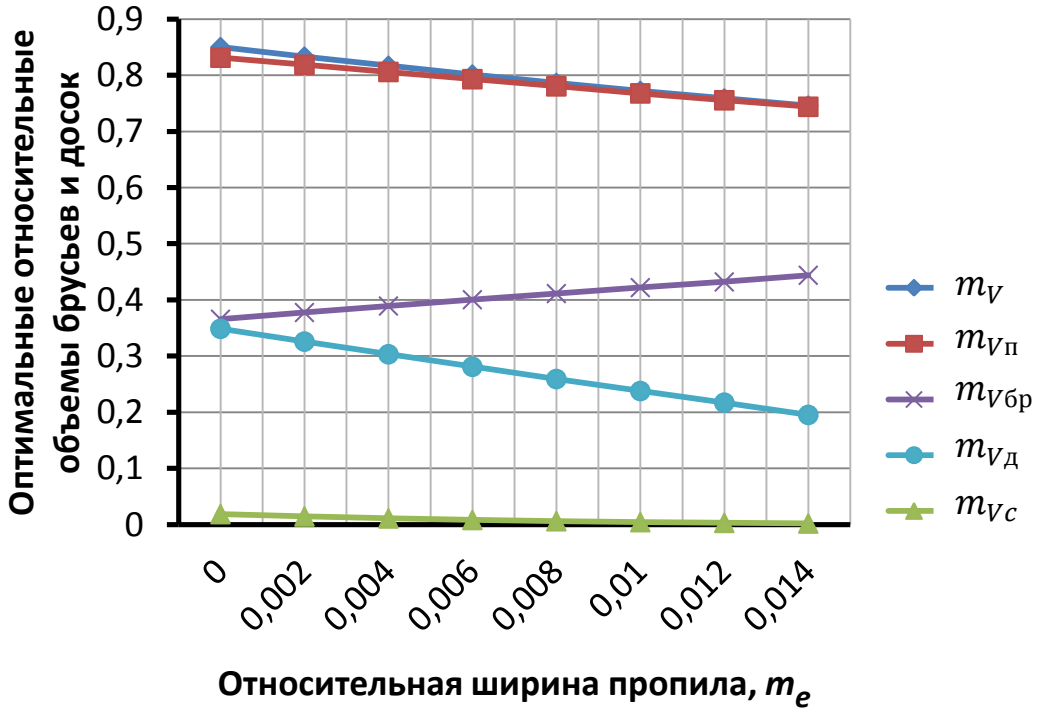


Рис. 2.35. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные размеры досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшаются (рис. 2.36). При этом оптимальная относительная длина доски уменьшается в большой мере [95]. Следовательно, ширина пропила наибольшее влияние оказывает на оптимальную длину доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника.

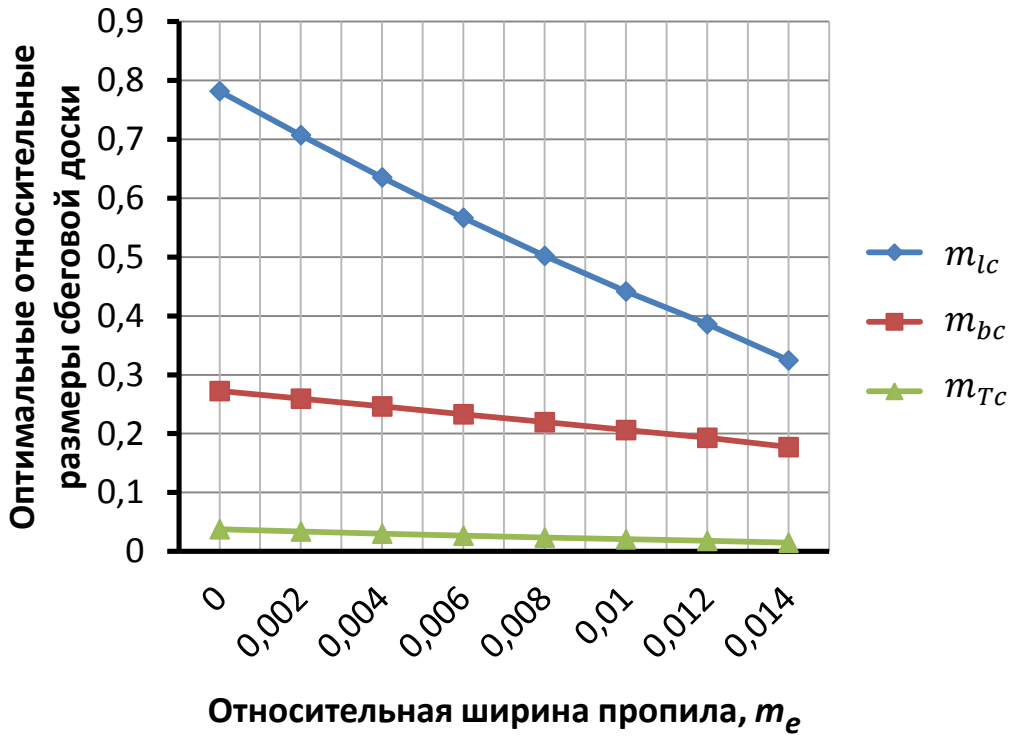


Рис. 2.36. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок возрастает, а оптимальные относительные толщины следующих пар обрезных досок уменьшаются, причем уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 2.37). Так, например, толщина последней (четвертой) пары боковых обрезных досок уменьшилась примерно в 8 раз.

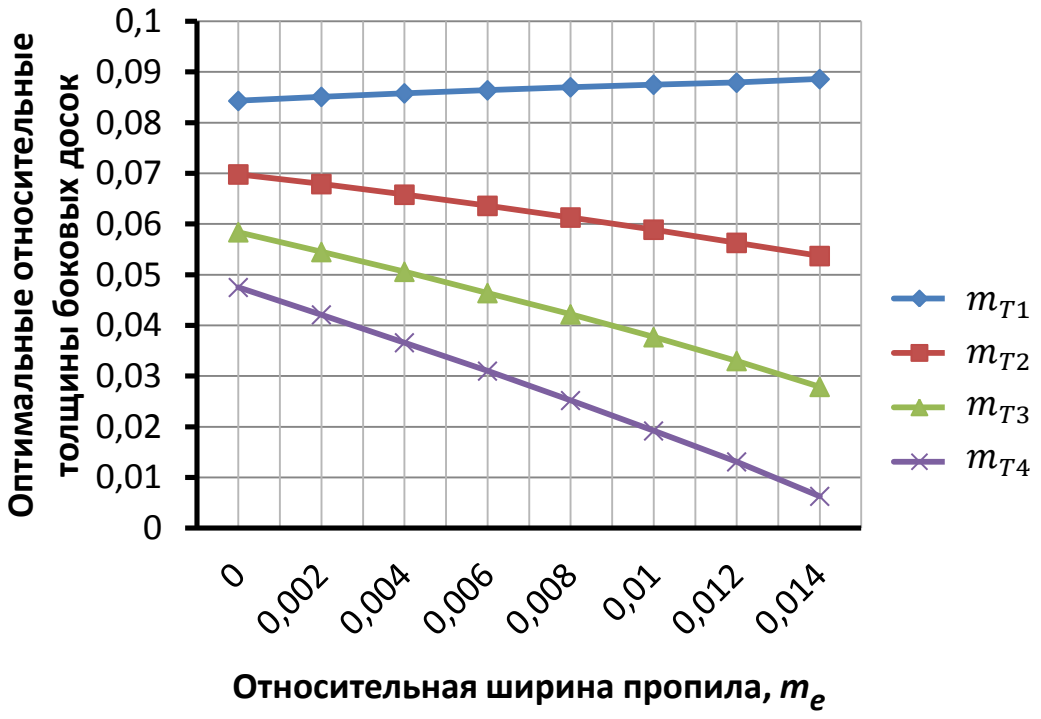


Рис. 2.37. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.38) с небольшим ускорением. В наибольшей степени уменьшается относительная ширина крайней боковой доски. Таким образом, относительная ширина пропила наибольшее влияние оказывает на относительные размеры крайних боковых досок, расположенных в пифагорической зоне, а следовательно, на относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны.

С увеличением относительной ширины пропила относительные толщины брусьев возрастают (см. рис. 2.39) и суммарная относительная толщина брусьев возрастает. При этом пифагорическая зона также возрастает. Эти результаты представлены для условий, когда коэффициент изменения толщин брусьев c = 3,0, а длина пиловочника l = 3,0 м.

Аналогичная закономерность изменения размеров оптимальных относительных брусьев наблюдается при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 (см. рис. 2.39 и 2.34). Различие наблюдается в том, что относительная величина центрального бруса и сумма относительных толщин этих брусьев имеют другие соотношения.

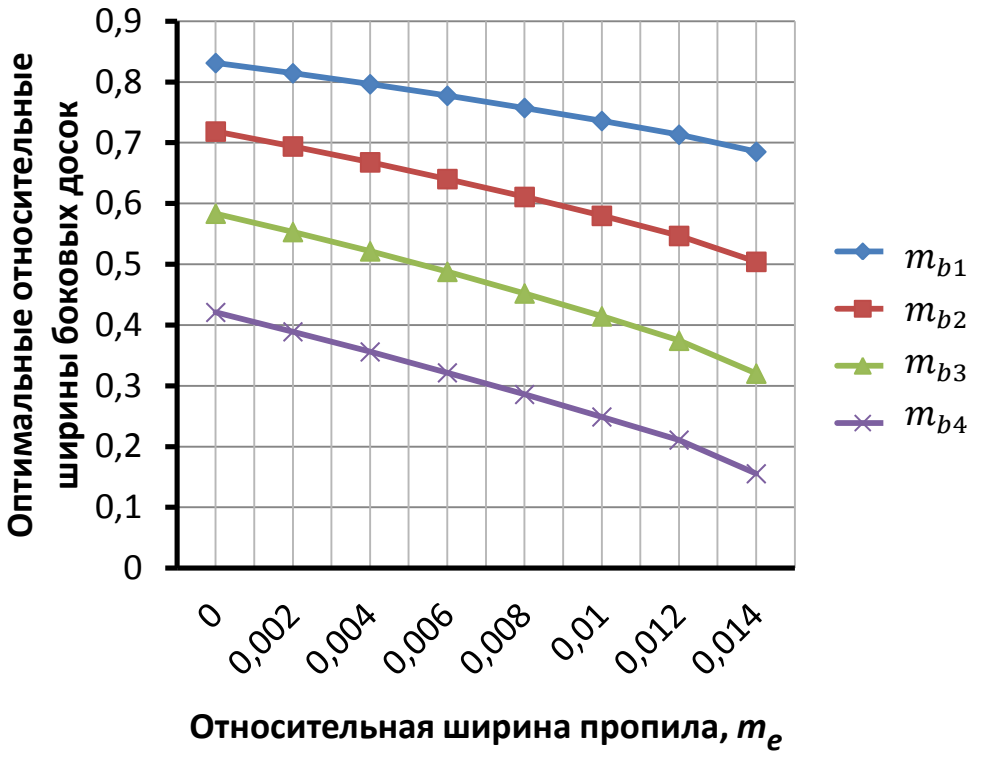


Рис. 2.38. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

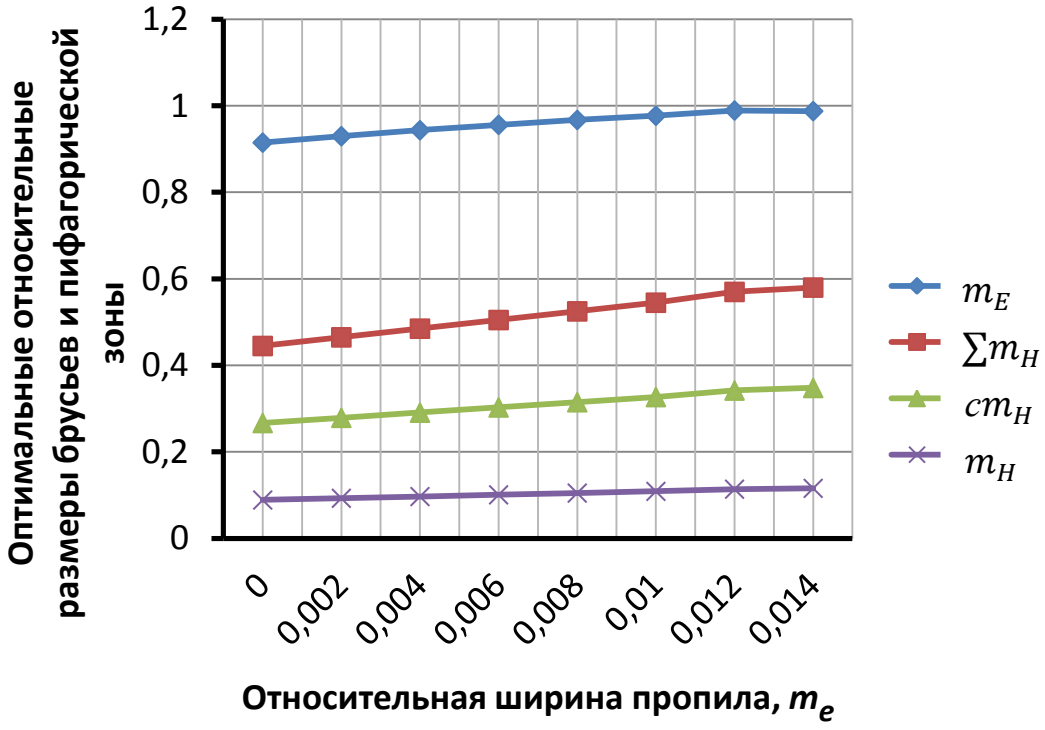


Рис. 2.39. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H, m_H$ при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Сравнивая рис. 2.34 и 2.39, следует также отметить, что суммарная оптимальная относительная толщина брусьев $\sum m_H$ больше при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0, чем при коэффициенте c = 1,0.

С увеличением относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc} и оптимальный относительный объем досок, получаемых из пифагорической зоны $m_{V\text{д}}$, уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$, возрастает (см. рис. 2.40). Суммарный относительный объем пиломатериалов $m_{V\text{п}}$ с увеличением относительной ширины пропила уменьшается. Такие закономерности получены при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м. Сравнивая графики на рис. 2.35 и 2.40, стоит отметить следующее отличие. Разница проявляется в том, что при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальный относительный объем боковых досок $m_{V\text{д}}$ меньше, чем при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0.

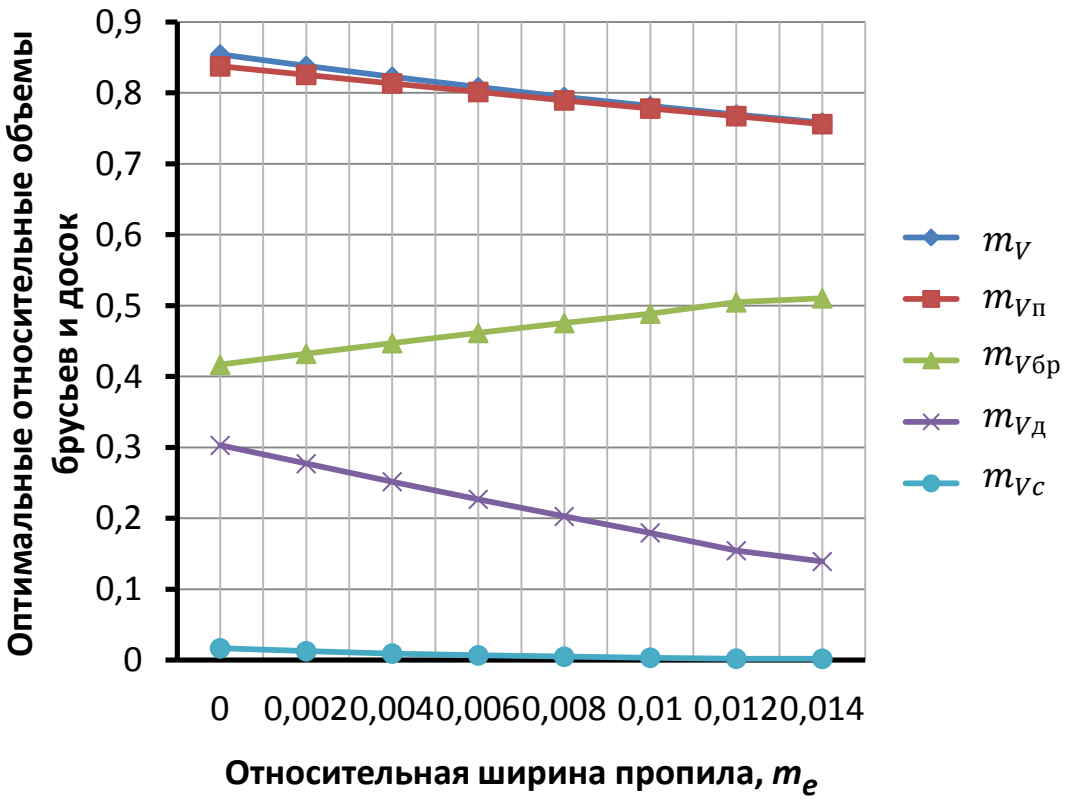


Рис. 2.40. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальные относительные размеры боковой обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 2.41). При этом относительная длина сбеговой доски m_{lc} уменьшается в большой мере, чем относительная ширина сбеговой доски m_{bc} и относительная толщина этой сбеговой доски m_{Tc}. Этот график получен при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м. Следует подчеркнуть, что относительная длина сбеговой доски для этих условий раскроя пиловочника изменяется в пределах (0,75…0,45) от длины бревна.

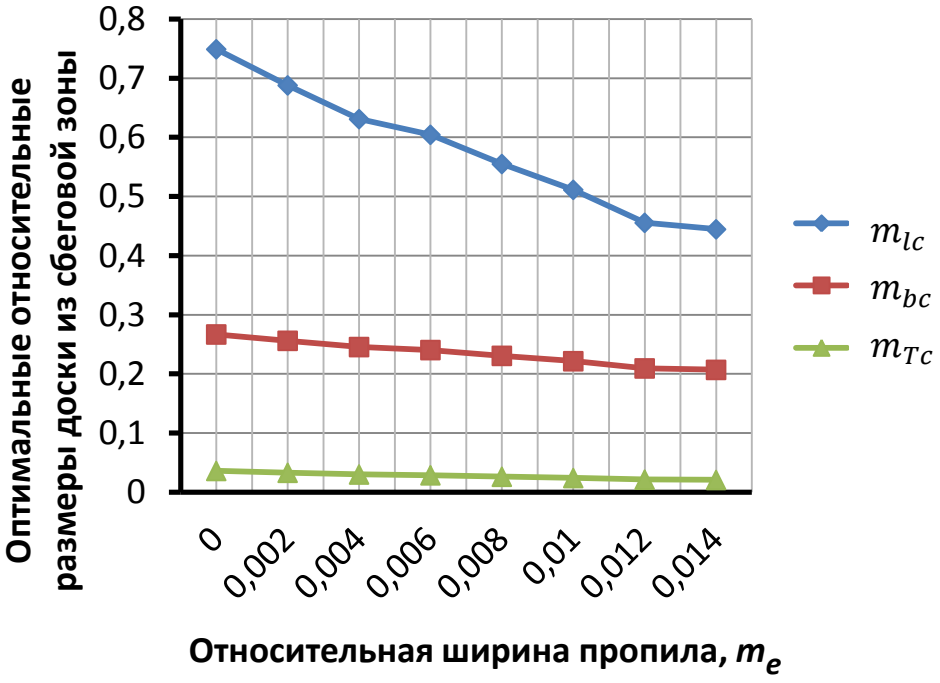


Рис. 2.41. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются, причем уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 2.42). Уменьшение оптимальной относительной толщины первой пары боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила происходит незначительно. Оптимальная относительная толщина второй пары боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила существенно уменьшается.

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 2.43) почти прямо пропорционально. Наблюдается небольшое ускорение уменьшения относительной ширины боковой доски с увеличением относительной ширины пропила. На практике относительная ширина пропила, как правило, изменяется в пределах 0,005…0,01. Следовательно, и диапазон изменения относительных ширин боковых обрезных досок уменьшается. По графикам легко можно определить для практических условий оптимальные размеры (толщину и ширину) боковых обрезных досок.

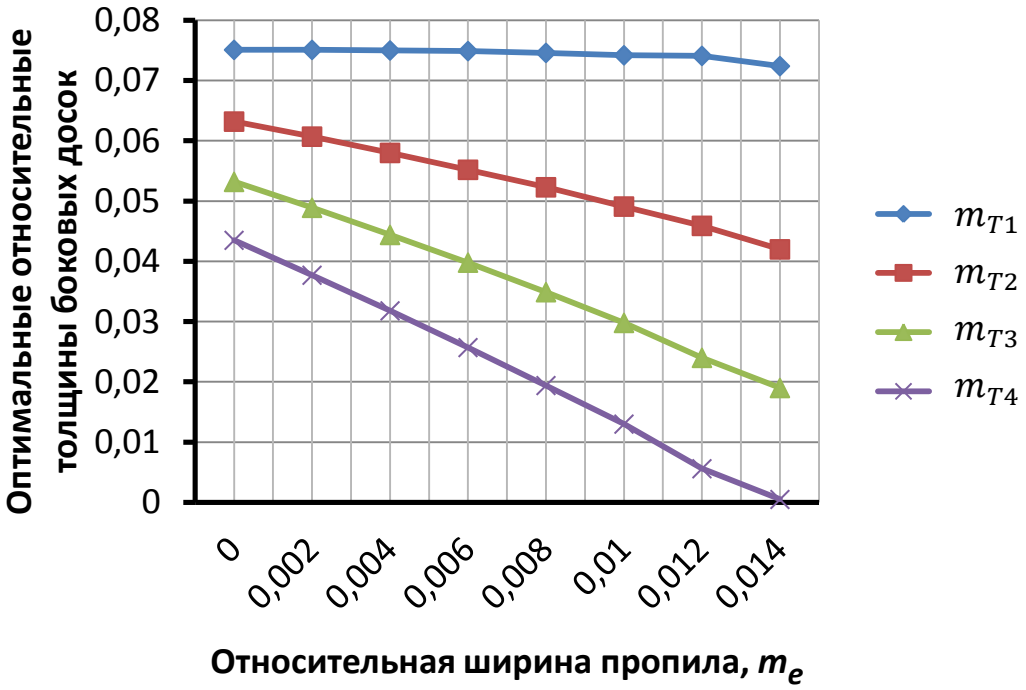


Рис. 2.42. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м пифагорическая зона изменяется незначительно, но оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает. В итоге суммарная оптимальная относительная толщина брусьев возрастает до c = 3,0, а далее изменяется незначительно (см. рис. 2.44).

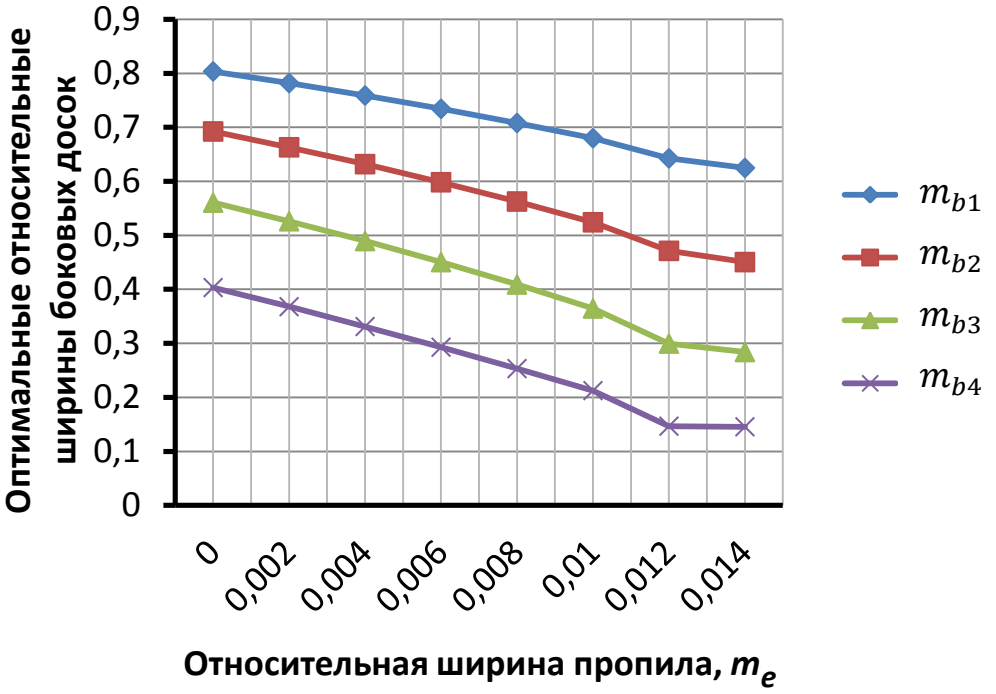


Рис. 2.43. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

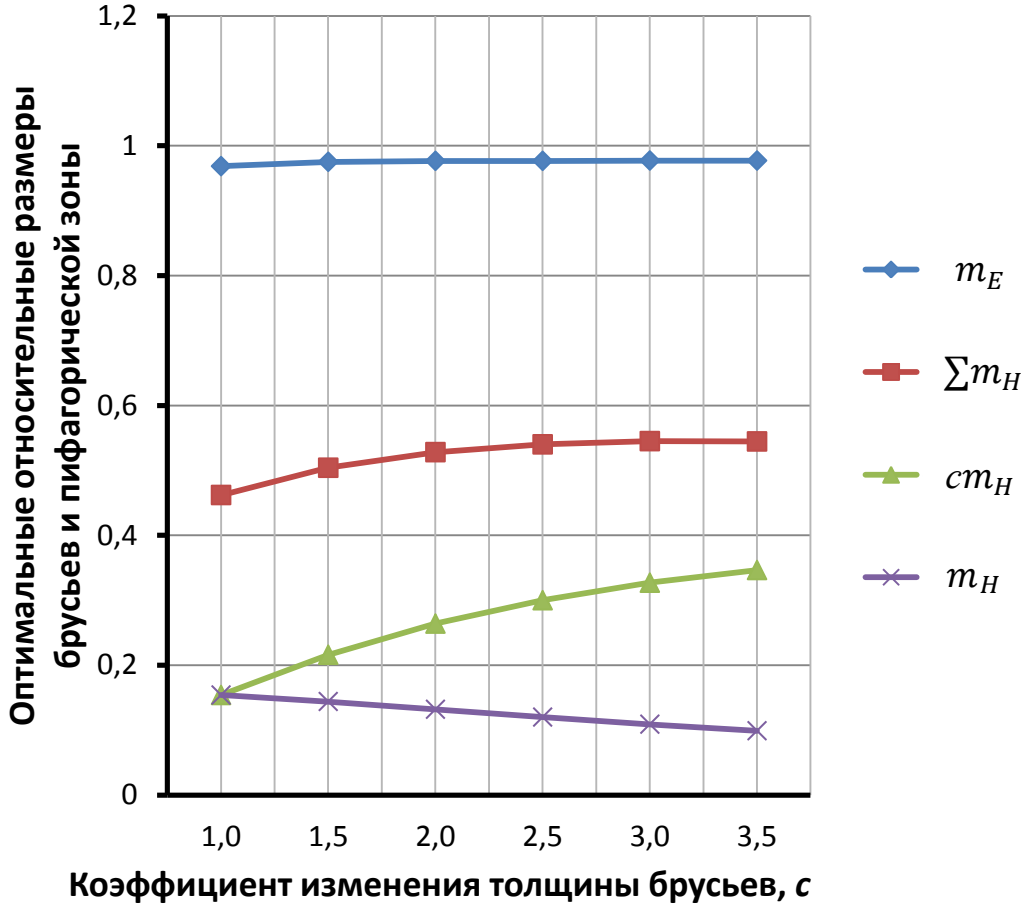


Рис. 2.44. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, незначительно уменьшается. При этом оптимальный относительный объем боковых обрезных досок уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев возрастает до c = 2,5, а затем практически сохраняется. В итоге оптимальный относительный объем получаемых пиломатериалов с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c незначительно увеличивается (рис. 2.45).

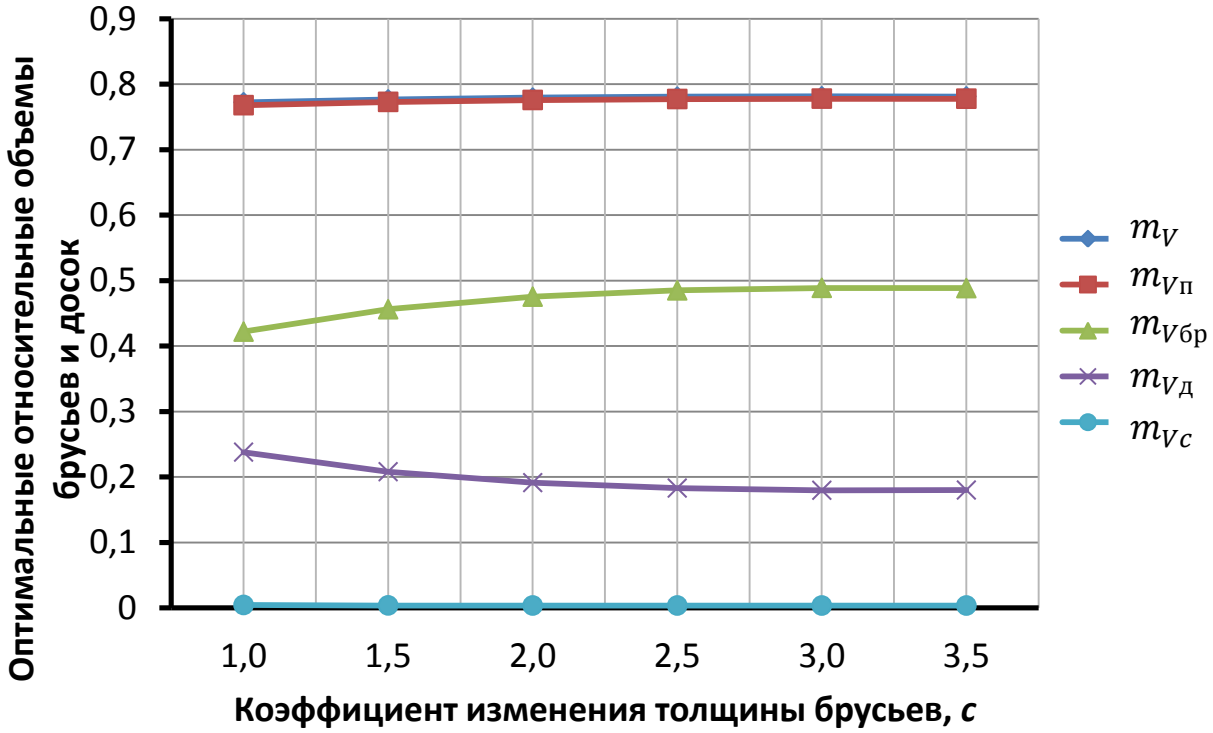


Рис. 2.45. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны m_{lc}, незначительно уменьшается (см. рис. 2.46). Особенно относительная оптимальная длина доски m_{lc} уменьшается на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 1,0…1,5. Далее оптимальная относительная длина доски из сбеговой зоны составляет 0,4 от длины бревна. При этом оптимальная относительная ширина и оптимальная относительная толщина этой доски уменьшаются незначительно.

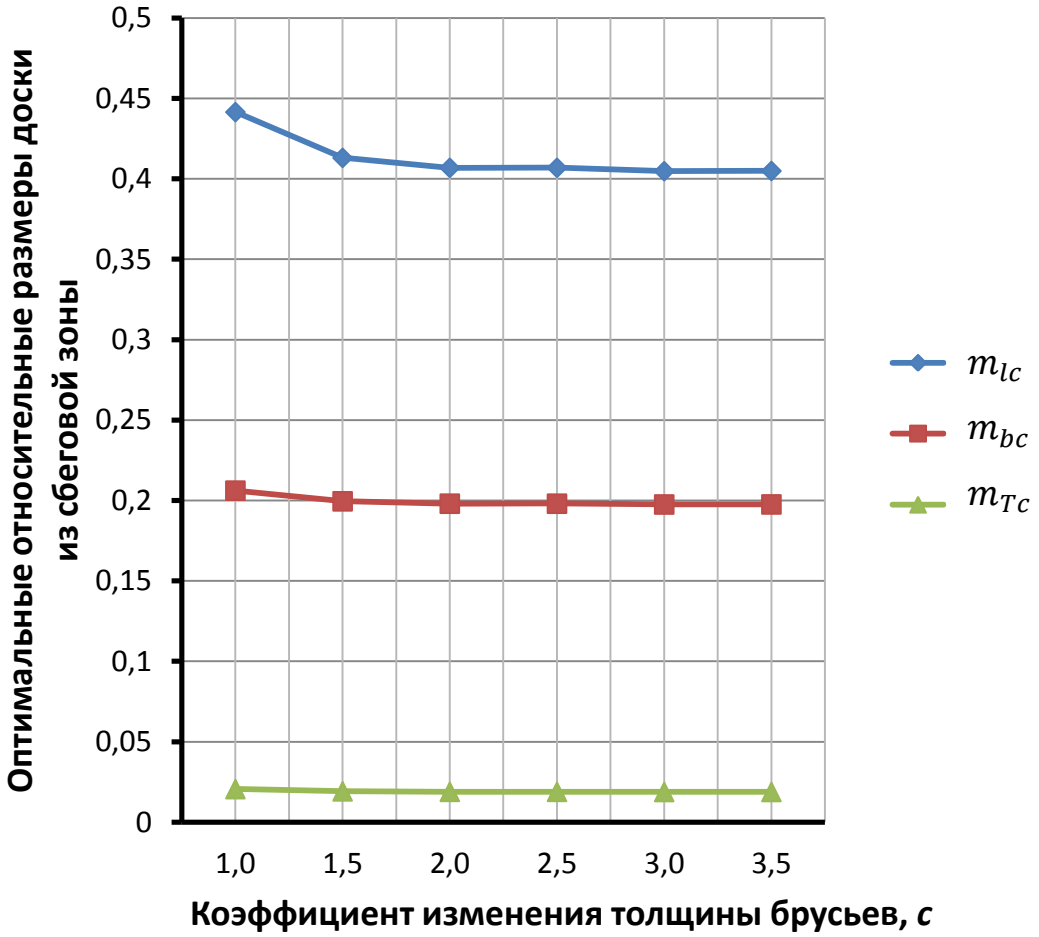


Рис. 2.46. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc}), при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением по экспоненте. При этом уменьшение относительных размеров сбеговой доски в диапазоне коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5…3,5 практически мало происходит (см. рис. 2.47). Особенно уменьшаются относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника, в диапазоне изменения коэффициента толщин брусьев c = 1,0…2,0.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением до c = 2,0. При этом уменьшения относи-

тельных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5…3,5 практически не происходит (см. рис. 2.48).

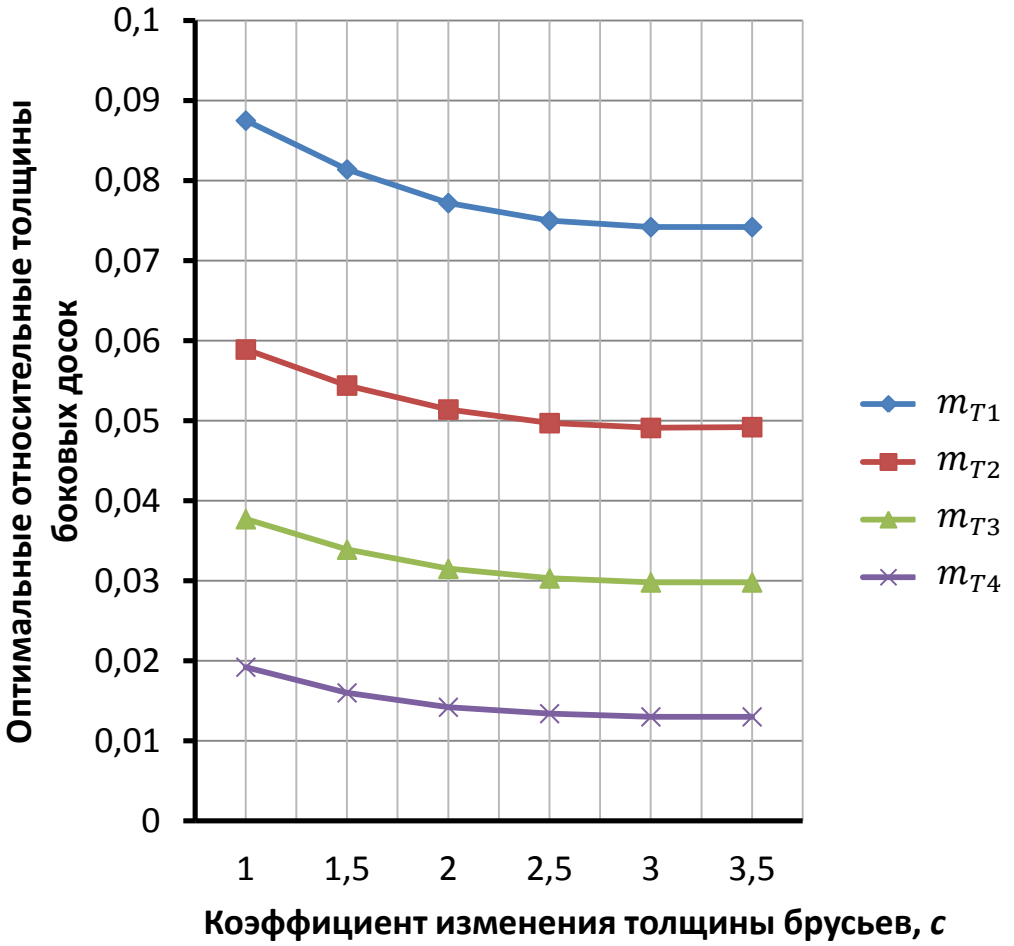


Рис. 2.47. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

Такие же сложные закономерности изменения размеров боковых досок и брусьев наблюдаются и при длине пиловочника l = 6,0 м (см. рис. 2.49, 2.50 и 2.51). С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c относительная толщина бокового бруса m_H уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает с замедлением, сумма оптимальных относительных толщин брусьев $\sum m_H$ возрастает до c = 2,5, а затем с ростом коэффициента c увеличивается незначительно. Пифагорическая зона при этом возрастает незначительно.

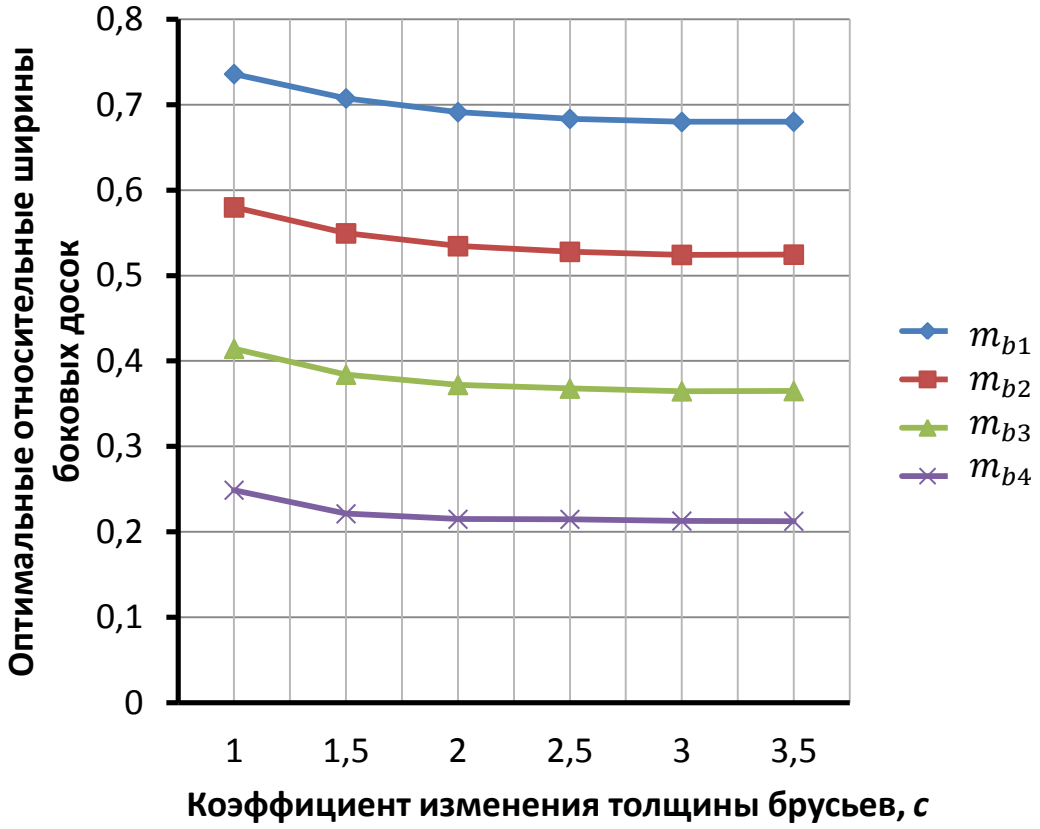


Рис. 2.48. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

Сравнивая между собой рис. 2.44 и 2.49, следует отметить, что оптимальная величина пифагорической зоны при длине пиловочника l = 6,0 м при увеличении коэффициента изменения толщины брусьев изменяется в меньшем по величине диапазоне, чем при длине пиловочника l = 3,0 м.

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м относительный объем обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}, незначительно изменяется. Это объясняется тем, что величина пифагорической зоны m_E возрастает незначительно. При этом относительный объем боковых досок $m_{V\text{д}}$ уменьшается, а относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает до c = 2,5, а затем практически сохраняется. В итоге суммарный относительный объем пиломатериалов изменяется незначительно и составляет 70% от объема бревна (см. рис. 2.50).

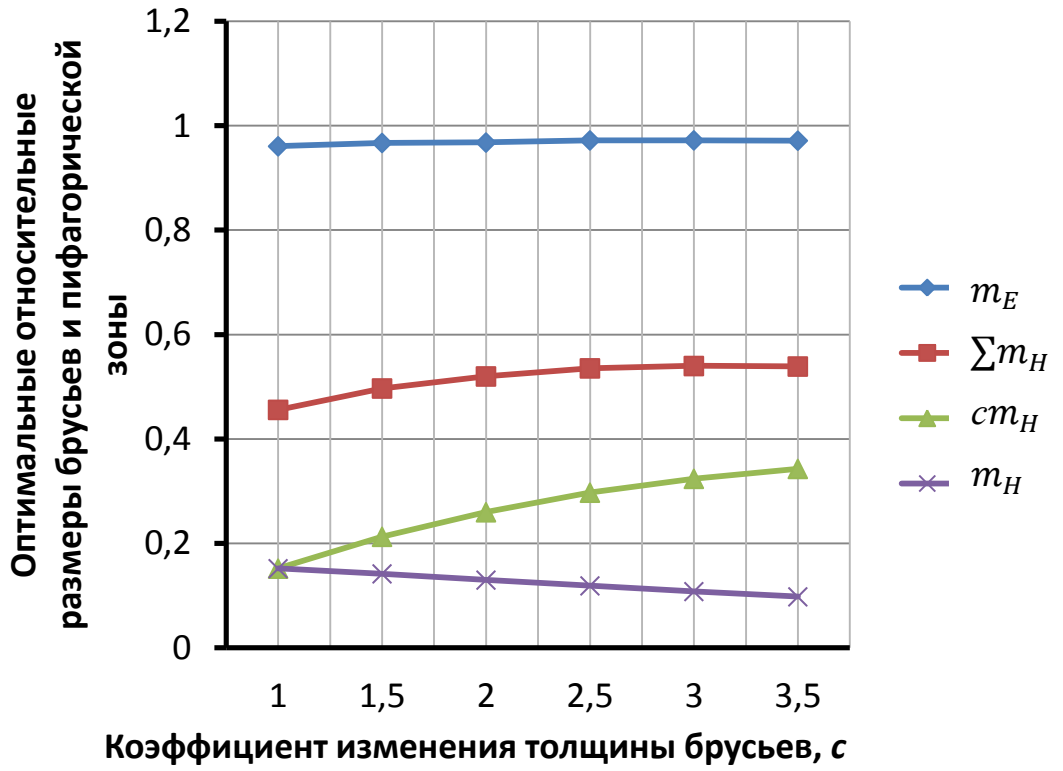


Рис. 2.49. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H$, m_H при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

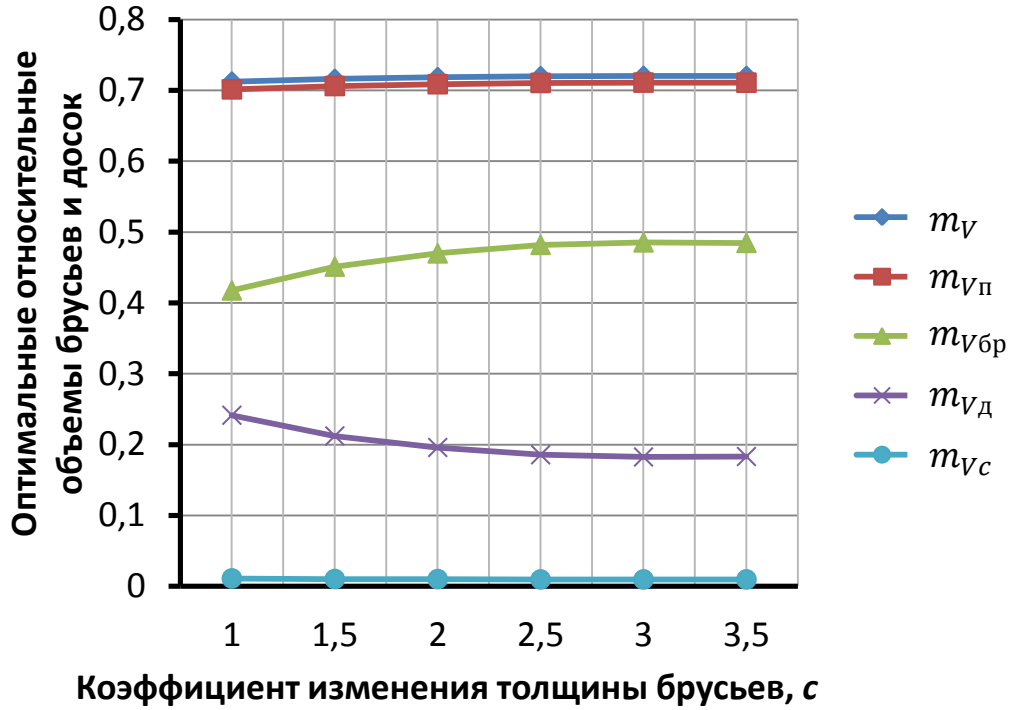


Рис. 2.50. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая между собой рис. 2.45 и 2.50, можно отметить следующее. Оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ при длине пиловочника l = 6,0 м немного меньше, чем при длине пиловочника l = 3,0 м, а суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов m_V при длине пиловочника l = 3,0 м больше, чем при длине пиловочника l = 6,0 м.

Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м представлено на рис. 2.51. С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальные относительные длина, ширина и толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, уменьшаются незначительно.

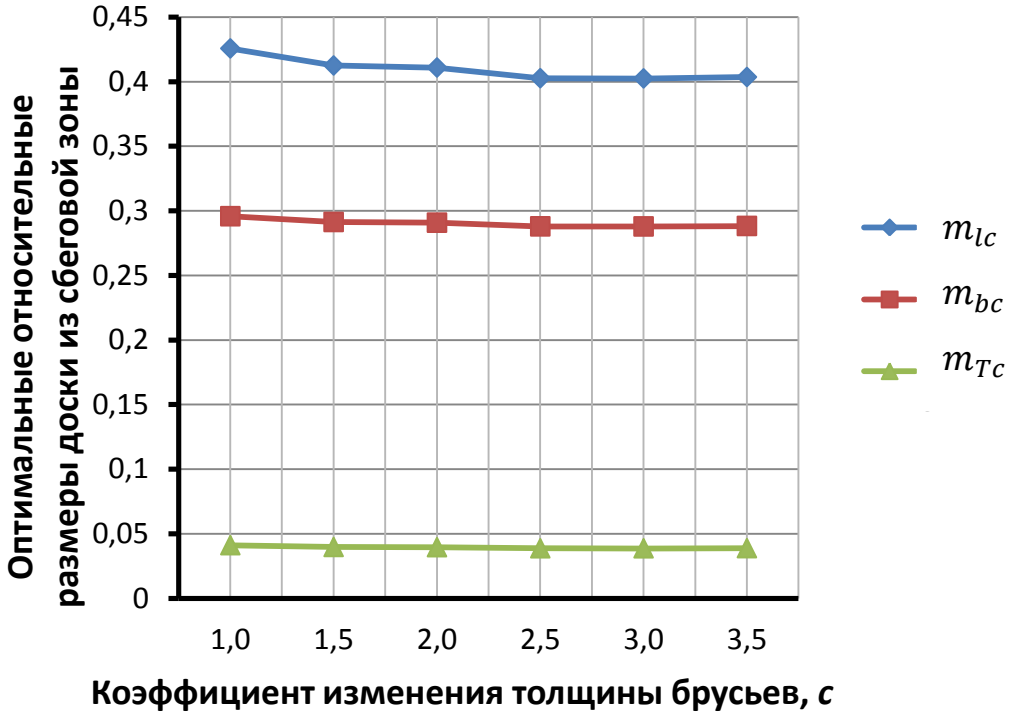


Рис. 2.51. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc}), при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая графики на рис. 2.46 и 2.51, следует обратить внимание, что оптимальные относительные размеры досок, получаемые из сбеговой зоны, отличаются между собой. Оптимальная относительная ширина доски в сбеговой зоне при длине пиловочника l = 3,0 м равна m_{lc} = 0,2, тогда как оптимальная относительная ширина этой доски при l = 6,0 м равна m_{lc} = 0,28.

Следовательно, длина пиловочника оказывает существенное влияние на оптимальные относительные размеры досок, получаемых из сбеговой зоны.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются, причем уменьшения относительных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев в диапазоне c = 2,5…3,5 практически не происходит (рис. 2.52).

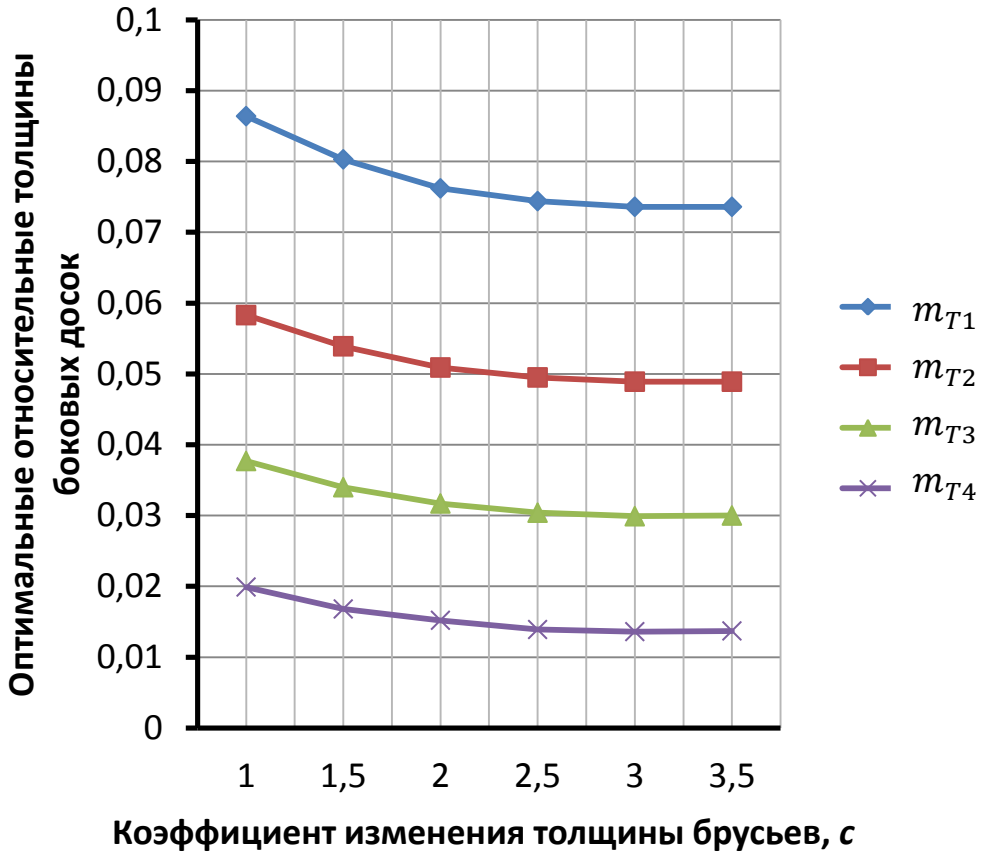


Рис. 2.52. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются, причем уменьшения относительных размеров на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5…3,5 практически не происходит (см. рис. 2.53). Следовательно, этот диапазон изменения коэффициента соотношения толщин брусьев c = 2,5…3,5 является удобным при расчете и составлении поставов.

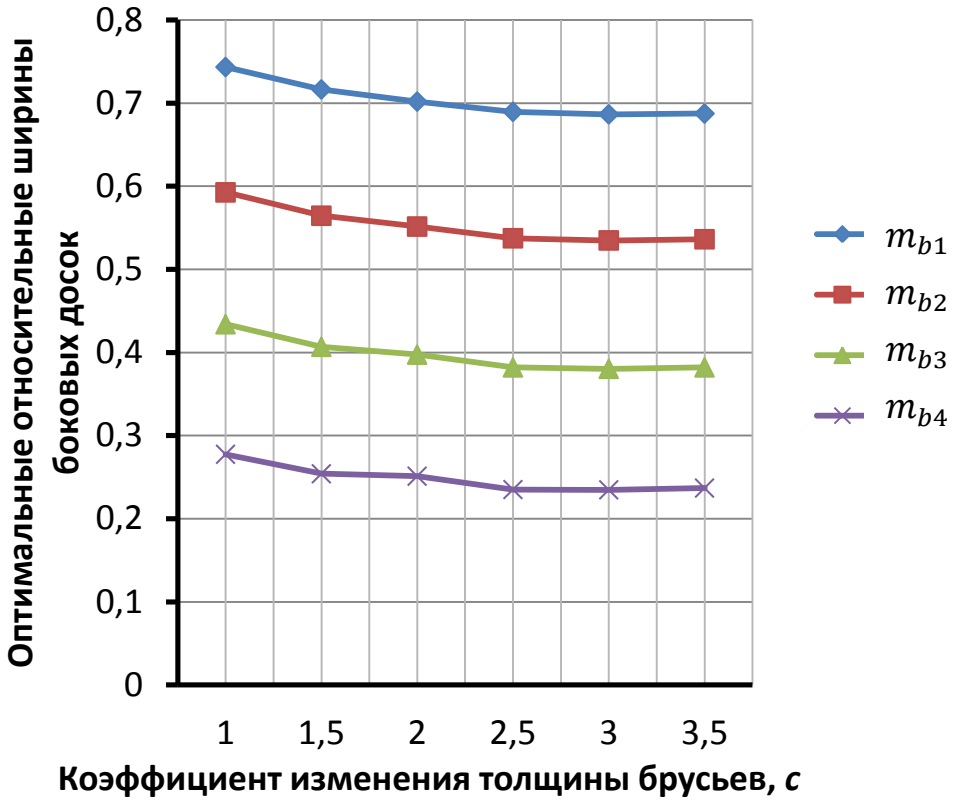


Рис. 2.53. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c
на оптимальные относительные ширины боковых досок
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

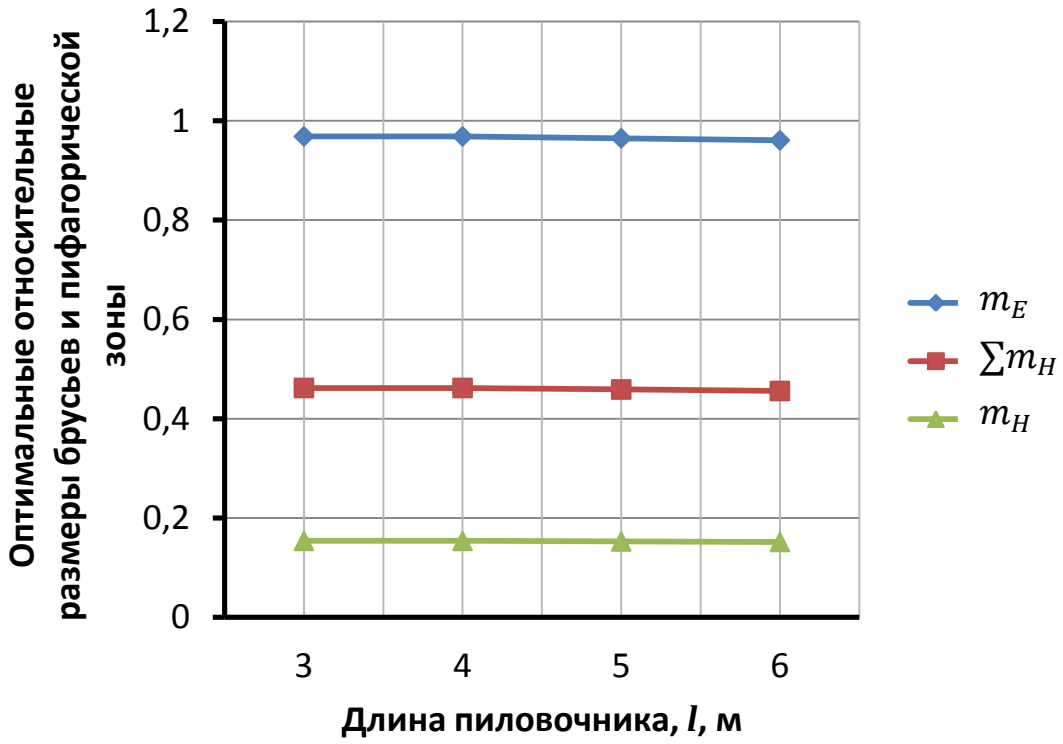


Рис. 2.54. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные
размеры брусьев и пифагорической зоны m_E, $\sum m_H, m_H$
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

С увеличением длины пиловочника относительная толщина брусьев и размер пифагорической зоны изменяются (уменьшаются) незначительно (см. рис. 2.54 и 2.55). На рис. 2.54 представлены результаты при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 [68, 75]. В теории максимальных поставов оптимальная относительная толщина бруса (или брусьев) составляет 0,707. В наших исследованиях для данной схемы раскроя пиловочника оптимальная относительная толщина всех трех брусьев при коэффициенте c = 1,0 составляет всего лишь 0,45. Таким образом, наблюдается существенное различие в размерах брусьев.

На рис. 2.55 представлены результаты расчетов при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0. При этом следует отметить, что соотношения $\sum m_H$ и m_H отличаются между собой незначительно. С увеличением длины бревна пифагорическая зона незначительно уменьшается. Оптимальная относительная толщина бокового бруса при c = 3,0 меньше, чем при коэффициенте c = 1,0. Но сумма оптимальной относительной толщины брусьев при коэффициенте c = 3,0 немного больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

С увеличением длины пиловочника оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, возрастает. Объем досок, получаемых из пифагорической зоны, незначительно увеличивается, а оптимальный относительный объем брусьев незначительно уменьшается. При этом суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, уменьшается (см. рис. 2.56). Эти результаты представлены для относительной ширины пропила m_e = 0,01 и коэффициента изменения толщины брусьев c = 1,0.

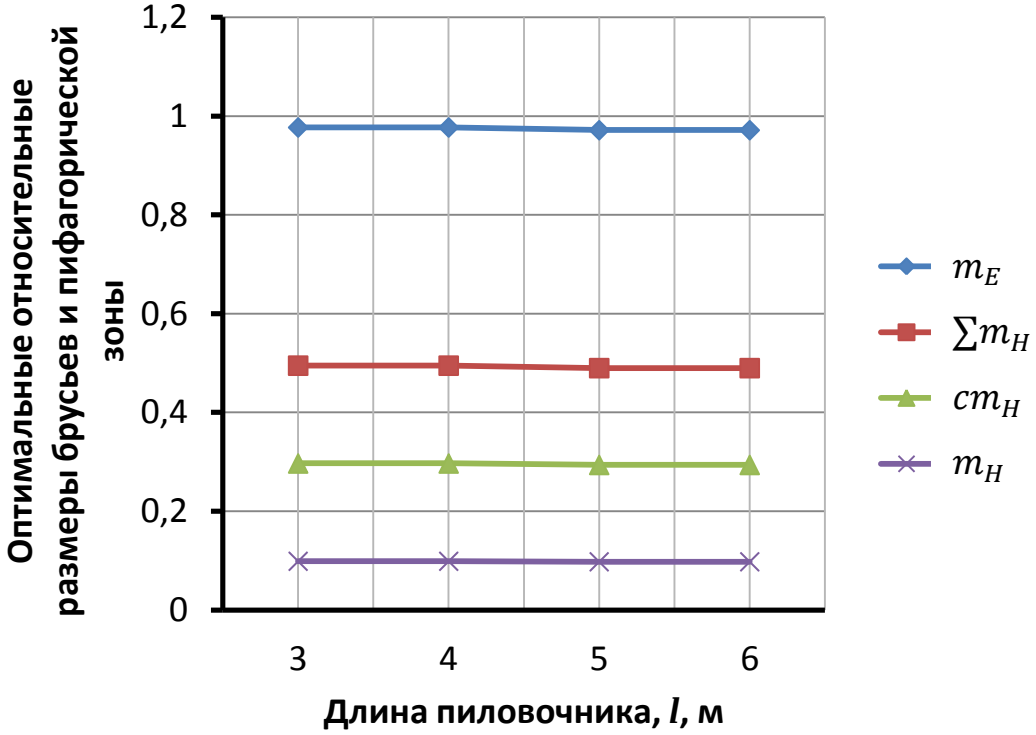


Рис. 2.55. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры брусьев и пифагорической зоны m_E, $\sum m_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

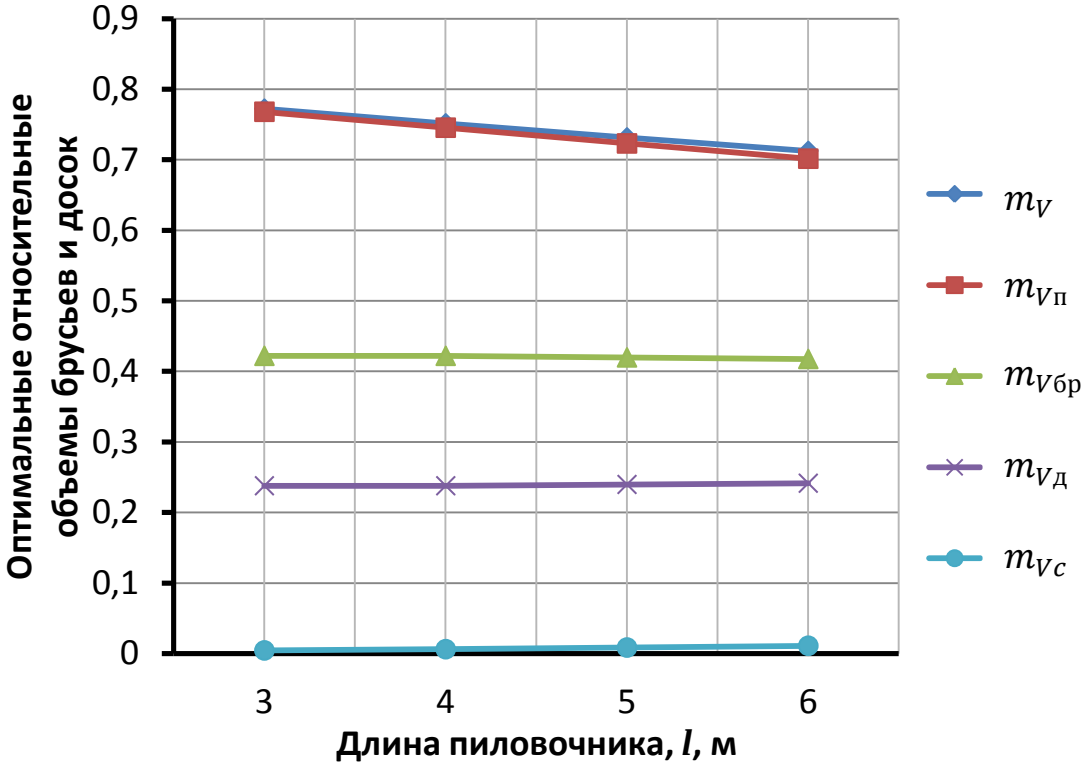


Рис. 2.56. Влияние длины бревна l на оптимальные относительные объемы брусьев и досок m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

Сравнивая между собой результаты на рис. 2.54 и 2.55, следует отметить, что длина пиловочника на оптимальные относительные размеры брусьев и величину пифагорической зоны оказывает незначительное влияние даже при различных значениях коэффициента изменения толщины брусьев c.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 изменение оптимальных относительных объемов получаемых пиломатериалов представлено на рис. 2.57. Закономерности изменения этих показателей примерно одинаковы, как и на рис. 2.56, но их соотношение несколько другое. Так, на рис. 2.57 при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 суммарный относительный выход пиломатериала m_V больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Следует также отметить, что общий относительный выход пиломатериалов из пифагорической зоны $m_{V\text{п}}$ при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Это очень важная закономерность.

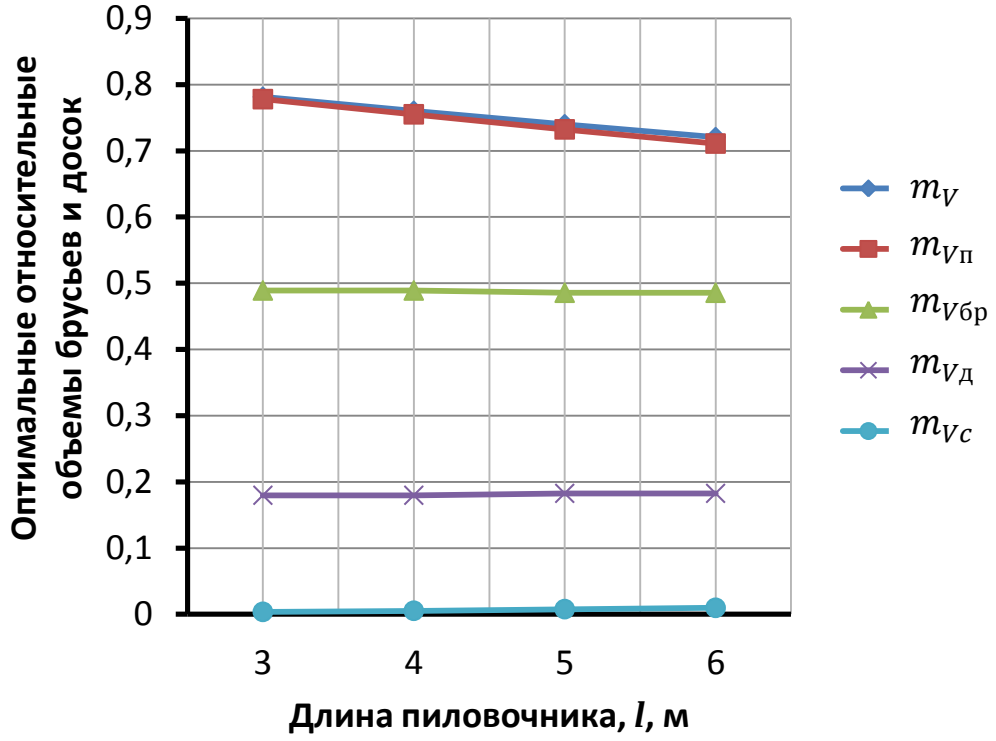


Рис. 2.57. Влияние длины бревна l на оптимальные относительные объемы брусьев и досок m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

С увеличением длины бревна оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастает, ее оптимальная относительная ширина также увеличивается, а оптимальная относительная длина уменьшается в диапазоне изменения длины пиловочника от 3

до 4 м, а далее сохраняется практически неизменной (рис. 2.58). Эти результаты получены при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0. Таким образом, длина пиловочника в наибольшей степени влияет на оптимальную относительную длину доски, получаемой из сбеговой зоны.

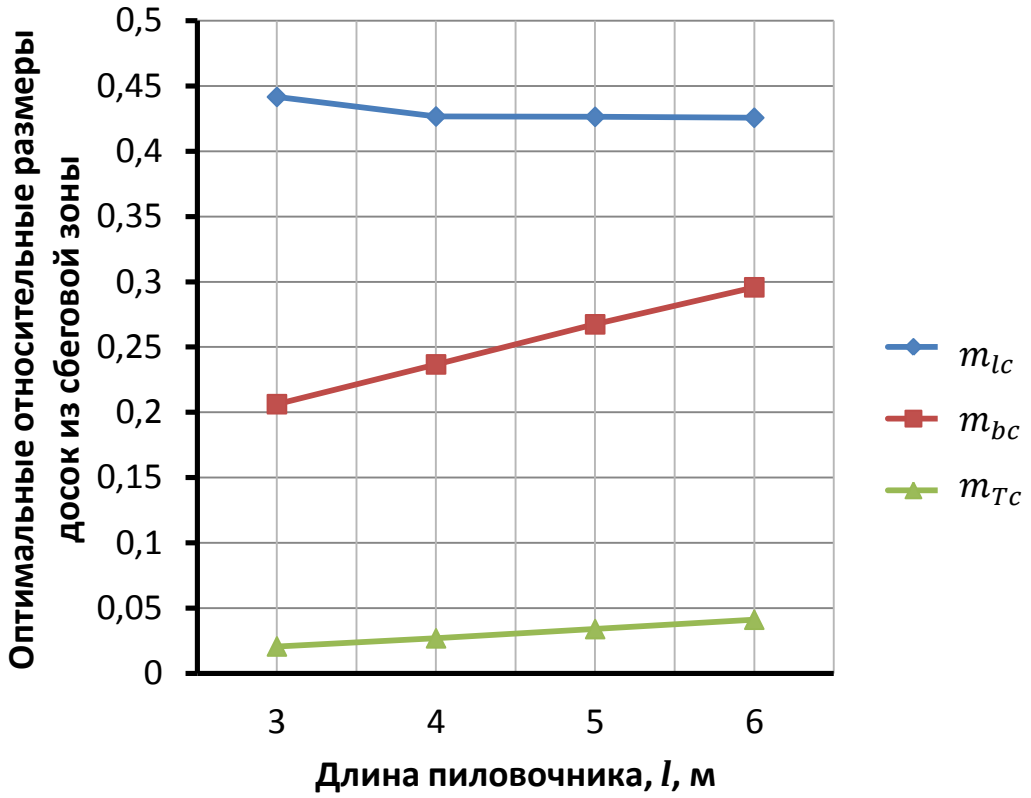


Рис. 2.58. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальная относительная длина доски, получаемой из сбеговой зоны, практически не изменяется (см. рис. 2.59). При этом относительная толщина и относительная ширина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастают. Следует отметить, что при коэффициенте c = 3,0 относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, немного меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Следует отметить, что оптимальная относительная толщина крайней боковой доски составляет всего лишь 0,02 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Такой оптимальный размер позволяет получить толщину доски при диаметре пиловочника d = 60 см всего лишь равной 12 мм. Пиломатериалы такой толщины не предусмотрены стандартами.

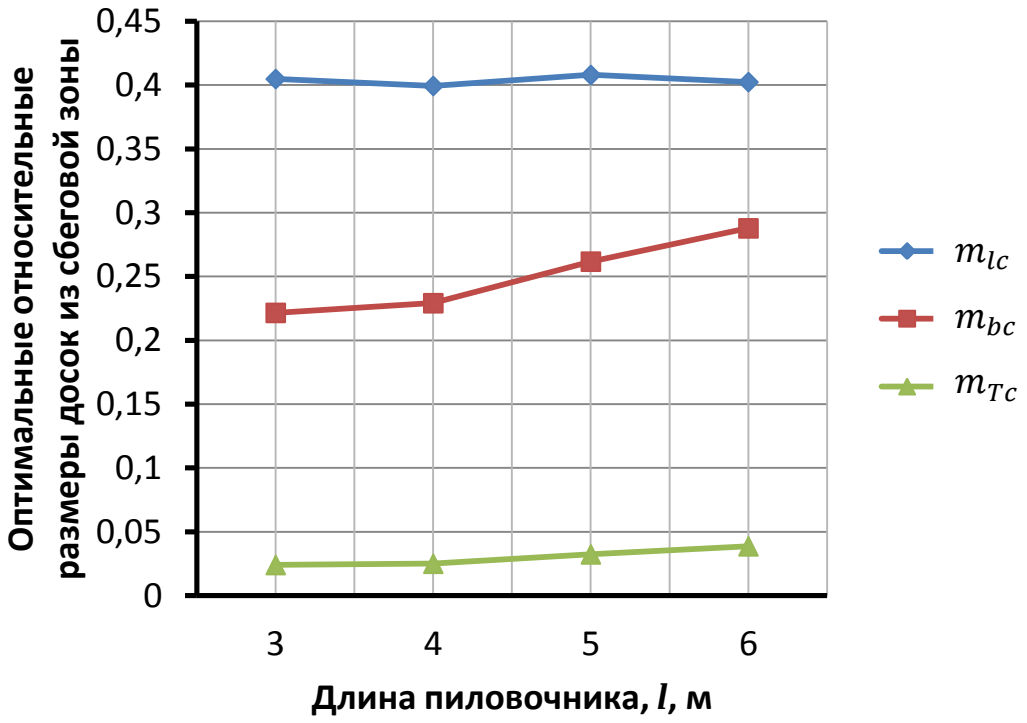


Рис. 2.59. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

Сравнивая между собой рис. 2.58 и 2.59, можно отметить, что результаты отличаются незначительно. Это объясняется тем, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 мало отличается от варианта, когда коэффициент изменения толщины брусьев c = 3,0.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 2.60). Это объясняется в основном тем, что пифагорическая зона определяется, как правило, по диаметру пиловочника в вершинном торце, и изменения этого диаметра, при увеличении длины бревна, не происходит [75].

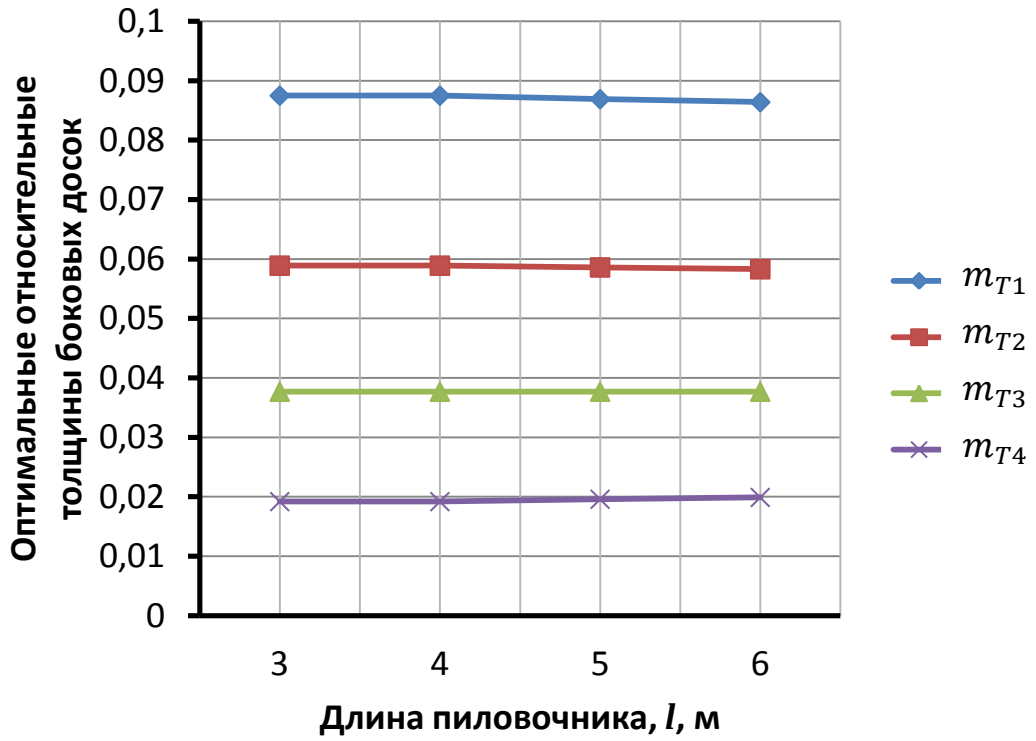


Рис. 2.60. Влияние длины пиловочника l
на оптимальные относительные толщины боковых досок
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок увеличиваются (см. рис. 2.61). Анализируя между собой результаты на рис. 2.61 и 2.63, следует отметить, что при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 величина пифагорической зоны изменяется незначительно, но доля брусьев при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 2.62). Это объясняется тем, что с увеличением длины пиловочника пифагорическая зона изменяется незначительно, а диаметр пиловочника в вершинном торце сохраняется прежним.

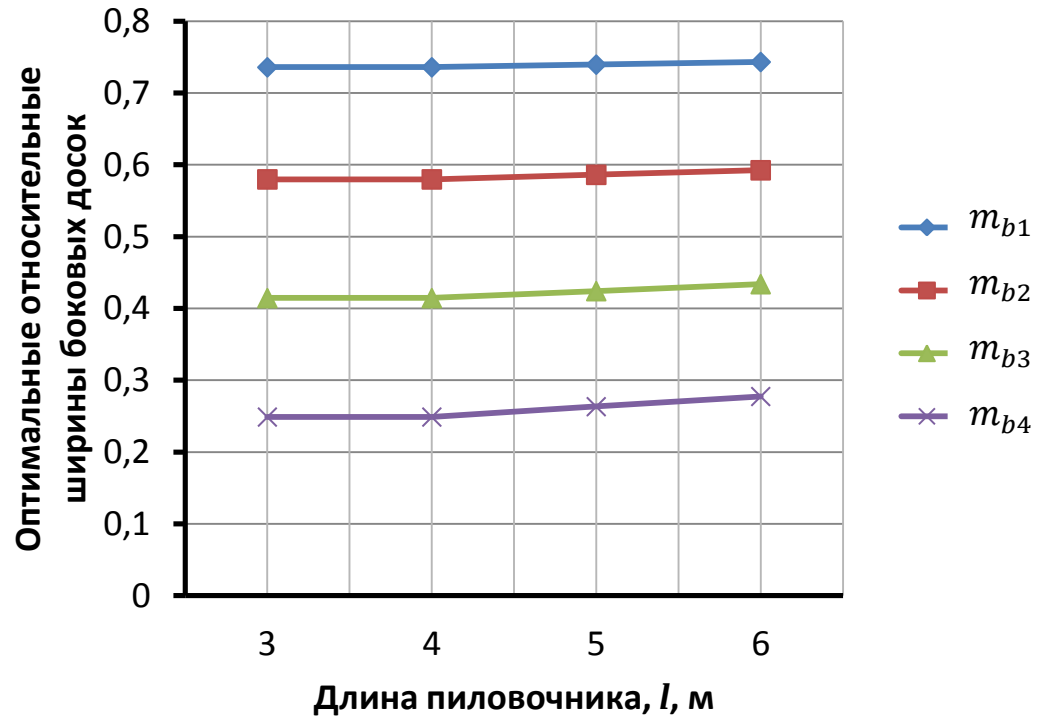


Рис. 2.61. Влияние длины пиловочника l
на оптимальные относительные ширины боковых досок
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

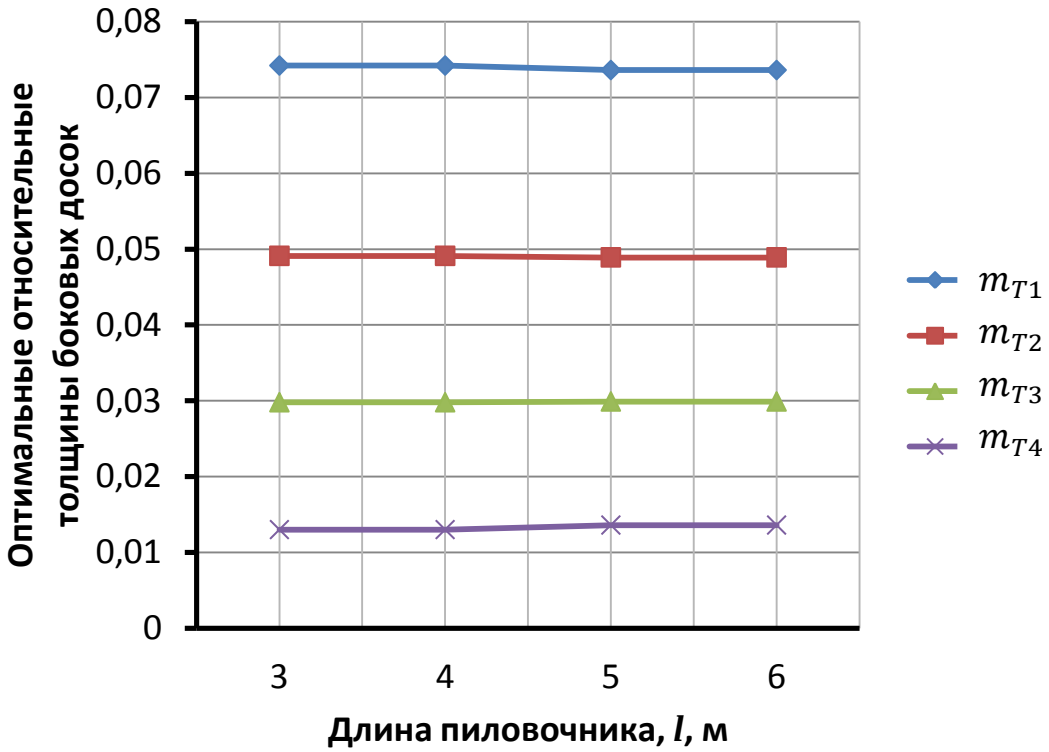


Рис. 2.62. Влияние длины пиловочника l
на оптимальные относительные толщины боковых досок
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок увеличиваются, но не столь значительно, хотя ширина крайней обрезной доски в этом случае увеличивается в большей степени (рис. 2.63).

Сравнивая между собой рис. 2.60 и 2.62, необходимо отметить, что относительные размеры толщин боковых обрезных досок при c = 1,0 немного больше, чем при c = 3,0. Это объясняется тем, что доля брусьев в пифагорической зоне при c = 3,0 больше, чем при c = 1,0, что снижает долю боковых обрезных досок.

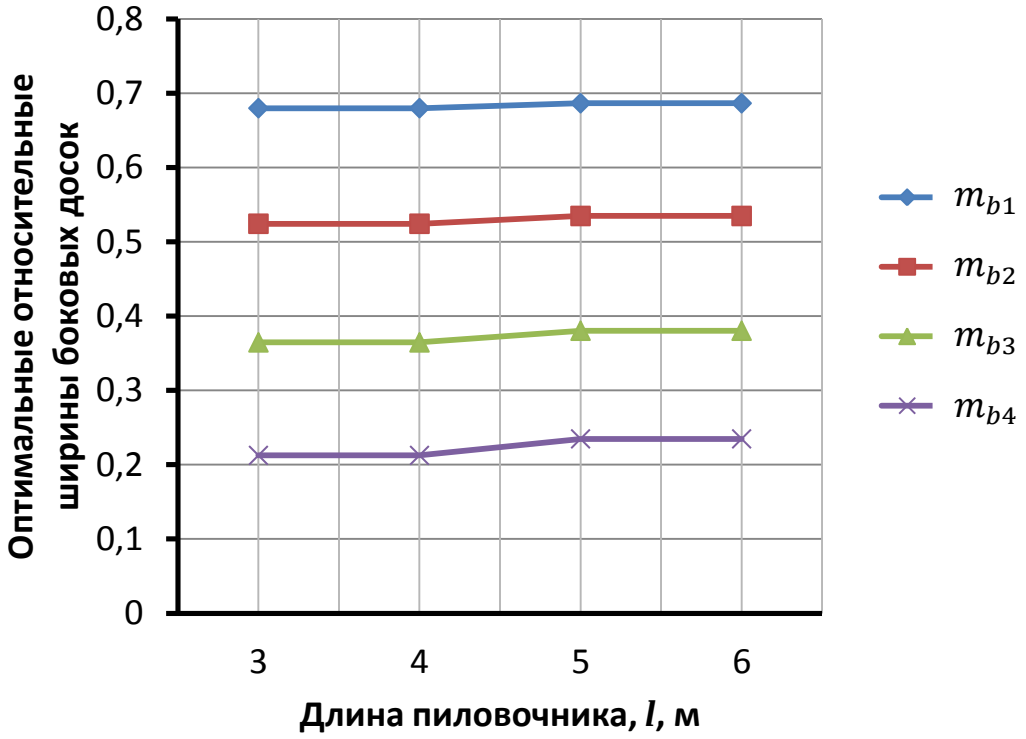


Рис. 2.63. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные ширины боковых досок при m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

Сравнивая между собой рис. 2.61 и 2.62, необходимо обратить внимание на то, что относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 1,0 по величине немного больше, чем при коэффициенте c = 3,0, хотя характер изменения этих размеров практически совпадает. Это связано с тем, что суммарная толщина брусьев при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Таким образом, длина пиловочника на оптимальные размеры брусьев и досок оказывает не столь существенное влияние. Следует подчеркнуть, что при этом с увеличением длины пиловочника относительный выход пиломатериалов уменьшается. Это очень важный вывод, который необходимо учитывать при проектировании линий.

2.7. Основные выводы по главе

1. При раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием из пифагорической зоны трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых обрезных досок оказалось, что оптимальная относительная толщина бруса равна 0,139, при которой целевая функция принимает максимальное значение [84, 94]. В этом случае сумма относительных толщин всех трех брусьев составляет 0,417 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Пифагорическая зона в этом случае равна 0,954 от диаметра бревна в вершинном торце. Оказалось, что при выпиливании трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых обрезных досок имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором площадь поперечного сечения этих брусьев и досок принимает максимальное значение [81]. Следовательно, принятая гипотеза при составлении целевой функции задачи оптимизации подтверждается.

2. С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бруса возрастает. В связи с этим относительная площадь поперечного сечения брусьев также возрастает, а относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается [55]. В итоге суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок с увеличением ширины пропила уменьшается. Таким образом, установлена интересная зависимость, что с увеличением относительной ширины пропила оптимальная толщина брусьев возрастает, а оптимальная толщина боковых обрезных досок уменьшается.

3. При раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины выход обрезных пиломатериалов вначале с увеличением коэффициента изменения толщины бруса возрастает, а затем уменьшается [65]. Максимальное значение целевая функция принимает при условии, когда толщина центрального бруса больше толщины бокового бруса в 2,8 раза. В этом случае относительная толщина бокового бруса равна 0,096 от диаметра пиловочника в вершинном торце, а относительная толщина центрального бруса равна 0,28 от этого диаметра пиловочника. Суммарная толщина всех брусьев составляет 0,480 от диаметра пиловочника в вершинном торце [65]. Пифагорическая зона в этом случае равна 0,962 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При изменении коэффициента c в пределах 2,8…3,0 целевая функция изменяется незначительно.

4. При увеличении коэффициента изменения толщины бруса относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается [59]. Но в итоге имеется такое соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором получается максимальная сумма поперечных сечений получаемых пиломатериалов (брусьев и досок). Для каждого значения коэффициента изменения толщины брусьев имеется оптимальный вариант сочетания размеров брусьев и боковых досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение. В результате расчетов определено глобальное оптимальное значение коэффициента изменения толщины брусьев, при котором целевая функция принимает максимальное значение из максимальных вариантов. Таким образом, подтверждается гипотеза о том, что, возможно, для каждого значения коэффициента изменения толщины бруса имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором получается максимальный выход пиломатериалов.

5. С увеличением относительной ширины пропила [81] для различных коэффициентов *c* относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. В итоге суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок все-таки уменьшается. Следовательно, с увеличением относительной ширины пропила размеры брусьев возрастают, а размеры боковых обрезных досок уменьшаются при любом значении коэффициента *c* [54]. При этом оптимальное соотношение толщины центрального бруса $H_ц$ к толщине бокового бруса $H_б$ сохраняется прежним, т. е. $c = 3{,}0$. Такая важная закономерность должна также учитываться при расчете и составлении поставов.

6. При последующей распиловке брусьев на обрезные доски образуются потери древесины в виде опилок [81]. В этом случае оптимальное (глобальное) соотношение толщин центрального бруса к боковому уменьшается и принимает величину, равную $c = 2{,}5$. Это объясняется тем, что с уменьшением толщины центрального бруса потери древесины в опилки при его раскрое на обрезные доски снижаются в большей мере. С увеличением коэффициента *c* площадь поперечного сечения центрального бруса возрастает [81], а площадь поперечного сечения бокового бруса уменьшается, но суммарная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает, а затем уменьшается. При этом площадь поперечного сечения досок уменьшается. В итоге

максимальное значение (глобальный оптимум) целевая функция принимает при c = 2,5.

7. При раскрое пиловочника с учетом сбеговой зоны оказалось, что выход обрезных пиломатериалов возрастает всего лишь примерно на 2,0%. При этом их длина составляет примерно 0,4 от длины бревна, а относительная толщина сбеговой доски составляет 0,04 от диаметра пиловочника в вершинном торце [90]. Наибольшее влияние длина пиловочника оказывает на относительную длину и относительную ширину обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны. При длине бревна l = 3,0 м относительный выход пиломатериалов получается больше, чем при длине бревна l = 6,0 м.

8. Таким образом, установлена сложная взаимосвязь влияния различных факторов на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и четырех пар боковых обрезных досок.

3. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ПЯТИ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК

3.1. Общая постановка и математическая модель задачи оптимизации

Постановка задачи. При раскрое пиловочника крупных размеров необходимо рассмотреть вопрос о целесообразности использования такой схемы распиловки, в которой получаем три одинаковых по толщине бруса и пять пар боковых обрезных досок (рис. 3.1) [43].

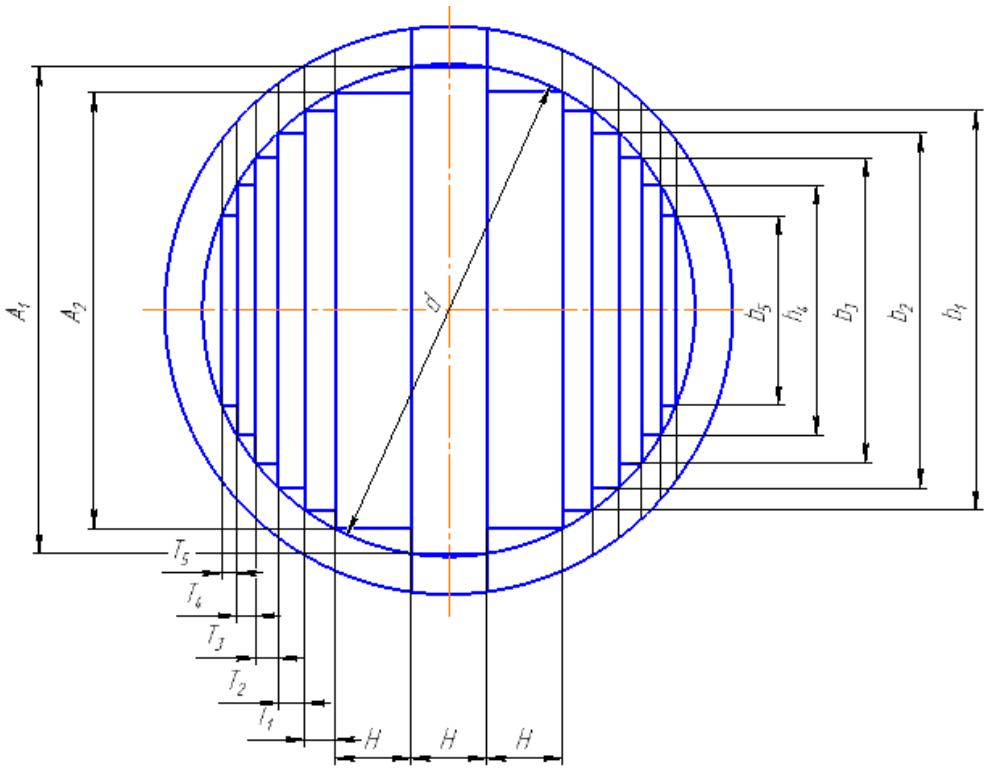


Рис. 3.1. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и пяти пар боковых обрезных досок

Составление математической модели. Для ответа на поставленный вопрос вначале рассмотрим задачу определения оптимальных размеров брусьев и досок без учета ширины пропила [82]. Для этого составляем математическую модель. В качестве критерия оптимальности выбираем выход обрезных пиломатериалов после первого прохода раскроя пиловочника брусово-развальным способом [91]. Целевую функцию можно представить в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, так как в задаче рассматривается пифагорическая зона пиловочника:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5. \qquad (3.1)$$

Написание целевой функции в таком варианте основано на предположении, что с увеличением площади поперечных сечений брусьев площади поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшаются, и наоборот [82]. Следовательно, можно предположить, что имеется такое соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение [97].

Для составления уравнения связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и досок можно представить следующими уравнениями связи [91].

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (3.2)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - 9H^2 - A_2^2 = 0. \quad (3.3)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1)^2 - b_1^2 = 0. \quad (3.4)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2)^2 - b_2^2 = 0. \quad (3.5)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 - b_3^2 = 0. \quad (3.6)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 - b_4^2 = 0. \quad (3.7)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)^2 - b_5^2 = 0. \quad (3.8)$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующее.

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 12HT_1 = 0. \quad (3.9)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \quad (3.10)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - \\ -12HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0. \quad (3.11)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\ -8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_3T_4 = 0. \quad (3.12)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - \\ -12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - \\ -8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_4T_5 = 0. \quad (3.13)$$

Полагаем, что математическая модель данной задачи оптимизации составлена.

Анализируя математическую модель задачи оптимизации раскроя пиловочника следует отметить, что количество уравнений связи меньше чем количество неизвестных факторов (размеров брусьев и боковых обрезных досок).

Решение математической модели. Поэтому для ее решения воспользуемся методом множителей Лагранжа [91]. Функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + \\ +\lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - H^2 - A_2^2) + \\ +\lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - \\ -9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2) + \\ +\lambda_5(d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 + \\ -12HT_2 - 12HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - \\ -9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - \\ -12HT_4 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -8T_3T_4) + \lambda_7(d^2 - b_5^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - \\ -4T_5^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -8T_2T_5 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_4T_5). \quad (3.14)$$

Для отыскания экстремума находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial A_1} = H - 2\lambda_1 A_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial H} = A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 18\lambda_3 H - 12\lambda_3 T_1 - \\
-18\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 T_2 - \\
-18\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 - 18\lambda_6 H - \\
-12\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 T_4 - 18\lambda_7 H - \\
-12\lambda_7 T_1 - 12\lambda_7 T_2 - 12\lambda_7 T_3 - 12\lambda_7 T_4 - 12\lambda_7 T_5 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 12\lambda_3 H - 8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - \\
-8\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - \\
-8\lambda_7 T_1 - 12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - \\
-8\lambda_5 T_3 - 8\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - \\
-8\lambda_7 T_1 - 12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 H - \\
-8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_4 - 8\lambda_7 T_3 - 12\lambda_7 \mathrm{H} - \\
-8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_4} = 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 - 8\lambda_6 T_4 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - \\
-12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_5 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial b_5} = 2T_5 - 2\lambda_7 b_5 = 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial T_5} = 2b_5 - 8\lambda_7 T_5 - 12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 = 0.
\end{cases}
\tag{3.15}
$$

Решаем полученную систему уравнений (3.15) совместно с уравнениями связи.

Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_7:

$$T_5 = \lambda_7 b_5, \qquad \lambda_7 = \frac{T_5}{b_5}. \tag{3.16}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (3.15), которое представляем в следующем виде:

$$b_5 = 6\lambda_7 H + 4\lambda_7 T_1 + 4\lambda_7 T_2 + 4\lambda_7 T_3 + 4\lambda_7 T_4 + 4\lambda_7 T_5. \tag{3.17}$$

В равенство (3.17) подставляем выражение (3.16), получим:

$$b_5 = 6HT_5 + 4T_1 T_5 + 4T_2 T_5 + 4T_3 T_5 + 4T_4 T_5 + 4T_5^2. \tag{3.18}$$

В равенство (3.18) подставляем уравнение связи (3.13), получим:

$$\begin{aligned} &8T_5^2 + 6T_5(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4) + \\ &+(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 - \frac{d^2}{8} = 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Решая это квадратное уравнение (3.19), получим:

$$\begin{aligned} T_5 = \frac{1}{8}(&\sqrt{d^2+(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2} - \\ &-3(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Рассматриваем десятое уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \tag{3.21}$$

Рассматриваем одиннадцатое уравнение системы (3.15), которое представляем в следующем виде:

$$b_4 = 6\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_2 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4 + b_5. \tag{3.22}$$

В равенство (3.22) подставим выражение (3.21), получим:

$$b_4^2 = 6HT_4 + 4T_1 T_4 + 4T_2 T_4 + 4T_3 T_4 + 4T_4^2 + b_4 b_5. \tag{3.23}$$

Из последнего равенства (3.23) можно определить ширину пятой пары боковых обрезных досок:

$$b_5 = b_4 - \frac{2T_4}{b_4}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4). \tag{3.24}$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5 b_3 , \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{3.25}$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (3.15), которое можно представить в виде

$$b_3 = 4\lambda_5 T_3 + 6\lambda_5 H + 4\lambda_5 T_1 + 4\lambda_5 T_2 + b_4 . \tag{3.26}$$

В равенство (3.26) подставляем выражение (3.25), получим:

$$b_3^2 = 4T_3^2 + 6HT_3 + 4T_1 T_3 + 4T_2 T_3 + b_3 b_4 . \tag{3.27}$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3}{b_3}(3H + 2T_3 + 2T_1 + 2T_2). \tag{3.28}$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4 b_2 , \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{3.29}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (3.15), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 = 4\lambda_4 T_1 + 4\lambda_4 T_2 + 6\lambda_4 H + b_3 . \tag{3.30}$$

В последнее равенство (3.30) подставим выражение (3.29), получим:

$$b_2^2 = 4T_1 T_2 + 4T_2^2 + 6HT_2 + b_2 b_3 . \tag{3.31}$$

Из равенства (3.31) можно выразить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2). \tag{3.32}$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 = \lambda_3 b_1 , \qquad \lambda_3 = \frac{T_1}{b_1}. \tag{3.33}$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (3.15), которое представляем в следующем виде:

$$b_1 \;=\; 6\lambda_3\, H + 4\lambda_3\, T_1 \;+ b_2\;. \tag{3.34}$$

В равенство (3.34) подставим выражение (3.33), получим:

$$b_1^2 \;=\; 6HT_1 \;+ 4T_1^2 + b_1\; b_2\;. \tag{3.35}$$

Из равенства (3.35) можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 \;=\; b_1 \;- \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \tag{3.36}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_1:

$$H \;=\; 2\lambda_1\, A_1\;, \qquad \lambda_1 \;=\; \frac{H}{2A_1}\,. \tag{3.37}$$

Рассматриваем второе уравнение системы (3.15), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_2:

$$H \;=\; \lambda_2\, A_2\;, \qquad \lambda_2 \;=\; \frac{H}{A_2}\;\; . \tag{3.38}$$

Из уравнения связи (3.2) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 \;=\; \sqrt{d^2 - H^2}. \tag{3.39}$$

Используя равенство (3.39), множитель Лагранжа λ_1 можно определить по формуле:

$$\lambda_1 \;=\; \frac{H}{2\sqrt{d^2 - H^2}}\;\; . \tag{3.40}$$

Из уравнения связи (3.3) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 \;=\; \sqrt{d^2 - 9H^2}. \tag{3.41}$$

Используя равенство (3.41), выражение (3.38) можно представить в следующем виде:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{H^2-9H^2}} \quad . \tag{3.42}$$

Рассматриваем третье уравнение системы (3.15), которое представляем в следующем виде:

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 3b_1 \; . \tag{3.43}$$

В последнее равенство (3.43) подставим выражения для множителей Лагранжа λ_1 *и* λ_2, получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + 18\frac{H^2}{A_2} + 3b_1. \tag{3.44}$$

Из равенства (3.44) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{d^2 - H^2} + 2\sqrt{d^2 - 9H^2} - (\frac{H^2}{\sqrt{d^2-H^2}} + 18\frac{H^2}{\sqrt{d^2-9H^2}})). \tag{3.45}$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, толщину первой пары боковых обрезных досок можно определить из уравнения связи (3.4) по формуле:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \tag{3.46}$$

Зная ширину боковой обрезной доски, её толщину можно определить из уравнения связи.

Толщина второй боковой обрезной доски:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \tag{3.47}$$

Толщина третьей боковой обрезной доски:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \tag{3.48}$$

Толщина четвертой боковой обрезной доски:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \tag{3.49}$$

Толщина пятой боковой обрезной доски:

$$T_5 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \tag{3.50}$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (3.15) и учтены все уравнения связи. Получены формулы, в которых размеры

брусьев и досок взаимосвязаны. Определить по этим формулам непосредственно оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным. В связи с этим для реализации математической модели воспользуемся численным методом.

Алгоритм решения задачи. По аналогии с решением предыдущих задач оптимизации размеры брусьев и досок можно определить по следующим формулам [82]. Алгоритм решения задач оптимизации представляем начиная от центрального бруса.

Ширина пласти центрального бруса [58]:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (3.51)$$

Ширина наружной пласти боковых брусьев [72]:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (3.52)$$

Ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + 2A_2 - H^2(\frac{1}{A_1} + \frac{18}{A_2})). \quad (3.53)$$

Толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \quad (3.54)$$

Ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \quad (3.55)$$

Толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \quad (3.56)$$

Ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2). \quad (3.57)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (3.58)$$

Ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3}{b_3}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3). \quad (3.59)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (3.60)$$

Ширина пятой пары боковых обрезных досок:

$$b_5 = b_4 - \frac{2T_4}{b_4}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4). \quad (3.61)$$

Толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$T_5 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \quad (3.62)$$

Таким образом алгоритм решения задачи оптимизации составлен. Однако в этих формулах размеры брусьев и досок взаимосвязаны не только между собой, но и с размерами пиловочника. Определить по этому алгоритму оптимальные размеры брусьев и досок классическим методом невозможно.

Методика выполнения расчетов. Поэтому для решения задачи воспользуемся численным методом. Для этого задаемся толщиной бруса, а остальные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также значение целевой функции определяем по представленным выше формулам. Для облегчения расчетов и анализа результатов полученные формулы представляем в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$.

Алгоритм решения задачи оптимизации в относительных единицах представлен ниже.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (3.63)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - 9m_H^2}. \quad (3.64)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}\left(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H^2\left(\frac{1}{m_{A_1}} + \frac{18}{m_{A_2}}\right)\right). \quad (3.65)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - 3m_H\right). \quad (3.66)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}(3m_H + 2m_{T_1}). \quad (3.67)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1}\right)\right). \quad (3.68)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}). \quad (3.69)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}\right)\right). \quad (3.70)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}\right). \quad (3.71)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}\right)\right). \quad (3.72)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = \frac{b_5}{d} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}}{m_{b_4}}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4}\right). \quad (3.73)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = \frac{T_5}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4}\right)\right). \quad (3.74)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (3.75)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2(m_{T_1}m_{b_1} + m_{T_2}m_{b_2} + m_{T_3}m_{b_3} + m_{T_4}m_{b_4} + m_{T_5}m_{b_5}). \quad (3.76)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (3.77)$$

Выполнение расчетов. Расчеты производятся в два этапа. Вначале на первом этапе выполнения расчетов задаемся относительной толщиной бруса с градацией 0,01 в пределах 0,1…0,16 от диаметра бревна в вершинном торце и определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим максимальное значение целевой функции и определяем оптимальный диапазон изменения относительной толщины бруса [69]. Результаты расчетов представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Относительные размеры брусьев и боковых досок, а также величина целевой функции при изменении толщины брусьев

№	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}
1	0,1	0,995	0,9539	0,9014	0,0665	0,8375	0,0567	0,7634
2	0,11	0,9939	0,944	0,8797	0,0728	0,8009	0,0616	0,7089
3	0,12	0,9928	0,933	0,8554	0,0789	0,7599	0,0661	0,6468
4	**0,13**	**0,9915**	**0,9208**	**0,8286**	**0,0849**	**0,7138**	**0,0702**	**0,576**
5	0,14	0,9902	0,9075	0,7989	0,0907	0,6622	0,0739	0,495
6	0,15	0,9884	0,893	0,7661	0,0966	0,6045	0,0769	0,401
7	0,16	0,9871	0,8774	0,7301	0,1016	0,5399	0,0793	0,292

Окончание табл. 3.1

№	m_{T_3}	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
1	0,0497	0,6793	0,044	0,5843	0,0388	0,2903	0,396	0,6862403
2	0,0533	0,6029	0,0463	0,4804	0,0396	0,317	0,3961	0,7130989
3	0,0563	0,514	0,0476	0,3552	0,0385	0,343	0,3846	0,7276163
4	**0,0586**	**0,4097**	**0,0474**	**0,1988**	**0,0339**	**0,3683**	**0,3608**	**0,7290943**
5	0,0598	0,2851	0,0448	0	0	0,3927	0,3269	0,7203458
6	0,0595	0,1301	0,0378	0	0	0,4294	0,3118	0,7146018
7	0,0572	0	0	0	0	0,4386	0,2674	0,7061497

По результатам расчетов можно сделать вывод, что целевая функция принимает максимальное значение при относительной толщине бруса m_H = 0,13, причем максимальное значение целевой функции на-

ходится в диапазоне m_H = 0,12…0,13. Далее, на втором этапе выполнения расчетов, задаемся толщиной бруса с интервалом 0,001 в ранее полученный диапазон максимального значения целевой функции. Затем по алгоритму в этом оптимальном диапазоне определяем все размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величину целевой функции. На основании расчетов находим максимальное значение целевой функции, которое и принимаем за оптимальное решение задачи, так как полагаем, что такая точность расчетов достаточная. Результаты расчетов сводятся в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Относительные размеры брусьев и боковых досок, а также величина целевой функции при изменении толщины брусьев в оптимальном диапазоне

№	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}
1	0.123	0.9924	0.9294	0.8477	0.0808	0.7466	0.0674	0.6265
2	0.124	0.9923	0.9282	0.845	0.0814	0.7421	0.0678	0.6196
3	0.125	0.9922	0.927	0.8424	0.082	0.7375	0.0682	0.6125
4	**0.126**	**0.992**	**0.9258**	**0.8397**	**0.0826**	**0.7329**	**0.0686**	**0.6054**
5	0.127	0.9919	0.9246	0.8369	0.0832	0.7282	0.069	0.5982
6	0.128	0.9918	0.9233	0.8342	0.0838	0.7234	0.0694	0.5909
7	0.129	0.9916	0.9221	0.8314	0.0843	0.7186	0.0698	0.5835

Окончание табл. 3.2

№	m_{T_3}	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	$z_{бр}$	$z_д$	z
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.0571	0.4845	0.0477	0.3123	0.0376	0.3507	0.3787	0.72946
2	0.0573	0.4743	0.0477	0.2973	0.0372	0.3532	0.3765	0.72984
3	0.0575	0.464	0.0477	0.2819	0.0368	0.3558	0.3742	0.73
4	**0.0578**	**0.4535**	**0.0477**	**0.2662**	**0.0363**	**0.3583**	**0.3718**	**0.73013**
5	0.058	0.4429	0.0476	0.25	0.0358	0.3608	0.3692	0.73
6	0.0582	0.432	0.0476	0.2334	0.0352	0.3633	0.3665	0.72987
7	0.0584	0.421	0.0475	0.2164	0.0346	0.3658	0.3637	0.729564

Анализ результатов расчетов. По результатам расчетов определено максимальное значение целевой функции, относительная величина которой равна Z = 0,7301. Максимальное значение целевой функции наблюдается при относительной толщине бруса m_H = 0,126.

С увеличением относительной толщины бруса площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а суммарная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. При этом целевая функция принимает максимальное значение при относительной толщине бруса m_H = 0,126.

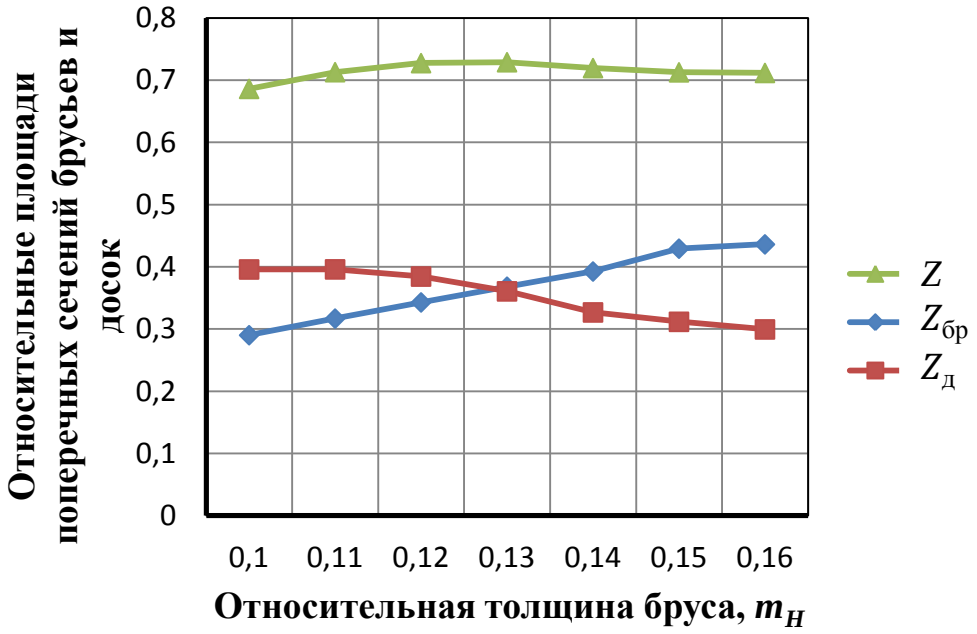


Рис. 3.2. Влияние относительной толщины бруса на относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

Расчеты показали, что оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев немного меньше, чем оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок. Таким образом, подтверждается гипотеза о том, что имеется максимальное значение целевой функции при определенной толщине бруса (рис. 3.2).

С увеличением относительной толщины бруса относительные толщины двух пар боковых обрезных досок, расположенные ближе к центру бревна, возрастают, а толщины остальных боковых обрезных досок, расположенные в периферии, вначале немного возрастают, а затем уменьшаются (см. рис. 3.3). Относительная толщина четвертой пары боковой обрезной доски уменьшается также ускоренно и при относительной толщине бруса m_H = 0,16 принимает нулевое значение. При этом относительная толщина крайней боковой обрезной доски уменьшается ускоренно и при относительной толщине бруса m_H = 0,14 принимает толщину равную нулю.

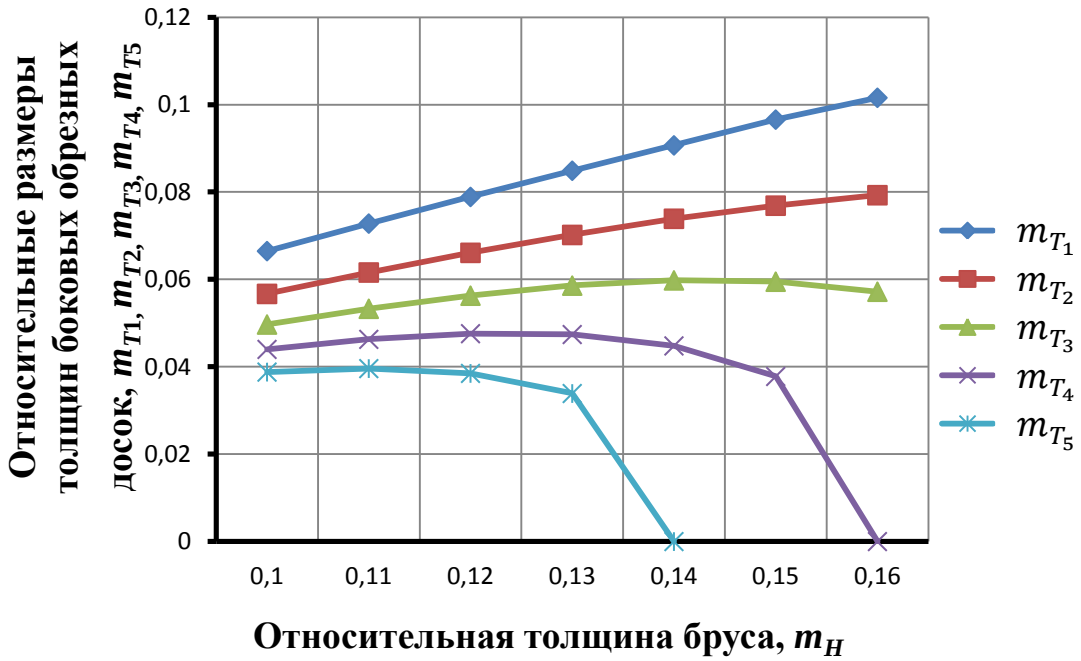


Рис. 3.3. Влияние относительной толщины бруса
на относительные толщины боковых обрезных досок

Следовательно, изменение относительной толщины бруса оказывает различное влияние на относительные размеры боковых обрезных досок. Это затрудняет выбор оптимальных размеров этих боковых обрезных досок. Если рассматривать диапазон изменения относительных толщин бруса m_H = 0,12...0,13, то в этом диапазоне относительные толщины боковых обрезных досок изменяются не столь значительно. Этот диапазон следует рекомендовать при расчете и составлении поставов. Следует обратить внимание, что в этом диапазоне изменения толщины бруса относительные толщины боковых обрезных досок изменяются различно.

С увеличением относительной толщины выпиливаемого бруса относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.4). При этом уменьшение относительной ширины доски возрастает в зависимости от её расположения в поперечном сечении пиловочника относительно сердцевины бревна. Ширина периферийных боковых обрезных досок при увеличении относительной толщины бруса уменьшается в большей степени [82].

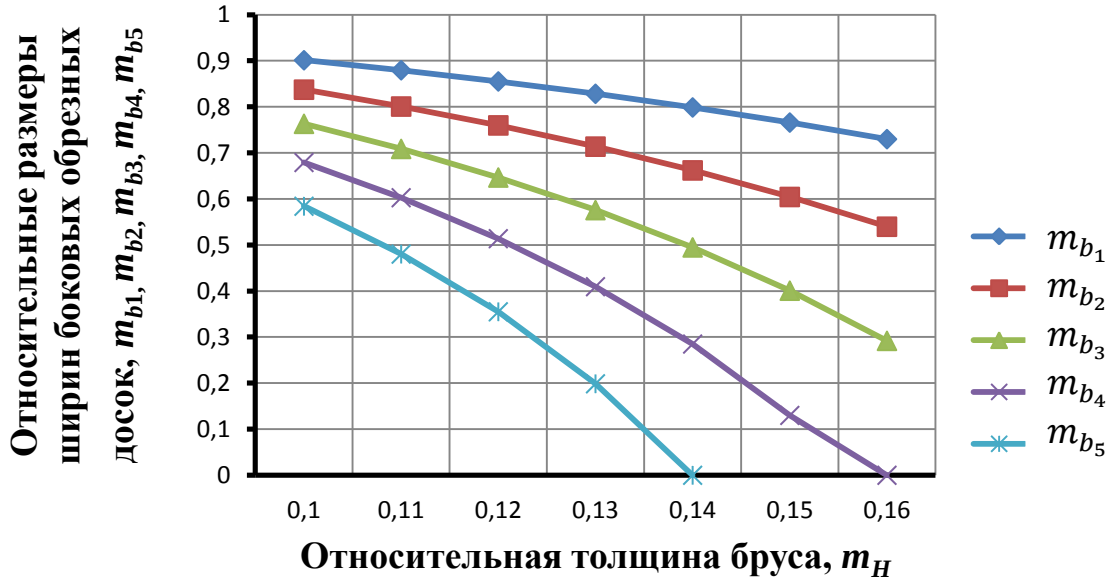


Рис. 3.4. Влияние относительной толщины бруса
на относительную ширину боковых обрезных досок

Результаты расчетов показали, что пятая пара боковых обрезных досок принимает нулевое значение при относительной толщине бруса m_H = 0,14, а четвертая пара боковых обрезных досок принимает нулевое значение при относительной толщине бруса m_H = 0,16 [82]. Следовательно, при расчете и составлении поставов необходимо относительную толщину бруса выбирать в небольшом диапазоне от оптимального относительного значения. По полученным данным, этот диапазон можно обозначить в пределах m_H = 0,12…0,13. В этом случае относительные толщины и ширины боковых обрезных досок изменяются в различных пределах, но значения этих размеров всегда положительные.

Таким образом, расчеты показали, что при оптимальной относительной толщине бруса m_H = 0,126 оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок оказались следующими:

m_{T_1} = 0,0826, m_{b_1} = 0,8397,
m_{T_2} = 0,0686, m_{b_2} = 0,7329,
m_{T_3} = 0,0578, m_{b_3} = 0,6054,
m_{T_4} = 0,0477, m_{b_4} = 0,4535,
m_{T_5} = 0,0363. m_{b_5} = 0,2662.

3.2. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок

Постановка задачи. Определение оптимальных размеров бруса и досок для данного варианта раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и пяти пар боковых обрезных досок ранее было выполнено без учета ширины пропила. Рассмотрим влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок (рис. 3.5) [43].

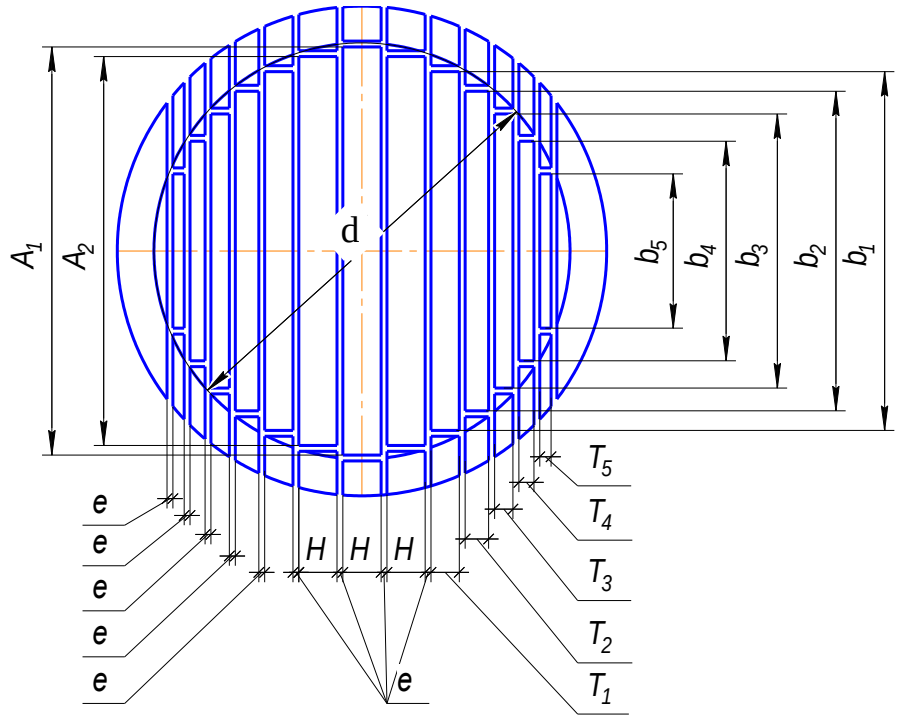


Рис. 3.5. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и пяти пар боковых досок с учетом ширины пропила

Составление математической модели. В качестве критерия оптимальности выбираем выход пилопродукции [57]. Целевую функцию представляем в виде суммы поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, получаемых после первого прохода брусоворазвального способа раскроя пиловочника, так как в задаче оптимизации учитывается только пифагорическая зона пиловочника [55]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5. \qquad (3.78)$$

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и боковых обрезных досок с учетом ширины пропила можно представить следующими уравнениями [57].

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (3.79)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (3H + 2e)^2 = 0. \quad (3.80)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (3H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (3.81)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (3.82)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0. \quad (3.83)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \quad (3.84)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 12e)^2 = 0. \quad (3.85)$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующие уравнения без квадратных скобок.

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - 9H^2 - 12He - 4e^2 = 0. \quad (3.86)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 12HT_1 - 24He - 16T_1e = 0. \quad (3.87)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 36He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e = 0. \end{gathered} \quad (3.88)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 48He - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e = 0. \end{gathered} \quad (3.89)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - \\ -100e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 60He - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40T_1e - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -40T_2e - 8T_3T_4 - 40T_3e - 40T_4e = 0. \quad (3.90)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - \\ -144e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - \\ -72He - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 48T_1e - 8T_2T_3 - \\ -8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 48T_2e - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\ -48T_3e - 8T_4T_5 - 48T_4e - 48T_5e = 0. \quad (3.91)$$

Полагаем, что математическая модель данной оптимизационной задачи составлена.

Отличие представленных уравнений связи от предыдущих заключается в том, что в этих уравнениях добавляется еще один неизвестный параметр – ширина пропила, которая связана с количеством и размерами не только брусьев, но и боковых обрезных досок.

Алгоритм решения задачи [53]. По полученным формулам непосредственно определить оптимальные размеры брусьев и досок невозможно. Решая данную математическую модель такими же используемыми ранее методами, получим ряд идентичных новых равенств, по которым определить оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным. В связи с этим используем численный метод. Для его реализации составляем алгоритм решения задачи в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$, и $m_e = e/d$.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (3.92)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (3m_H + 2m_e)^2}. \quad (3.93)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H\left(\frac{m_H}{m_{A_1}} + \frac{18m_H}{m_{A_2}} + \frac{12m_e}{m_{A_2}}\right)). \quad (3.94)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (3m_H + 4m_e)\right). \quad (3.95)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}(3m_H + 2m_{T_1} + 6m_e)}{m_{b_1}}. \quad (3.96)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 6m_e\right)\right). \quad (3.97)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)}{m_{b2}}. \quad (3.98)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)\right). \quad (3.99)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)}{m_{b_3}}. \quad (3.100)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)\right). \quad (3.101)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = \frac{b_5}{d} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e\right)}{m_{b_4}}. \quad (3.102)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = \frac{T_5}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + \right. \\ \left. + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)\right). \quad (3.103)$$

Относительная площадь поперечного сечения брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (3.104)$$

Относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{b_2} m_{T_2} + 2m_{b_3} m_{T_3} + 2m_{b_4} m_{T_4} + 2m_{b_5} m_{T_5}. \quad (3.105)$$

Суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (3.106)$$

Таким образом, алгоритм решения задачи оптимизации для данной схемы раскроя пиловочника в относительных единицах составлен.

Выполнение расчетов. Расчеты по представленным формулам производятся в следующем порядке. Вначале задаемся относительной величиной ширины пропила m_e. Затем для этой относительной ширины пропила изменяем толщину бруса в различных пределах с градацией 0,001 и вычисляем размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим вариант, в котором целевая функция принимает максимальное значение [82]. Результаты расчетов сводятся в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величина целевой функции при изменении относительной ширины пропила

№	m_e	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}	m_{T_3}
1	0	0.126	0.992	0.926	0.840	0.083	0.733	0.069	0.605	0.058
2	0.001	0.128	0.992	0.922	0.833	0.083	0.723	0.068	0.593	0.056
3	0.002	0.130	0.992	0.919	0.826	0.083	0.712	0.067	0.579	0.055
4	0.003	0.132	0.991	0.916	0.819	0.083	0.702	0.066	0.566	0.053
5	0.004	0.134	0.991	0.912	0.812	0.083	0.691	0.066	0.552	0.051
6	0.005	0.136	0.991	0.908	0.804	0.083	0.680	0.065	0.538	0.050
7	0.006	0.138	0.990	0.905	0.797	0.083	0.669	0.064	0.524	0.048
8	0.007	0.141	0.990	0.899	0.786	0.084	0.651	0.063	0.501	0.046

Продолжение табл. 3.3

№	m_e	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}	m_{T_3}
9	0.008	0.143	0.990	0.896	0.778	0.084	0.639	0.062	0.486	0.044
10	0.009	0.146	0.989	0.889	0.766	0.084	0.621	0.062	0.462	0.043
11	0.010	0.150	0.989	0.883	0.751	0.085	0.596	0.061	0.427	0.041

Окончание табл. 3.3

№	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
1	0.454	0.048	0.266	0.036	0.358	0.372	0.730
2	0.439	0.045	0.253	0.034	0.363	0.359	0.722
3	0.425	0.043	0.241	0.031	0.368	0.347	0.715
4	0.410	0.041	0.228	0.028	0.373	0.335	0.708
5	0.396	0.038	0.216	0.025	0.377	0.323	0.700
6	0.381	0.036	0.205	0.022	0.382	0.311	0.693
7	0.366	0.033	0.194	0.019	0.386	0.290	0.686
8	0.339	0.031	0.166	0.016	0.393	0.286	0.679
9	0.324	0.028	0.156	0.013	0.398	0.275	0.673
10	0.295	0.025	0.128	0.009	0.404	0.262	0.666
11	0.251	0.022	0.079	0.004	0.413	0.247	0.661

Результаты расчетов. С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальная относительная толщина бруса m_H возрастает, и, следовательно, оптимальные относительные ширины пластей брусьев уменьшаются (см. рис. 3.6).

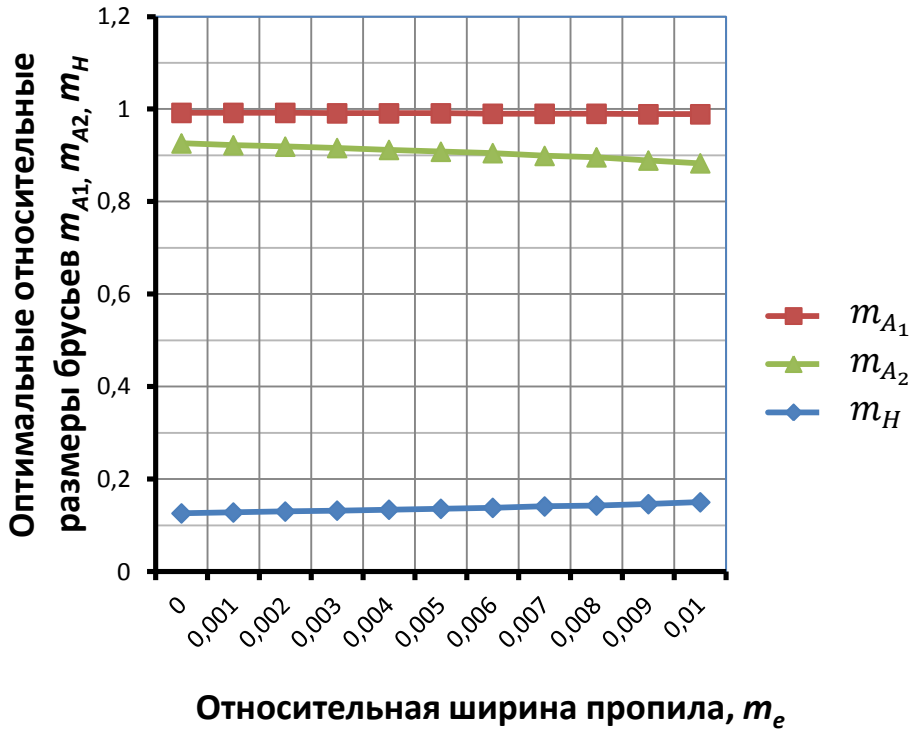


Рис. 3.6. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 3.7). В итоге суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев и досок уменьшается. Следовательно, увеличение площади поперечного сечения брусьев с увеличением относительной ширины пропила происходит в меньшей степени по сравнению с уменьшением площади поперечного сечения боковых обрезных досок.

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальные относительные толщины первой пары боковых обрезных досок практически мало изменяются (немного возрастают), а оптимальные относительные толщины других пар боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.8). Особенно уменьшаются оптимальные относительные толщины крайних боковых обрезных досок. Оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски при $m_e = 0{,}01$ принимает значение равное 0,004 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Такой сложный характер изменения оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок при изменении относительной ширины пропила для данной схемы раскроя пиловочника установлен впервые в работах [43, 55].

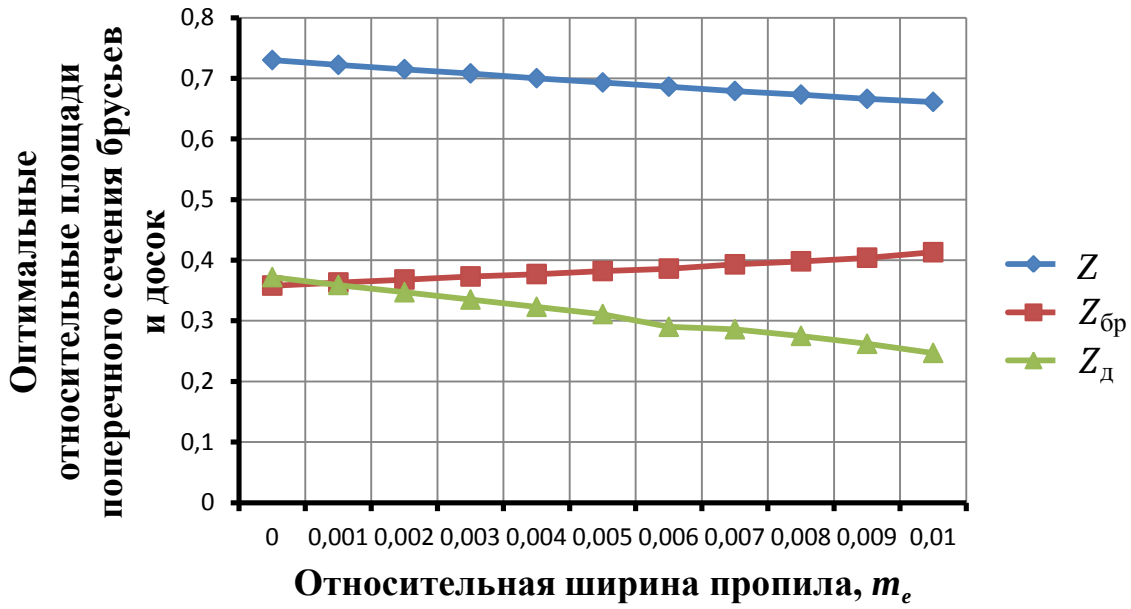


Рис. 3.7. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

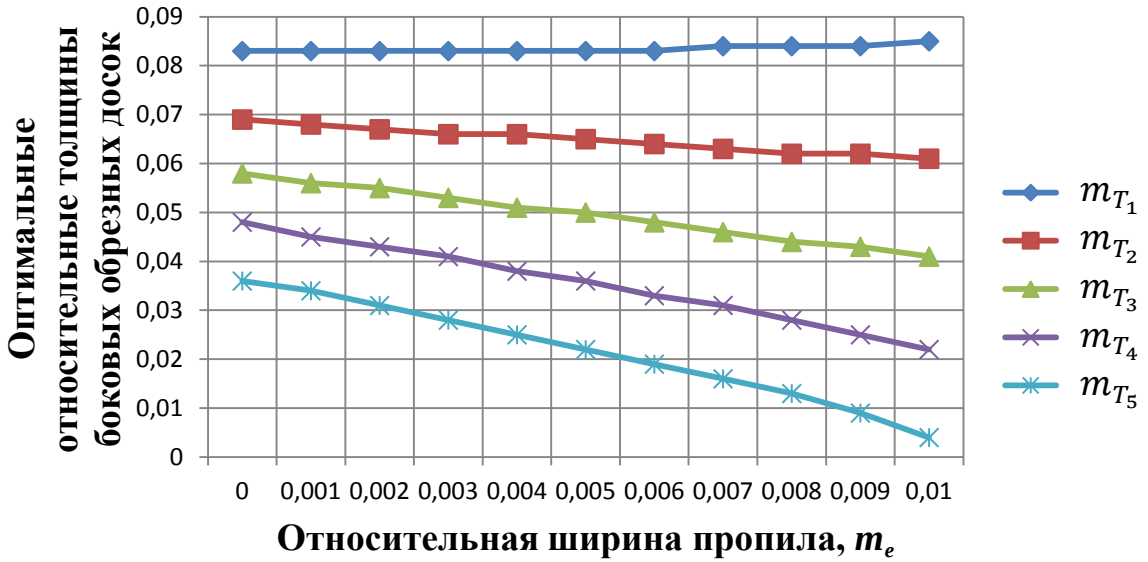


Рис. 3.8. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные толщины боковых обрезных досок

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются. Наибольшее изменение оптимальной относительной ширины наблюдается у крайней боковой обрезной доски. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски принимает значение 0,08 от диаметра пиловочника в верхнем торце (см. рис. 3.9).

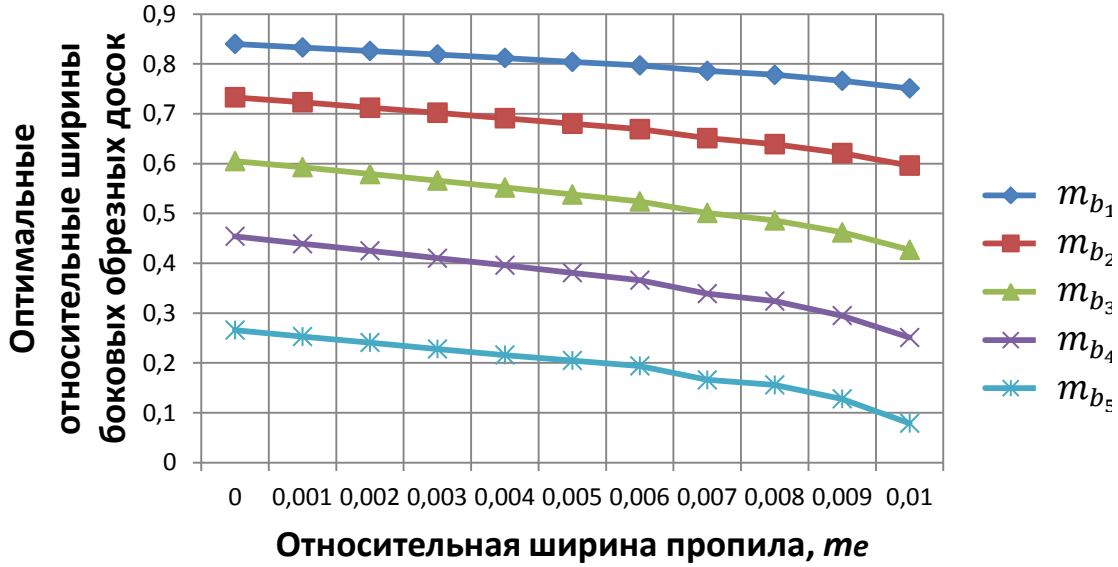


Рис. 3.9. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок

Анализируя результаты расчетов, можно отметить, что оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев с уве-

личением относительной ширины пропила возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается. Общая оптимальная относительная площадь поперечных сечений пилопродукции с увеличением относительной ширины пропила уменьшается (см. рис. 3.7). С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина брусьев возрастает, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок уменьшаются.

На практике относительная ширина пропила чаще всего находится в пределах $m_e = 0{,}005 \ldots 0{,}007$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае оптимальные относительные размеры брусьев изменяются не столь значительно, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок изменяются более существенно. Это затрудняет выбор стандартных размеров и брусьев, и особенно размеров боковых обрезных досок.

Таким образом, аналитическим путем удалось решить задачу оптимизации раскроя пиловочника брусо-развальным способом с выпиливанием трех брусьев и пяти пар боковых досок с учетом ширины пропила. Ширина пропила оказывает наибольшее влияние на размеры крайних боковых обрезных досок [58].

Следовательно, при расчете и составлении поставов ширину пропила следует учитывать дифференцированно, с учетом полученных результатов.

3.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины

Постановка задачи. На лесопильных предприятиях центральный брус чаще всего выпиливают по толщине больше, чем боковые. Иногда возможен также вариант выпиливания центрального бруса по толщине меньше, чем боковые брусья (рис. 3.10). Поэтому необходимо знать, какое соотношение размеров брусьев по толщине является наиболее предпочтительным. Вначале задачу оптимизации рассматриваем без учета ширины пропила [65].

Такая схема распила пиловочника крупных размеров широко используется в промышленности. Однако для такой схемы раскроя до сих пор отсутствуют рекомендации по выбору оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок [101].

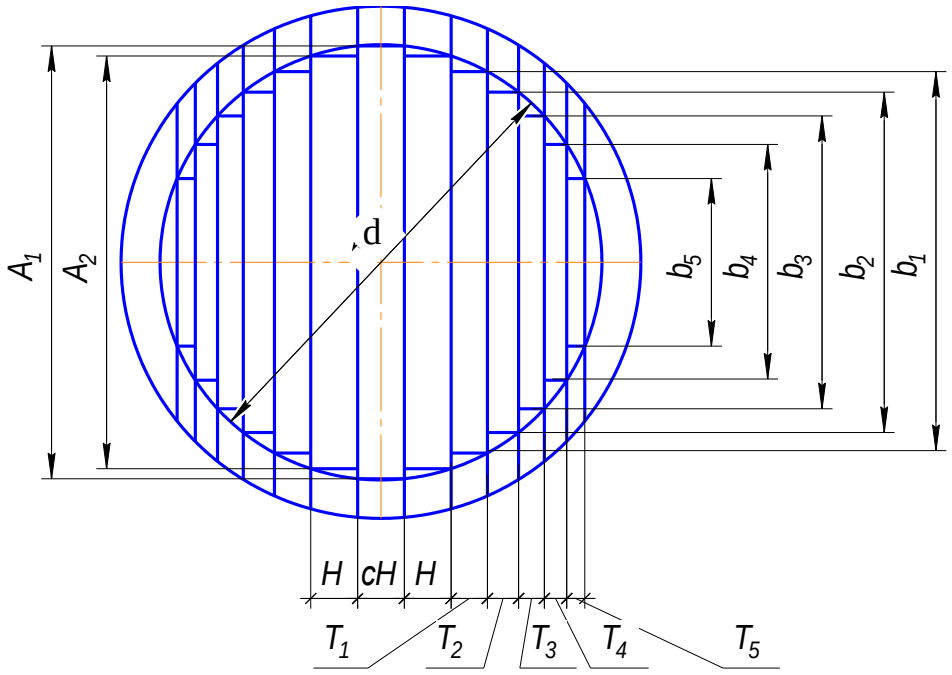


Рис. 3.10. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и пяти пар боковых обрезных досок

Составление математической модели [82]. В данной задаче оптимизации раскроя пиловочника рассматривается пифагорическая зона. Целевую функцию представляем в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + \\ +2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5. \quad (3.107)$$

Уравнения связи составляем, используя теорему Пифагора. Взаимосвязь диаметра пиловочника в вершинном торце с размерами брусьев и боковых обрезных досок представляем следующими уравнениями [82].

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \quad (3.108)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - H^2(c+2)^2 - A_2^2 = 0. \quad (3.109)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1)^2 - b_1^2 = 0. \quad (3.110)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)^2 - b_2^2 = 0. \quad (3.111)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 - b_3^2 = 0. \quad (3.112)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 - b_4^2 = 0. \quad (3.113)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)^2 - b_5^2 = 0. \quad (3.114)$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующие равенства.

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2 = 0. \quad (3.115)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1 = 0. \quad (3.116)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\ -4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \end{gathered} \quad (3.117)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - \\ -4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 8HT_1 - 8HT_2 - \\ -8HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0. \end{gathered} \quad (3.118)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - \\ -4T_4^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_3T_4 = 0. \end{gathered} \quad (3.119)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - -4cHT_4 - \\ 4cHT_5 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - -8HT_5 - 4T_1^2 - \\ 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - \\ 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 4T_5^2 = 0. \end{gathered} \quad (3.120)$$

Полагаем, что математическая модель данной оптимизационной задачи составлена.

Решение математической модели. Для решения данной математической модели воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$\begin{gathered} L = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + \\ +\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2) + \\ +\lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1) + \\ +\lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - \\ -4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2) + \\ +\lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 4T_3^2) + \\ +\lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -8HT_4 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 4T_2^2 - \\ -8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 4T_4^2) + \\ +\lambda_7(d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - 4H^2 - 8HT_1 - \\ -8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_5 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - \\ -8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\ -4T_4^2 - 8T_4T_5 - 4T_5^2). \end{gathered} \tag{3.121}$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю. Решая эту математическую модель по аналогии с предыдущей задачей, можно написать следующие формулы для определения размеров брусьев и боковых обрезных досок.

Ширина пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \tag{3.122}$$

Ширина наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH+2H)^2}. \tag{3.123}$$

Ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{c(d^2 - 2c^2H^2)}{(c+2)\sqrt{d^2 - c^2H^2}} + \frac{2(d^2 - 2H^2(c+2)^2)}{(c+2)\sqrt{d^2 - (cH+2H)^2}}. \tag{3.124}$$

Толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H)). \quad (3.125)$$

Ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1(cH + 2H + 2T_1)}{b_1}. \quad (3.126)$$

Толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1)). \quad (3.127)$$

Ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)}{b_2}. \quad (3.128)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (cH + 2\text{H} + 2T_1 + 2T_2)). \quad (3.129)$$

Ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)}{b_3}. \quad (3.130)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (cH + 2\text{H} + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (3.131)$$

Ширина пятой пары боковых обрезных досок:

$$b_5 = b_4 - \frac{2T_4(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)}{b_4}. \quad (3.132)$$

Толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$T_5 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \quad (3.133)$$

Площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cHA_1 + 2HA_2. \quad (3.134)$$

Площадь поперечных сечений всех пяти пар боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5. \quad (3.135)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (3.136)$$

В представленных выше формулах размеры брусьев и боковых обрезных досок взаимосвязаны и зависят от диаметра пиловочника в вершинном торце. Это затрудняет отыскание оптимальных размеров брусьев и досок. В связи с этим алгоритм решения задачи оптимизации данной схемы раскроя пиловочника представляем в относительных единицах, принимая диаметр пиловочника равным единице.

Алгоритм решения задачи. Для решения задачи воспользуемся численным методом. Задаемся величиной коэффициента *c*. Затем, задаваясь толщиной боковых брусьев в определенном диапазоне, определяем все остальные размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. В этом диапазоне изменения толщины брусьев отыскиваем максимальное значение целевой функции. Этот результат и будет являться оптимальным. Для упрощения расчетов и анализа результатов представляем формулы в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ [82]. Алгоритм решения задачи оптимизации в относительных единицах приводится ниже.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (3.137)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H)^2}. \quad (3.138)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b1} = \frac{c(1 - 2c^2\, m_{\text{Н}}^2)}{m_{A1}(c+2)} + \frac{2(1 - 2m_H^2(c+2)^2\,)}{m_{A2}(c+2)}. \quad (3.139)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T1} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b1}^2} - m_H(c+2)). \quad (3.140)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b2} = m_{b1} - \frac{2m_{T1}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1})}{m_{b1}}. \quad (3.141)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T2} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1})). \quad (3.142)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b3} = m_{b2} - \frac{2m_{T2}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2})}{m_{b2}}. \quad (3.143)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T3} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b3}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2})). \quad (3.144)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b4} = m_{b3} - \frac{2m_{T3}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3})}{m_{b3}}. \quad (3.145)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T4} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3})). \quad (3.146)$$

Относительная ширина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b5} = m_{b4} - \frac{2m_{T4}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3} + 2m_{T4})}{m_{b4}}. \quad (3.147)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T5} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b5}^2} - (cm_H + 2m_H + +2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3} + 2m_{T4})). \quad (3.148)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A1} + 2m_H m_{A2}. \quad (3.149)$$

Относительная площадь поперечных сечений всех пяти пар боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T1}m_{b1} + 2m_{T2}m_{b2} + 2m_{T3}m_{b3} + 2m_{T4}m_{b4} + 2m_{T5}m_{b5}. \quad (3.150)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \qquad (3.151)$$

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок, а также величина целевой функции при изменении параметров c и m_H заносятся в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок, а также величина целевой функции для различных параметров c и m_H

c	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}
0,5	0,133	0,997786	0,943103	0,849322	0,097687	0,727893	0,078908	0,579225
0,6	0,131	0,996906	0,940208	0,845296	0,096849	0,722863	0,078347	0,573078
0,8	0,126	0,994907	0,935699	0,840684	0,094363	0,719115	0,076682	0,570917
1	0,122	0,99253	0,930615	0,834652	0,092388	0,71272	0,075336	0,564432
1,2	0,118	0,989924	0,925969	0,829731	0,090282	0,708264	0,073892	0,560964
1,4	0,114	0,987182	0,921828	0,825961	0,088064	0,705752	0,072366	0,560465
1,5	0,113	0,98553	0,918466	0,821148	0,087607	0,69937	0,072022	0,552156
1,6	0,111	0,984103	0,91669	0,819916	0,086442	0,699205	0,071219	0,553566
1,8	0,108	0,980922	0,911906	0,814696	0,084744	0,694056	0,070016	0,548805
2	0,105	0,977701	0,907524	0,810337	0,082982	0,690325	0,068767	0,546182
2,2	0,102	0,974497	0,903589	0,806871	0,081164	0,688027	0,067479	0,545683
2,5	0,098	0,969523	0,897507	0,8012	0,078698	0,683645	0,065709	0,543351
2,8	0,095	0,963973	0,88998	0,792629	0,076852	0,674398	0,064332	0,533528
3	**0,093**	**0,960291**	**0,885311**	**0,787616**	**0,075583**	**0,669356**	**0,063388**	**0,528644**
3,2	0,091	0,956662	0,880955	0,783195	0,074288	0,66524	0,062426	0,525112
3,5	0,088	0,951386	0,875068	0,777722	0,072304	0,660841	0,060959	0,522376
3,8	0,085	0,946399	0,870029	0,773699	0,070277	0,658606	0,059468	0,522716
4	0,083	0,943279	0,867177	0,771847	0,068904	0,658328	0,058462	0,524637

Продолжение табл. 3.4

c	m_{T_3}	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	$Z_{\text{бр}}$	$Z_{\text{д}}$	Z
0,5	0,064738	0,397008	0,051324	0,159705	0,034675	0,317218	0,402095	0,719313
0,6	0,064255	0,389309	0,050803	0,148909	0,033872	0,324691	0,395246	0,719937
0,8	0,063058	0,389555	0,049998	0,153141	0,033601	0,336083	0,385048	0,72113
1	0,062016	0,383037	0,049127	0,146089	0,032769	0,348159	0,37404	0,722199
1,2	0,060946	0,381082	0,048351	0,146475	0,032337	0,358702	0,364454	0,723156
1,4	0,05986	0,38356	0,047669	0,154011	0,032277	0,367731	0,356256	0,723987
1,5	0,059491	0,372498	0,047146	0,137579	0,031229	0,374621	0,349734	0,724355
1,6	0,058942	0,376216	0,046863	0,14539	0,031421	0,378282	0,34643	0,724711
1,8	0,058015	0,372066	0,046128	0,141914	0,030836	0,387663	0,337651	0,725314

Окончание табл. 3.4

c	m_{T_3}	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	$Z_{бр}$	$Z_{д}$	Z
2	0,057084	0,371086	0,045466	0,143539	0,030523	0,395897	0,329912	0,725809
2,2	0,056153	0,373217	0,044876	0,150111	0,030463	0,403009	0,323185	0,726195
2,5	0,054845	0,373874	0,043987	0,155633	0,030168	0,413445	0,313136	0,726581
2,8	0,053707	0,36325	0,042955	0,142901	0,029023	0,425513	0,301264	0,726777
3	**0,052951**	**0,358596**	**0,042324**	**0,13824**	**0,028453**	**0,432589**	**0,294192**	**0,726781**
3,2	0,052202	0,355908	0,041744	0,136692	0,028046	0,438914	0,287793	0,726707
3,5	0,051094	0,355565	0,040968	0,140184	0,027737	0,447039	0,279436	0,726475
3,8	0,050009	0,359595	0,040301	0,150442	0,027755	0,453592	0,272518	0,72611
4	0,049297	0,364649	0,03991	0,160828	0,027919	0,45712	0,268663	0,725783

Анализ результатов расчетов. С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 3.11). Расчеты показали, что имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором оптимальная относительная площадь поперечного сечения становится максимальной. Это наблюдается при значении коэффициента *c* равном 3,0. Следует обратить внимание, что величина целевой функции в диапазоне коэффициента c = 2,8…3,0 изменяется всего лишь на 0,000004, но при этом размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также их площади поперечных сечений изменяются более существенно.

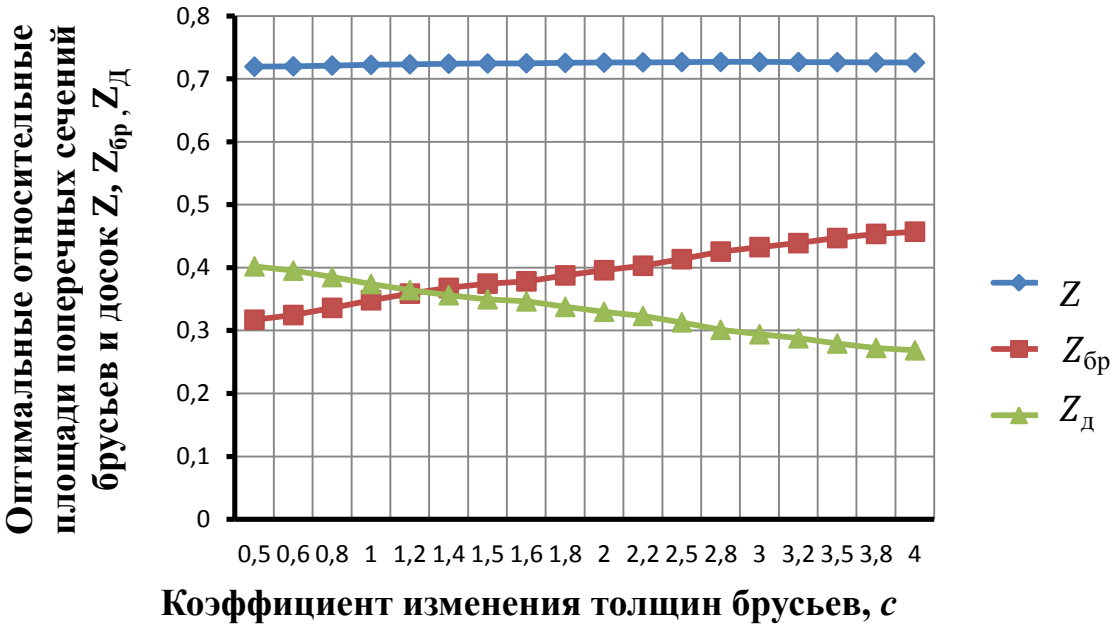


Рис. 3.11. Влияние коэффициента *c* на оптимальную относительную площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* оптимальная относительная толщина боковых брусьев уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает (см. рис. 3.12). Суммарное значение оптимальных относительных толщин брусьев возрастает. Оптимальные относительные ширины пластей брусьев с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* незначительно уменьшаются. Последняя зависимость объясняется тем, что при одном значении гипотенузы (диаметра пиловочника) с увеличением длины одного катета (радиуса бруса) прямоугольного треугольника величина другого катета (ширина пласти бруса) уменьшается.

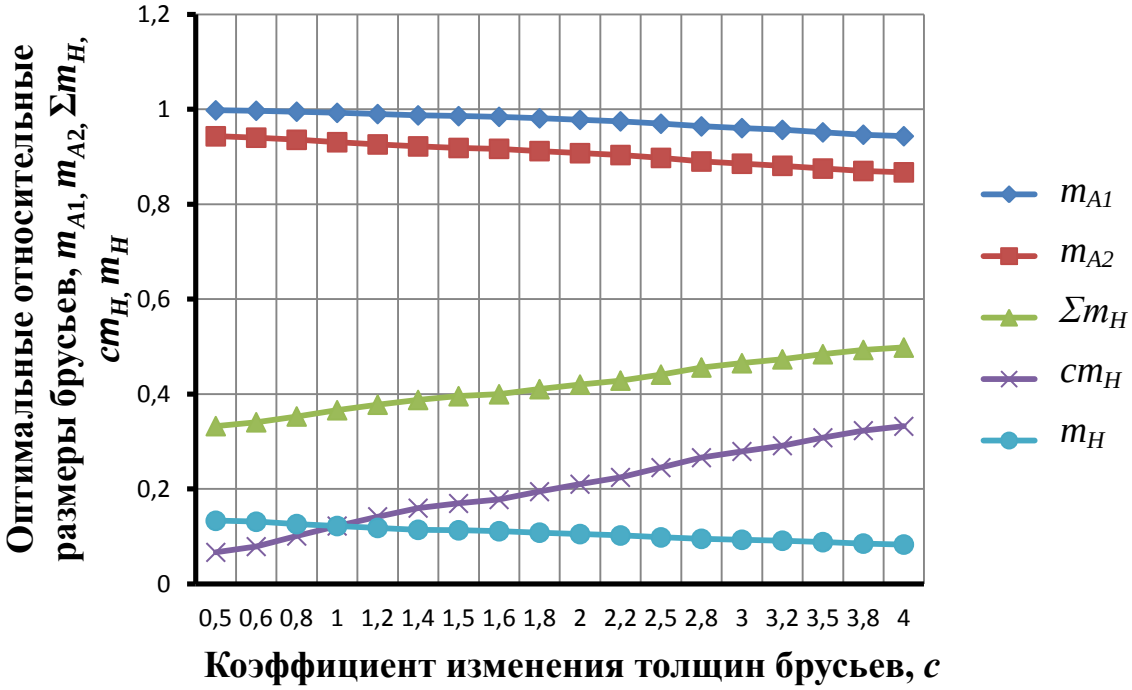


Рис. 3.12. Влияние коэффициента *c* на оптимальную относительную толщину бруса и оптимальную относительную ширину пласти центрального и боковых брусьев

С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная толщина боковых обрезных досок уменьшается. Уменьшение относительных толщин боковых обрезных досок при изменении относительной толщины бруса происходит практически прямо пропорционально (см. рис. 3.13).

Оптимальная относительная толщина первой пары боковой обрезной доски с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* уменьшается в большей степени, чем оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски.

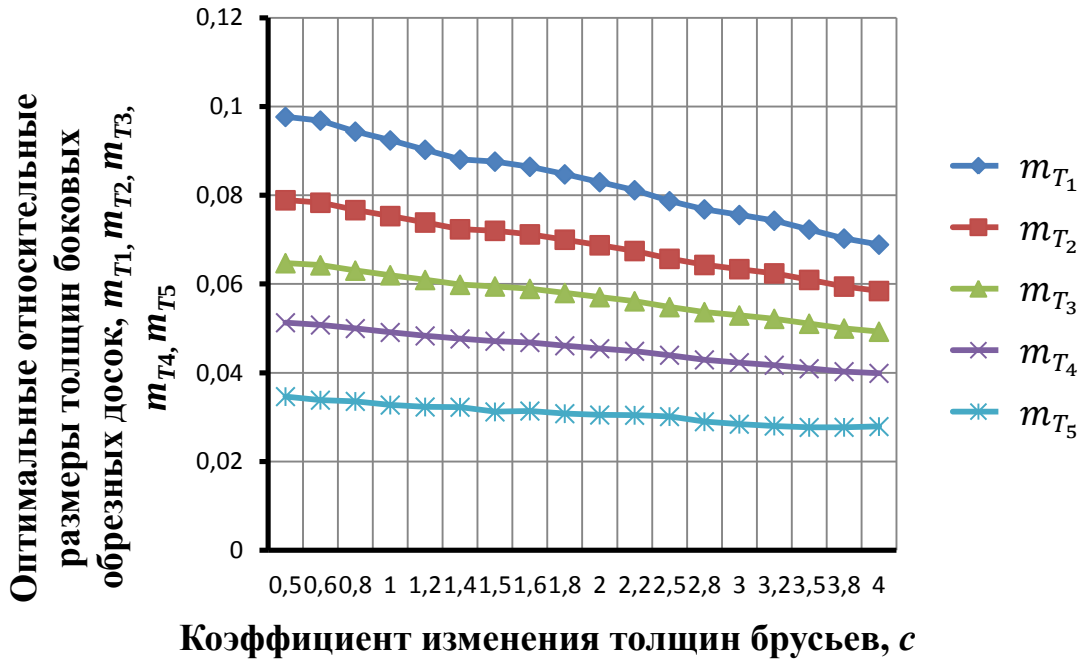


Рис. 3.13. Влияние коэффициента c
на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок

С увеличением коэффициента c оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.14).

Оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок отличаются между собой. Так, при коэффициенте изменения толщин брусьев $c = 2{,}0$ отношение $m_{b1}/m_{b2} = 1{,}2$, тогда как отношение $m_{b4}/m_{b5} = 2{,}6$.

Следует отметить, что оптимальная относительная суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок при изменении коэффициента c изменяется плавно и незначительно. Хотя при этом размеры брусьев и боковых обрезных досок изменяются более существенно [43]. Таким образом, определено глобальное оптимальное значение коэффициента изменения толщин брусьев c, при котором наблюдается максимальная суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок.

Это значение коэффициента изменения толщин брусьев $c = 3{,}0$. Следует также обратить внимание, что целевая функция в диапазоне изменения коэффициента $c = 2{,}0...3{,}8$ отличается от максимального значения целевой функции всего лишь на 0,13%. Однако при этом существенно изменяются слагаемые целевой функции $Z_{\text{бр}}$ и $Z_{\text{д}}$.

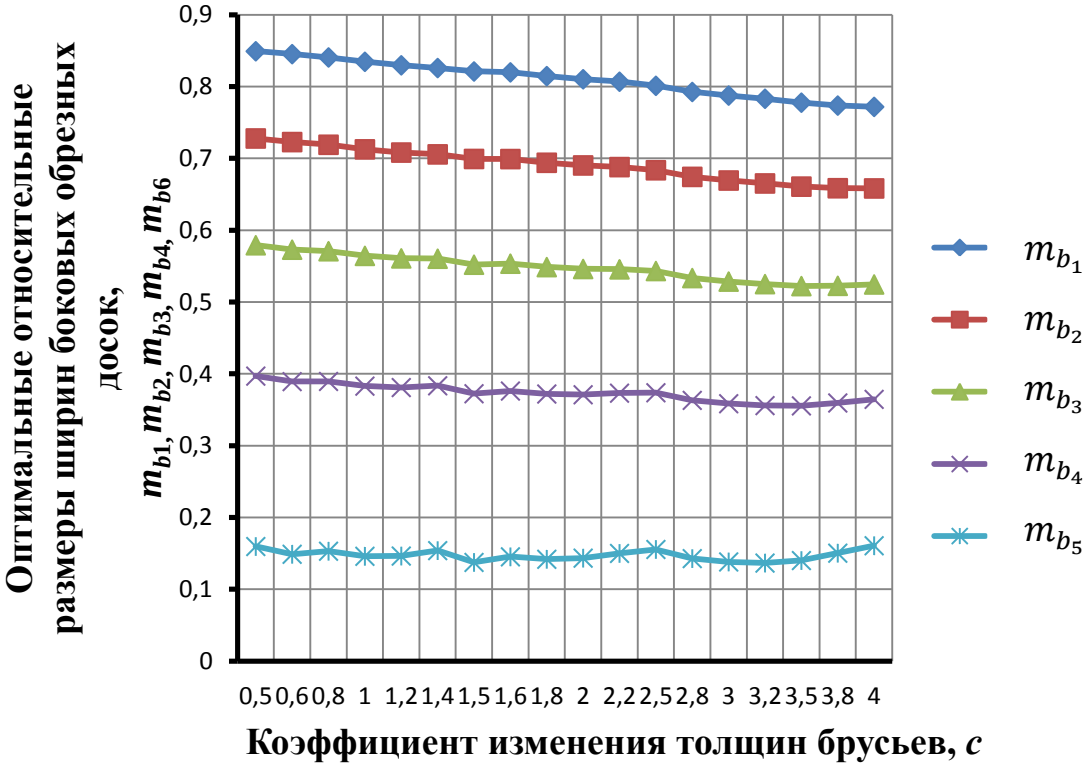


Рис. 3.14. Влияние коэффициента c на оптимальную относительную ширину боковых обрезных досок

Таким образом путем выбора величины коэффициента изменения толщин брусьев c в относительном диапазоне можно подобрать вариант при котором можно получить требуемые (спецификационные) брусьев и боковых обрезных досок.

3.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила

Постановка и математическая модель задачи. Ранее определение оптимальных относительных размеров бруса и боковых досок для данного варианта раскроя пиловочника было выполнено без учета ширины пропила. Рассмотрим влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок [43]. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев разной толщины и с учетом ширины пропила представлена на рис. 3.15.

В данной задаче оптимизации раскроя пиловочника учитывается ширина пропила. В связи с этим потери древесины в опилки уменьшаю выход пиломатериалов. Величина целевой функции математической модели задачи оптимизации изменяется. В настоящее время это изменение учитывается при расчете и составлении поставов путем

прибавления ширины пропила в расход постава к толщинам брусьев и боковых обрезных досок. В этом случае влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок не раскрывается.

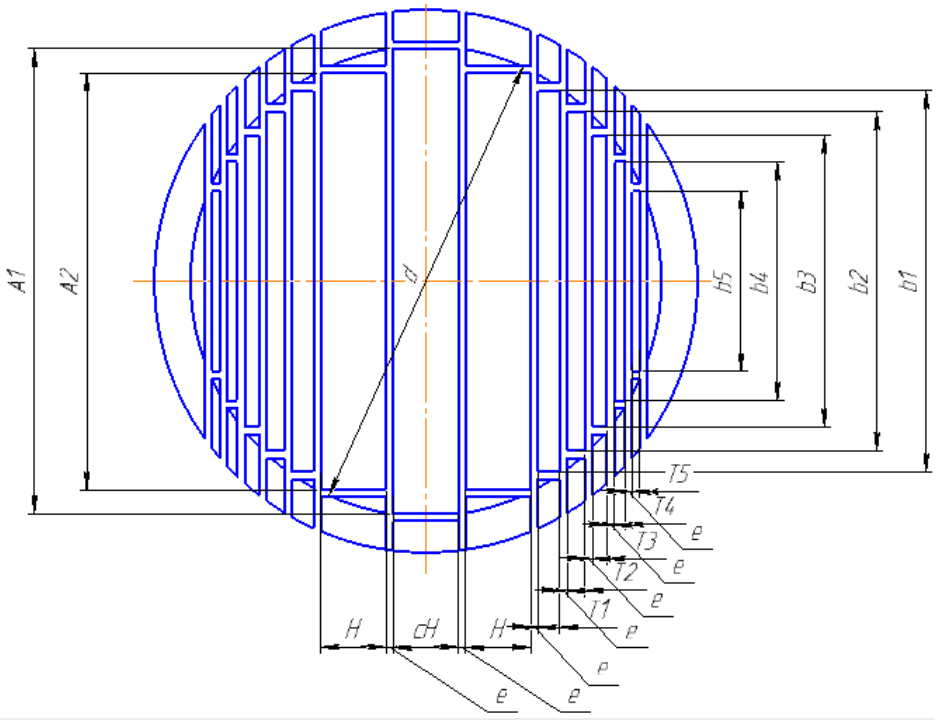


Рис. 3.15. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев разной толщины и пяти пар боковых досок с учетом ширины пропила

Целевую функцию для данной схемы раскроя пиловочника представляем в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, так как рассматривается пифагорическая зона, в которой длина получаемых брусьев и боковых обрезных досок равна длине бревна [43]:

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5. \qquad (3.152)$$

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника будут иметь следующий вид [43].

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \qquad (3.153)$$

Для боковых брусьев:

$$\begin{gathered} d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0, \\ d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - 8eH - 4e^2 = 0. \end{gathered} \qquad (3.154)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0.$$
$$d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 - \quad (3.155)$$
$$-8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2 = 0.$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0.$$
$$d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - \quad (3.156)$$
$$-4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 24eT_1 -$$
$$-4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2 = 0.$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) = 0.$$
$$d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 -$$
$$-16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 32eH - 4T_1^2 - \quad (3.157)$$
$$-8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 -$$
$$-4T_3^2 - 32eT_3 - 64e^2 = 0.$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0.$$
$$d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 -$$
$$-20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 40eH - 4T_1^2 - \quad (3.158)$$
$$-8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 40eT_2 -$$
$$-4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2 = 0.$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 12e)^2 = 0,$$
$$d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 -$$
$$-4cHT_5 - 24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 -$$
$$-8HT_4 - 8HT_5 - 48eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - \quad (3.159)$$
$$-8T_1T_5 - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 -$$
$$-48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 48eT_3 - 4T_4^2 -$$
$$-8T_4T_5 - 48eT_4 - 4T_5^2 - 48eT_5 - 144e^2 = 0.$$

Полагаем, что математическая модель задачи оптимизации для данной схемы раскроя пиловочника составлена. В этих формулах размеры брусьев и боковых обрезных досок взаимосвязаны и зависят от диаметра пиловочника в вершинном торце.

Решение математической модели. Для решения данной математической модели раскроя пиловочника воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде [43]:

$$L = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + \\ +\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - \\ -4H^2 - 8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\ -8ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) + \\ +\lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\ -4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - \\ -4T_1^2 - 8T_1T_2 - 24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - \\ -c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16ecH - 4H^2 - \\ -8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - \\ -4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 - 32eT_3 - 64e^2) + \\ +\lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\ -4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - \\ -8HT_3 - 8HT_4 - 40eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - \\ -4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - \\ -40eT_4 - 100e^2) + \lambda_7(d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\ -4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - \\ -4cHT_5 - 24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -8HT_4 - 8HT_5 - 48eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - \\ -8T_1T_5 - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - \\ -48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 48eT_3 - 4T_4^2 - \\ -8T_4T_5 - 48eT_4 - 4T_5^2 - 48eT_5 - 144e^2) = 0. \quad (3.160)$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю. По аналогии с решением предыдущих математических моделей находим алгоритм решения задачи.

Алгоритм решения задачи [82]. В этих формулах, полученных с учетом ширины пропила, все размеры брусьев и досок взаимосвязаны, и непосредственно определить оптимальные размеры не представляется возможным. В связи с этим предлагается использовать численный метод, для чего составляем алгоритм решения задачи. Для упрощения выполнения расчетов и анализа результатов алгоритм решения задачи представляется в относительных единицах, полагаем $m_e = e/d, m_H = H/d$.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2m_H^2}. \quad (3.161)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (3.162)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} +$$
$$+2\frac{(1-((cm_H+2m_H+2m_e)^2+m_H^2(c+2)^2+2m_em_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (3.163)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b_1}^2}-(cm_H+2m_H+4m_e)). \quad (3.164)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + 2\frac{(m_{A_2}^2-m_H^2(c+2)^2-2m_Hm_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (3.165)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+4m_e\right). \quad (3.166)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b_2}^2}-\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+6m_e\right)). \quad (3.167)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+6m_e\right)}{m_{b_2}}. \quad (3.168)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b_3}^2}-\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+8m_e\right)). \quad (3.169)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+2m_{T_3}+8m_e\right)}{m_{b_3}}. \quad (3.170)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)\right). \quad (3.171)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 10m_e\right)}{m_{b_4}}. \quad (3.172)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + \right. \quad (3.173)$$
$$\left. + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)\right).$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}. \quad (3.174)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{T_2} m_{b_2} + 2m_{T_3} m_{b_3} + 2m_{T_4} m_{b_4} + 2m_{T_5} m_{b_5}. \quad (3.175)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (3.176)$$

Выполнение расчетов. Расчеты выполняются в такой последовательности. Вначале задаемся величиной коэффициента изменения толщины брусьев c, затем выбираем относительную ширину пропила m_e. Для этого варианта производим расчеты по алгоритму, задаваясь относительной толщиной бруса m_H в определенных пределах. По результатам расчетов отыскиваем вариант, при котором целевая функция принимает максимальное значение [53]. Этот вариант расчета и заносим в табл. 3.5…3.11.

Таблица 3.5

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 1,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
1	0	0,126	0,99203	0,925806	0,839656	0,082559	0,732852	0,068635
1	0,004	0,138	0,990432	0,906596	0,804555	0,081939	0,683588	0,063995
1	0,006	0,145	0,989432	0,894534	0,782004	0,082137	0,651075	0,06187
1	0,008	0,152	0,98838	0,881599	0,757773	0,082259	0,616106	0,059572
1	0,01	0,164	0,98646	0,858985	0,712313	0,084931	0,544942	0,058306
1	0,012	0,169	0,985616	0,847372	0,691361	0,083755	0,516305	0,054948

Окончание табл. 3.5

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{бр}$	$z_д$	Z
0,605409	0,057763	0,45353	0,047663	0,266201	0,036338	0,358299	0,371762	0,730061
0,546934	0,049654	0,394927	0,036769	0,223859	0,023955	0,3869	0,313423	0,700323
0,506821	0,045519	0,351974	0,030979	0,187207	0,017155	0,402882	0,283397	0,68628
0,463786	0,041142	0,306601	0,024945	0,151717	0,010293	0,41824	0,254655	0,672895
0,365519	0,036165	0,181328	0,016309	0	0	0,443527	0,216894	0,660421
0,33402	0,031081	0,158608	0,010388	0	0	0,452981	0,196607	0,649588

Таблица 3.6

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 1,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
1,5	0	0,117	0,984479	0,91231	0,824798	0,077964	0,717905	0,065357
1,5	0,004	0,128	0,981395	0,88998	0,786515	0,076785	0,665931	0,060221
1,5	0,006	0,135	0,979282	0,874791	0,759543	0,076978	0,627698	0,058
1,5	0,008	0,142	0,977052	0,858389	0,730289	0,077069	0,586103	0,055549
1,5	0,01	0,151	0,974011	0,836151	0,689138	0,078065	0,524966	0,053246
1,5	0,012	0,157	0,971874	0,819206	0,658956	0,077341	0,482392	0,049887

Окончание табл. 3.6

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{бр}$	$z_д$	Z
0,591154	0,055209	0,440501	0,045596	0,254648	0,034641	0,386257	0,345536	0,731792
0,531006	0,046678	0,382031	0,034391	0,215647	0,022161	0,416263	0,286399	0,702661
0,483837	0,042351	0,33063	0,028301	0,169064	0,014922	0,434498	0,254492	0,68899
0,432518	0,037694	0,275365	0,021857	0,12275	0,007549	0,451894	0,224178	0,676073
0,352309	0,03238	0,180279	0,013866	0	0	0,473131	0,191316	0,664447
0,301215	0,0268	0,131532	0,006878	0	0	0,486107	0,168013	0,65412

Таблица 3.7

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 2,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
2	0	0,107	0,976834	0,903779	0,815522	0,075363	0,70856	0,063462
2	0,004	0,117	0,972237	0,879445	0,775304	0,073794	0,655074	0,057988
2	0,006	0,123	0,96927	0,863704	0,748598	0,073512	0,618379	0,055428
2	0,008	0,13	0,965609	0,844218	0,714765	0,073683	0,570575	0,05294
2	0,01	0,139	0,960581	0,81745	0,666626	0,074696	0,499582	0,050437
2	0,012	0,144	0,95763	0,8	0,636968	0,073445	0,459195	0,046723

Окончание табл. 3.7

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,582158	0,053713	0,432121	0,04437	0,246925	0,033609	0,402451	0,330337	0,732788
0,521306	0,044903	0,374296	0,03297	0,210933	0,021096	0,433294	0,270795	0,704089
0,477497	0,040377	0,328904	0,026865	0,174632	0,014135	0,450911	0,239781	0,690693
0,418177	0,03556	0,263691	0,020121	0,116483	0,006293	0,470555	0,207562	0,678117
0,324668	0,029781	0,151152	0,011341	0	0	0,494293	0,17275	0,667043
0,27842	0,024062	0,112408	0,004601	0	0	0,506198	0,150907	0,657105

Таблица 3.8

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 2,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
2,5	0	0,096	0,970773	0,901874	0,815219	0,073576	0,710678	0,062182
2,5	0,004	0,106	0,964248	0,874514	0,770227	0,072385	0,650354	0,056931
2,5	0,006	0,112	0,96	0,856589	0,740047	0,072277	0,608676	0,054432
2,5	0,008	0,118	0,955497	0,837133	0,707174	0,07202	0,563161	0,051654
2,5	0,01	0,126	0,949092	0,809587	0,658853	0,072636	0,492983	0,048884
2,5	0,012	0,131	0,944851	0,789695	0,625372	0,071413	0,447156	0,045065

Окончание табл. 3.8

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,587566	0,052829	0,442057	0,043905	0,263877	0,033785	0,406145	0,327074	0,733219
0,51736	0,044068	0,371574	0,032318	0,210077	0,020641	0,440923	0,263843	0,704766
0,466769	0,03948	0,317165	0,025996	0,161704	0,013234	0,460676	0,230866	0,691542
0,411574	0,034515	0,258719	0,019288	0,114689	0,005724	0,479435	0,199744	0,679179
0,320439	0,028615	0,151257	0,010613	0	0	0,50298	0,16546	0,668439
0,266868	0,022639	0,10336	0,003455	0	0	0,516339	0,142419	0,658758

Таблица 3.9

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 3,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
3	0	0,087	0,965339	0,90043	0,812976	0,073649	0,707473	0,062221
3	0,004	0,096	0,95763	0,872844	0,767936	0,072263	0,647388	0,056817
3	0,006	0,101	0,952991	0,855985	0,740079	0,07176	0,60966	0,054071
3	0,008	0,107	0,947079	0,834505	0,70374	0,071729	0,558912	0,051384
3	0,01	0,114	0,9397	0,807403	0,656886	0,071995	0,491611	0,048413
3	0,012	0,119	0,934104	0,785391	0,61987	0,070852	0,440483	0,044528

Окончание табл. 3.9

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,583159	0,052809	0,43603	0,043787	0,255284	0,033467	0,408628	0,324653	0,733282
0,513608	0,043932	0,366824	0,032133	0,203842	0,020357	0,443384	0,261554	0,704937
0,469055	0,039253	0,321239	0,025915	0,16845	0,013356	0,461665	0,230119	0,691785
0,40644	0,034225	0,252562	0,018952	0,107354	0,00532	0,482597	0,196932	0,679529
0,320099	0,028284	0,152675	0,010446	0	0	0,505465	0,163483	0,668948
0,258974	0,022062	0,09441	0,002825	0	0	0,520398	0,139026	0,659425

Таблица 3.10

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 3,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
3,5	0	0,079	0,961014	0,900672	0,812224	0,074423	0,705322	0,062771
3,5	0,004	0,087	0,952512	0,873681	0,768211	0,072849	0,646792	0,057235
3,5	0,006	0,091	0,947923	0,858687	0,743865	0,071915	0,61464	0,054239
3,5	0,008	0,097	0,940606	0,835494	0,704298	0,072202	0,558743	0,051718
3,5	0,01	0,103	0,932759	0,809949	0,660532	0,072149	0,496515	0,048615
3,5	0,012	0,108	0,925806	0,786178	0,620346	0,071164	0,440396	0,044738

Окончание табл. 3.10

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	Z
0,579147	0,053168	0,429464	0,04393	0,24471	0,033256	0,408026	0,325037	0,733063
0,511815	0,044215	0,363385	0,032272	0,197909	0,020291	0,44206	0,262709	0,704769
0,475424	0,039475	0,329331	0,026229	0,178931	0,013824	0,458195	0,233422	0,691617
0,405214	0,034441	0,249807	0,019037	0,102228	0,005233	0,481422	0,197991	0,679412
0,326532	0,028579	0,161083	0,010877	0	0	0,503109	0,165758	0,668867
0,257987	0,022172	0,09192	0,002809	0	0	0,519769	0,139654	0,659423

Таблица 3.11

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 4,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
4	0	0,071	0,958824	0,904723	0,817848	0,074717	0,712707	0,063014
4	0,004	0,079	0,948759	0,876171	0,770376	0,073795	0,648224	0,057929
4	0,006	0,083	0,943279	0,860174	0,743914	0,073138	0,612512	0,055093
4	0,008	0,088	0,936	0,839085	0,708102	0,073055	0,562403	0,052377
4	0,01	0,094	0,92662	0,811754	0,66071	0,073321	0,494108	0,049379
4	0,012	0,099	0,918251	0,786178	0,616942	0,072504	0,43196	0,045442

Окончание табл. 3.11

m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	Z
0,588669	0,053457	0,441853	0,044357	0,26174	0,034025	0,400777	0,331981	0,732758
0,512128	0,04473	0,362093	0,032617	0,194162	0,020414	0,438243	0,266165	0,704408
0,470313	0,040019	0,32013	0,026437	0,163657	0,013572	0,455958	0,235318	0,691276
0,408391	0,034972	0,252059	0,019453	0,102693	0,005501	0,477151	0,201875	0,679026
0,320338	0,028951	0,149109	0,010759	0	0	0,501019	0,167442	0,668461
0,242203	0,022166	0,064611	0,001842	0	0	0,51929	0,139696	0,658986

Анализ результатов. Некоторые результаты расчетов представлены на рисунках. При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечение брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается (рис. 3.16) [69]. При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

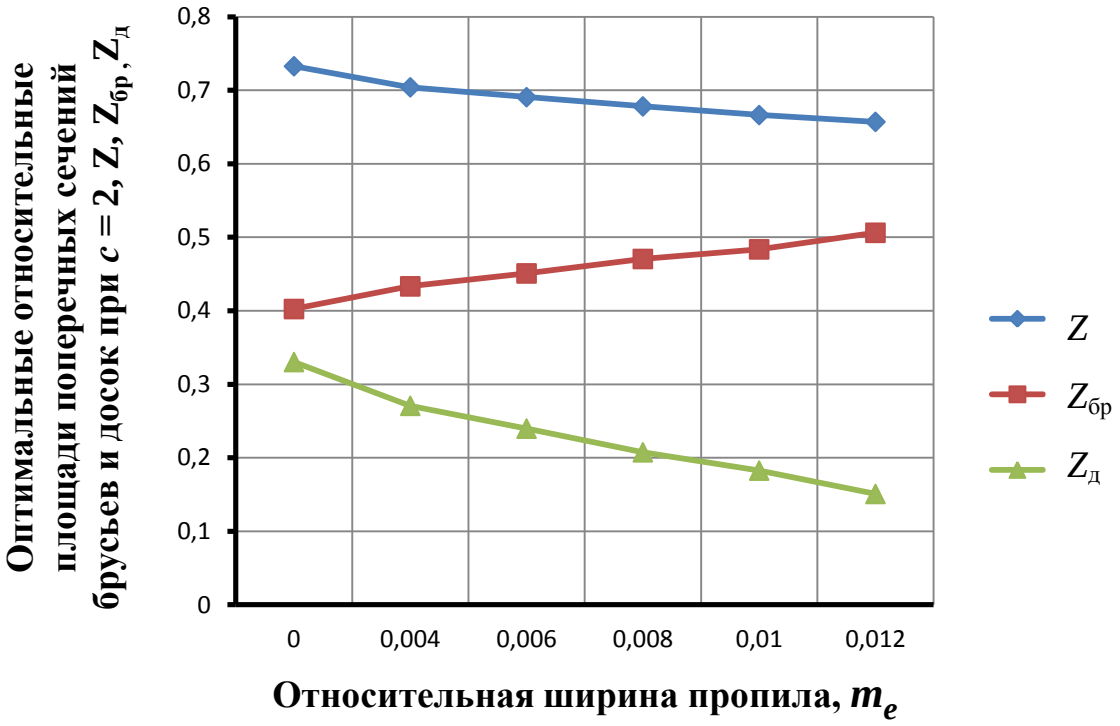


Рис. 3.16. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и досок при коэффициенте c = 2,0

Следовательно, с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок изменяются неравнозначно. Оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила уменьшаются более интенсивно, чем при этом возрастают оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев. В результате суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.17). При этом оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски изменяется в большей степени и при $m_e = 0{,}012$ принимает нулевое значение. Следовательно, оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок зависят не только от величины относительной ширины пропила, но и от расположения этих досок в пиловочнике. Анализируя этот график, можно рекомендовать рациональный диапазон относительной ширины пропила в пределах 0,004…0,006. На практике часто относительная ширина пропила находится в пределах 0,008…0,01 от диаметра пиловочника в вершинном торце.

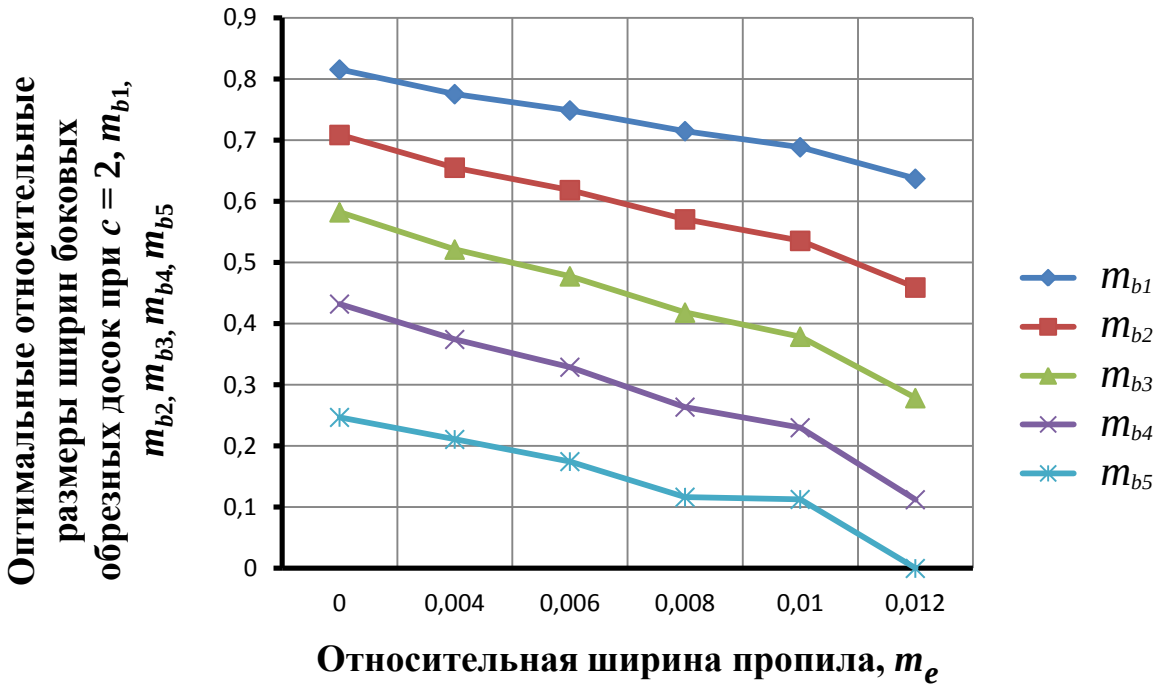


Рис. 3.17. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.18). При этом оптимальная относительная толщина трех крайних боковых обрезных досок уменьшается более интенсивно. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ толщина крайней (пятой пары) боковой обрезной доски становится близкой к нулевому значению. Оптимальная относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок при $m_e = 0{,}012$ принимает значение равное 0,0046. Оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила изменяется незначительно.

Таким образом, относительная ширина пропила оказывает существенное влияние прежде всего на размеры боковых обрезных досок, причем эти размеры досок зависят также от места расположения их в пиловочнике.

На практике возникает вопрос о возможной корректировке размеров боковых обрезных досок. Например, толщину первой пары боковых обрезных досок необходимо, как правило, немного уменьшить, а толщину крайней (пятой) пары боковых обрезных досок соответственно увеличить. Такие задачи можно и целесообразно решать на практике при расчете и составлении поставов.

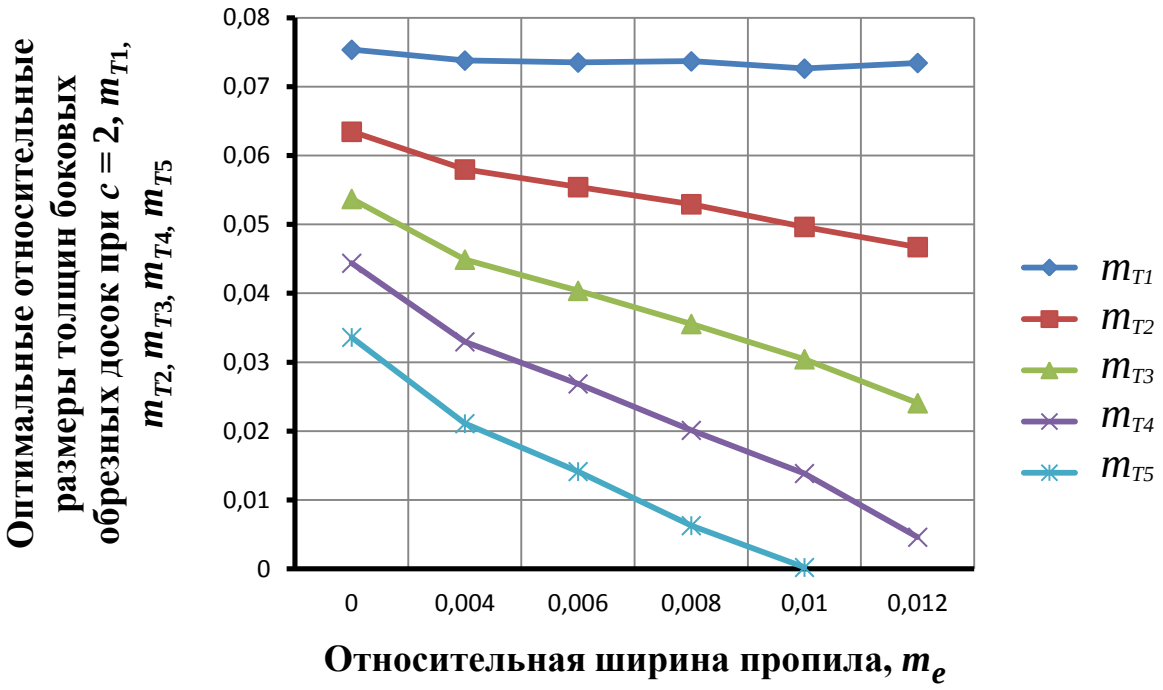


Рис. 3.18. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (см. рис. 3.19). При этом относительные ширины пластей центрального бруса немного уменьшаются, а относительные ширины боковых брусьев уменьшаются в большей степени [69].

Следовательно, с увеличением относительной величины пропила оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок существенно изменяются. При этом относительные размеры брусьев возрастают, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок существенно уменьшаются.

При постановке и решении практических задач оптимизация раскроя пиловочника, необходимо соблюдать, прежде всего, основное требование, при котором относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и относительная площадь поперечного сечения брусьев незначительно отличались от оптимальных значений, а сумма их близка к оптимальной величине.

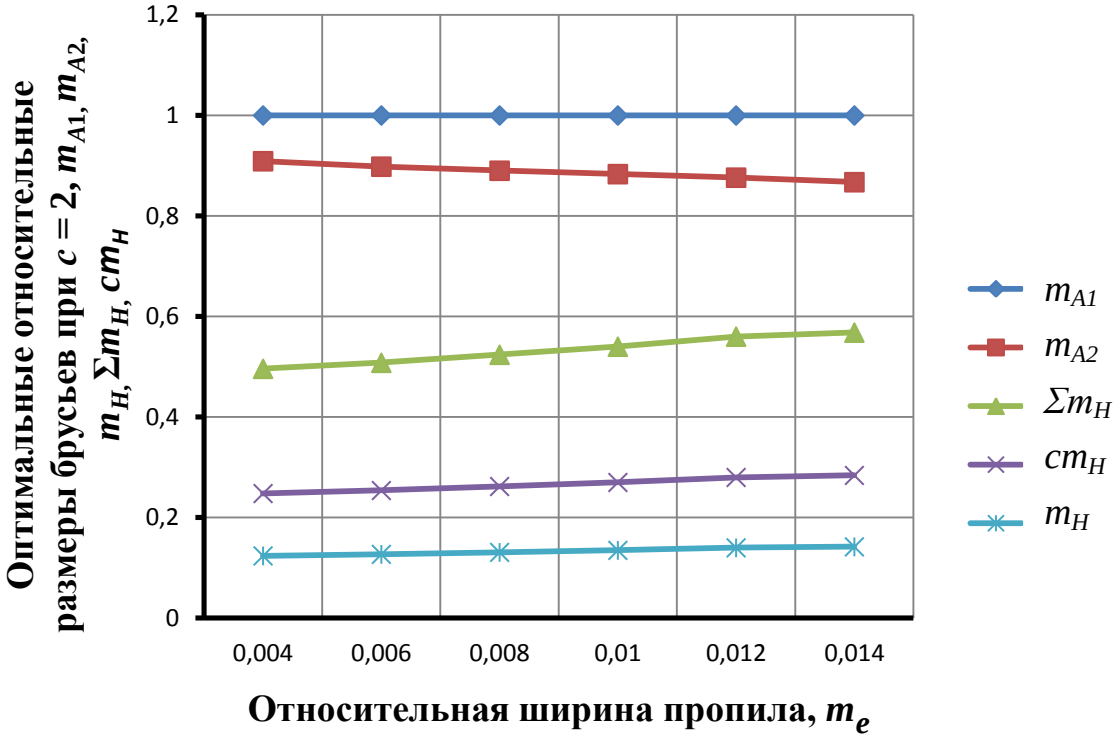


Рис. 3.19. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев при коэффициенте c = 2,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 3.20) [69]. При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

Если сравнить рис. 3.20 и 3.16, то можно отметить, что целевая функция отличается незначительно, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок при c = 3,0 принимает немного меньшее значение, чем при c = 2,0. Относительная площадь поперечного сечения брусьев при c = 3,0 (см. рис. 3.20) принимает большее значение по сравнению с вариантом, когда c = 2,0 (см. рис. 3.16).

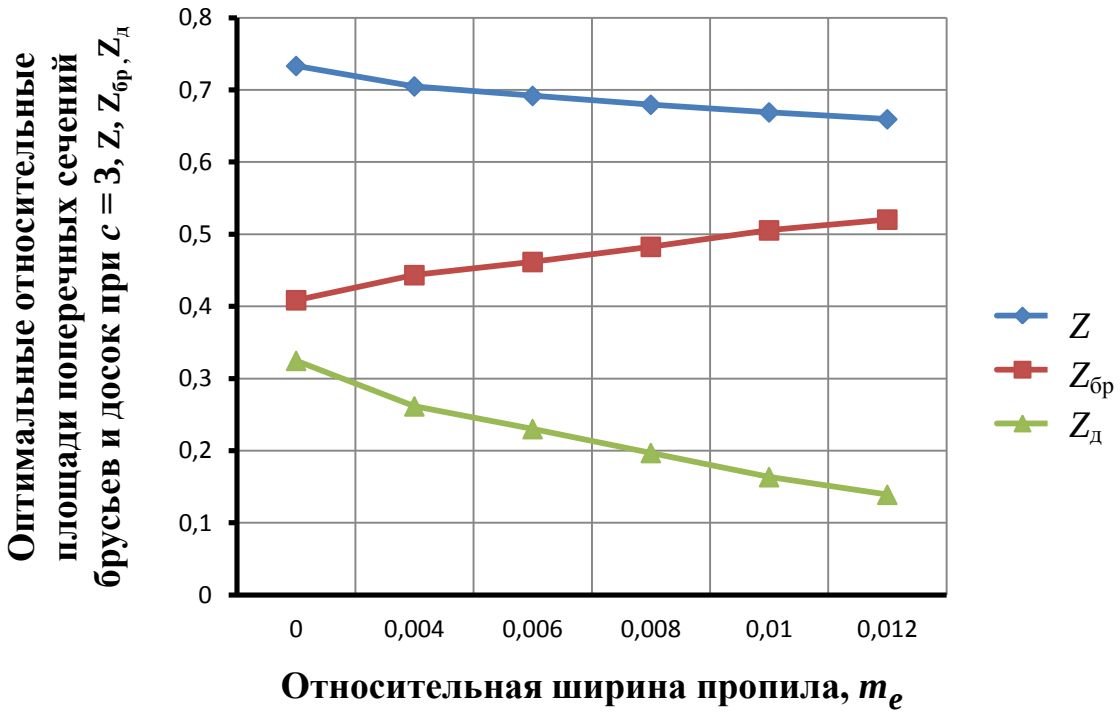


Рис. 3.20. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.21). Оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила уменьшается в большей степени, чем другие боковые доски, и при $m_e = 0{,}01$ принимает нулевое значение. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}012$ оптимальная относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок принимает значение равное 0,0944.

В этом случае следует также отметить, что предельная относительная ширина пропила не должна превышать величины 0,008 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Наиболее приемлемая для практики относительная ширина пропила, как правило, находится в пределах 0,004…0,006. Тогда диапазон изменения размеров боковых обрезных досок и брусьев не очень значителен.

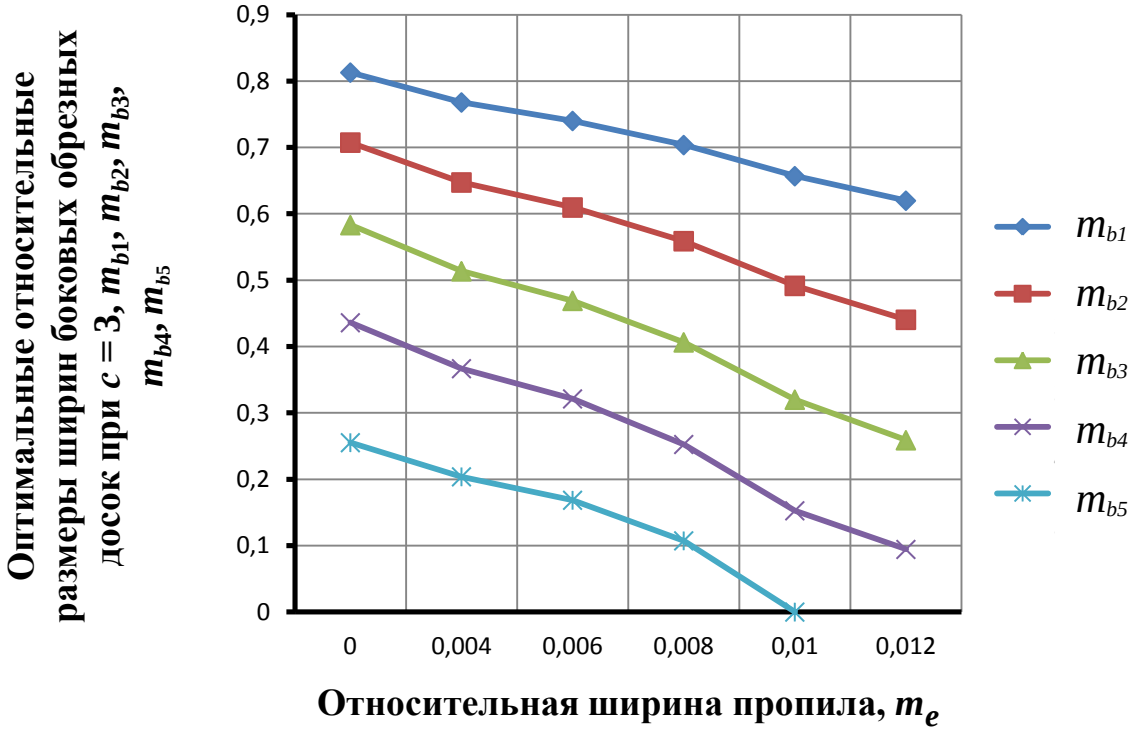


Рис. 3.21. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.22). При этом оптимальная относительная толщина крайней обрезной боковой доски при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ стремится к 0. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}012$ оптимальная относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок принимает величину близкую к нулевому значению.

Этот график также показывает, что относительная ширина пропила не должна превышать размера 0,006 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Сравнивая между собой рис. 3.21 и 3.22, следует отметить, что относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 уменьшаются в большей степени по сравнению с относительными ширинами этих боковых обрезных досок.

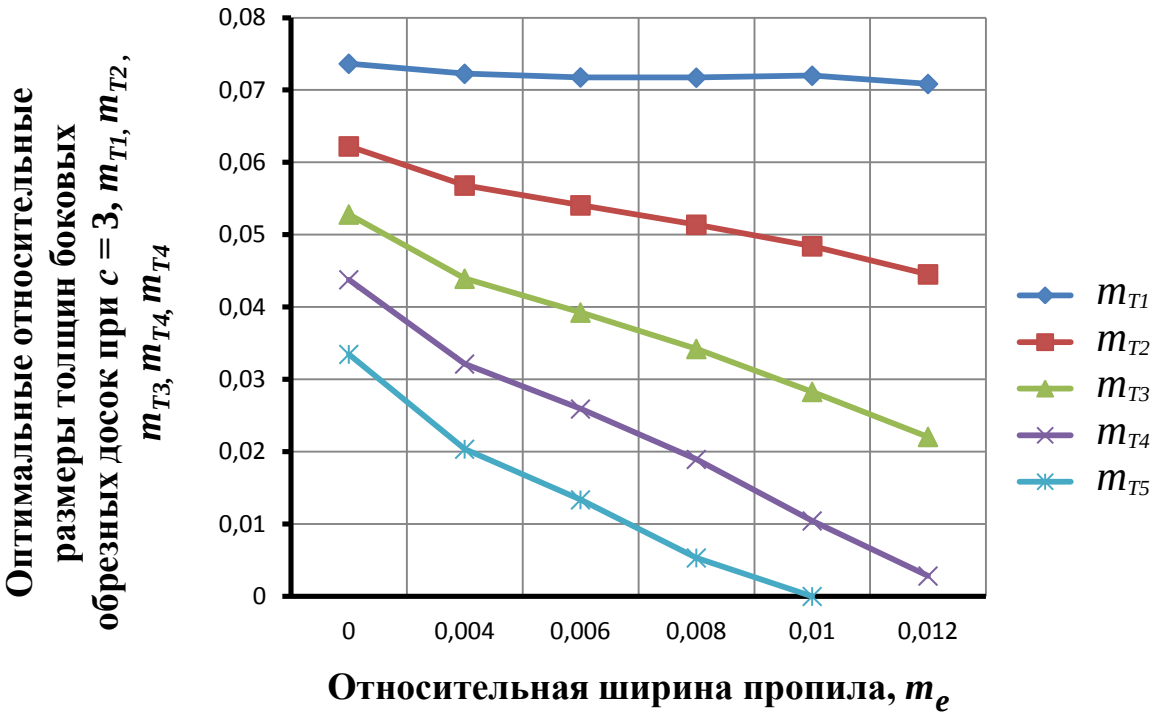


Рис. 3.22. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (рис. 3.23).

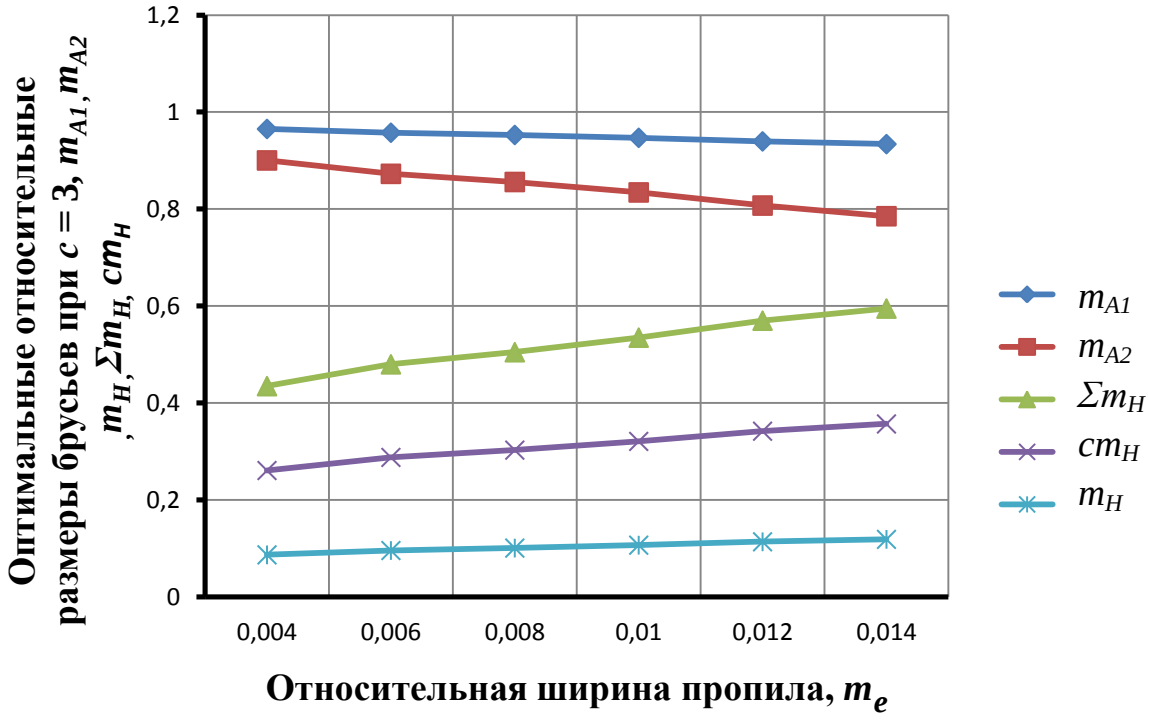


Рис. 3.23. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины и толщины брусьев при коэффициенте c = 3,0

При этом оптимальные относительные ширины центрального и боковых брусьев уменьшаются.

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается (рис. 3.24). При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок с увеличением коэффициента c вначале уменьшается и при c = 3,0 становится минимальной, а далее увеличивается. Целевая функция с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c вначале возрастает и при c = 3,0 принимает максимальное значение, а затем с увеличением коэффициента c незначительно уменьшается. Следует обратить внимание, что целевая функция при изменении коэффициента соотношения толщин брусьев c изменяется не столь значительно, хотя при этом составляющие этой целевой функции площади поперечных сечений брусьев и площади поперечных сечений боковых обрезных досок изменяются существенно. Но в диапазоне c = 2,5…3,5 это изменение не столь значительное.

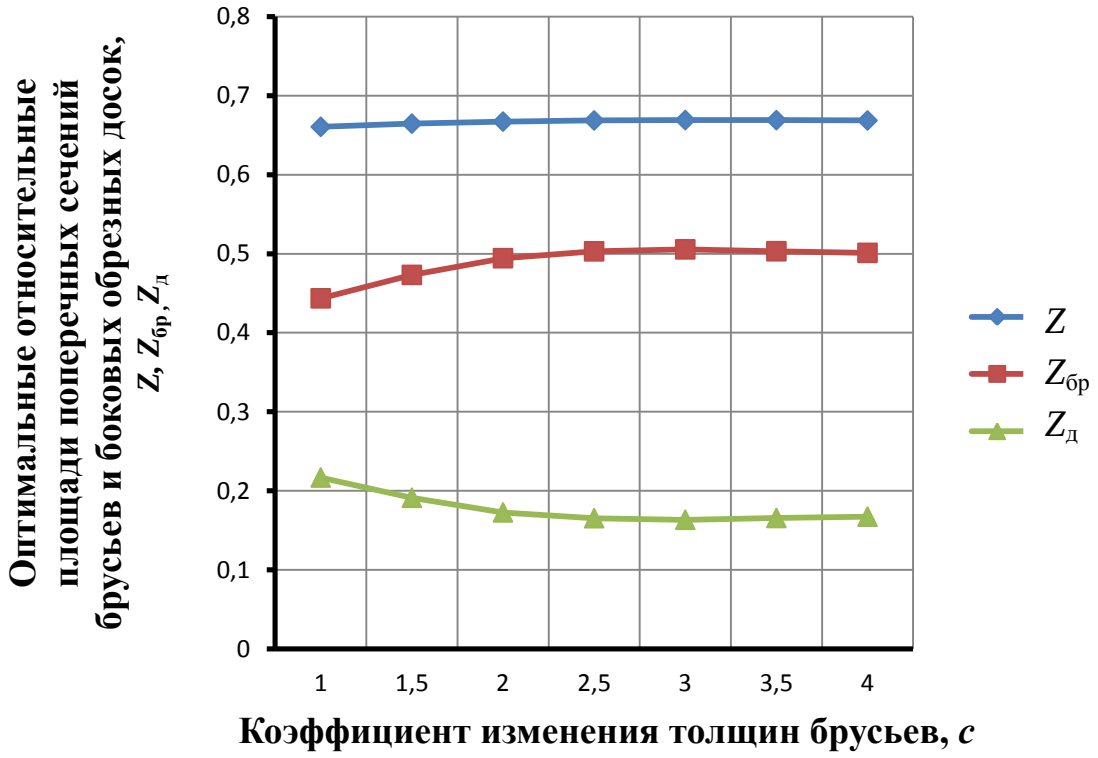


Рис. 3.24. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина центрального бруса увеличивается, а оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается (рис. 3.25). Сумма оптимальных относительных толщин брусьев при этом возрастает и принимает максимальное значение при c = 3,0, достигая значения Σm_H = 0,57, а затем незначительно уменьшается. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c относительная ширина пласти центрального бруса незначительно уменьшается. При этом оптимальная относительная ширина наружной пласти бокового бруса также уменьшается, особенно до величины c = 2,5, а затем практически мало изменяется.

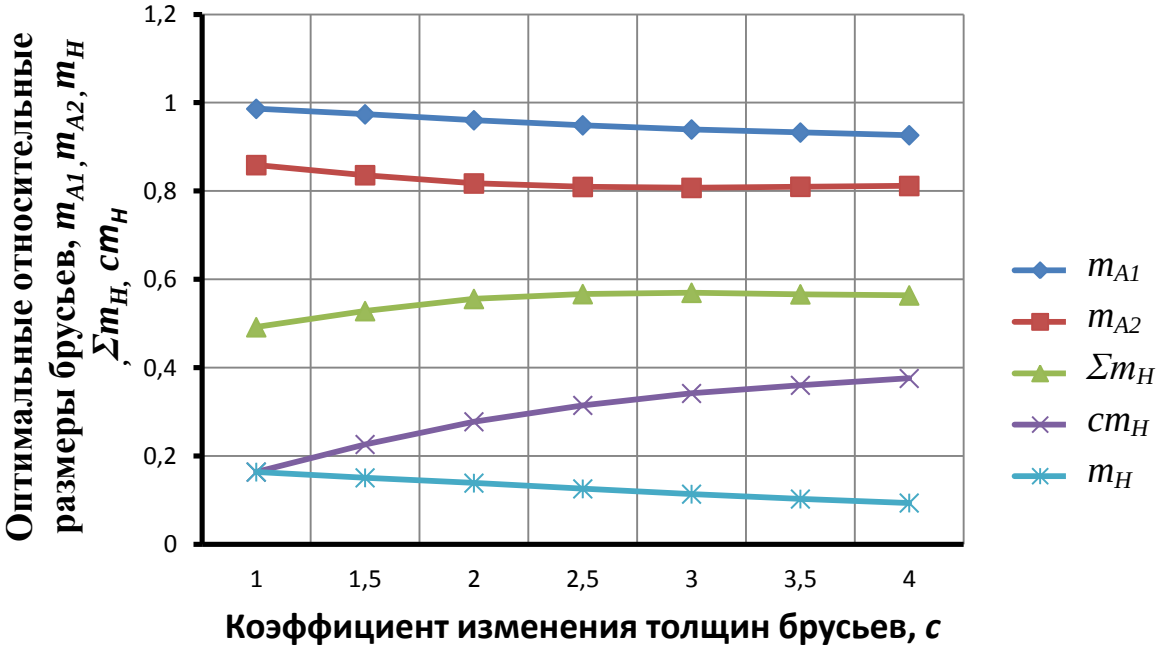


Рис. 3.25. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок вначале уменьшаются до c = 3,0, а затем незначительно увеличиваются (см. рис. 3.26). Оптимальные относительные толщины крайней боковой обрезной доски в этом варианте раскроя пиловочника принимают небольшие размеры, и практически доски такой толщины выпиливать невозможно, так как при c = 1,0 и более толщины этих досок принимают нулевое значение.

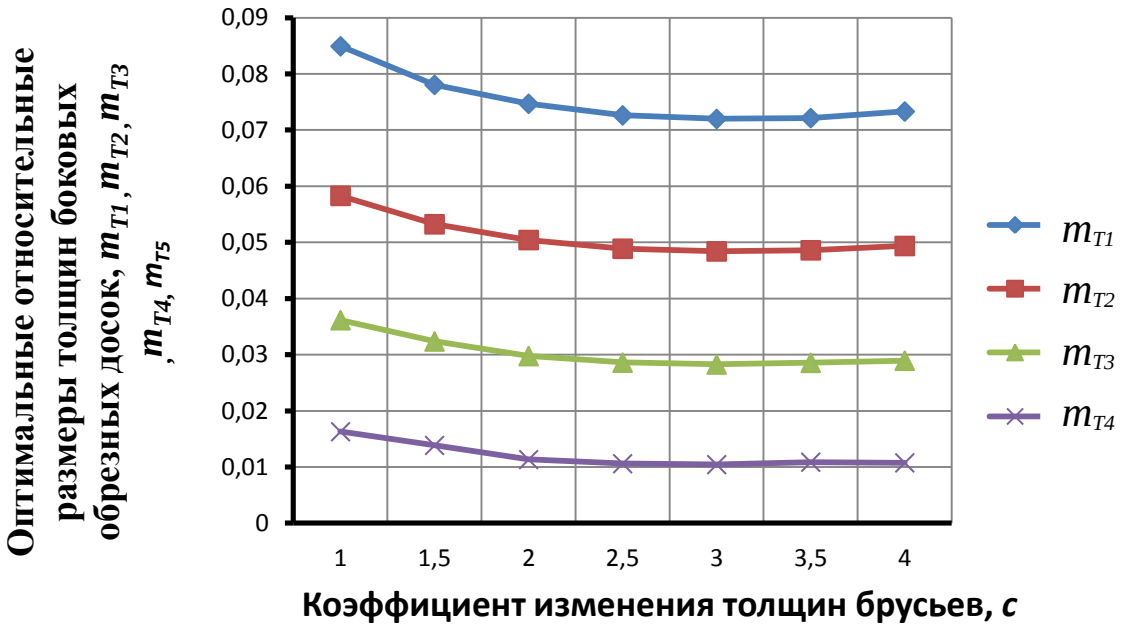


Рис. 3.26. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок вначале уменьшаются до $c = 3{,}0$, а затем незначительно изменяются (см. рис. 3.27). Оптимальные относительные ширины крайней боковой обрезной доски в этом варианте раскроя пиловочника принимают нулевые размеры, и практически доски такой ширины выпиливать невозможно, так как при $c = 1{,}0$ и более толщины этих досок принимают нулевое значение. Следует отметить, что в этом варианте при $m_e = 0{,}01$ раскрой пиловочника необходимо рассматривать лучше для схемы, когда выпиливаются три бруса разной толщины и четыре пары боковых обрезных досок. Эти два варианта необходимо сравнить между собой и принимать наиболее выгодный вариант раскроя пиловочника как по выходу пиломатериалов, так и по размерам брусьев и боковых обрезных досок.

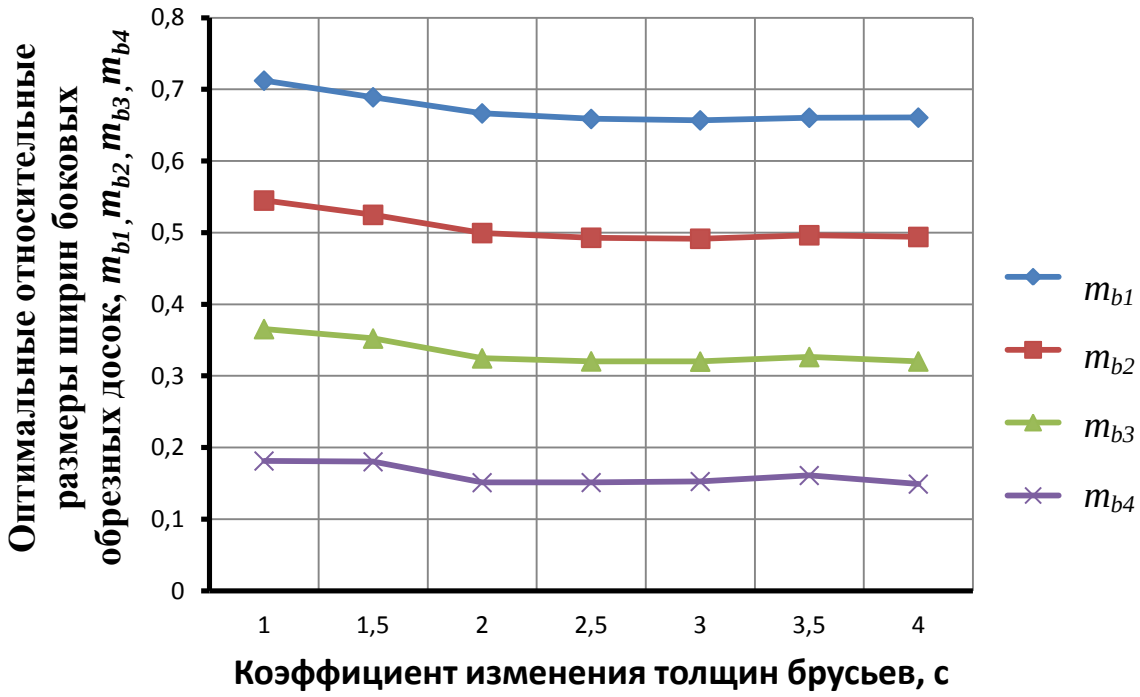


Рис. 3.27. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

Таким образом, ширина пропила оказывает существенное влияние на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок. Исследованиями установлена главная закономерность: с увеличением ширины пропила оптимальная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. Этот важный аспект необходимо учитывать при расчете и составлении поставов.

Следует также учитывать и влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на выбор размеров брусьев и боковых обрезных досок. Так, при увеличении коэффициента изменения толщин брусьев в пределах c = 1,0…2,0 оптимальные относительные размеры (толщина и ширина) боковых обрезных досок существенно уменьшаются. При этом оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает, а оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается. Наиболее благоприятным вариантом раскроя пиловочника является диапазон изменения коэффициента c = 2,5…3,5.

3.5. Раскрой пиловочника с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски

Постановка задачи. При последующей распиловке брусьев на обрезные доски объем пиломатериалов в виде обрезных досок уменьшается, так как часть древесины превращается в опилки. В свя-

зи с этим изменится величина целевой функции [96]. Это, вероятно, повлияет на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок [91]. Важно знать, каким образом изменятся оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок при последующей распиловке брусьев на обрезные доски (рис. 3.28) [69].

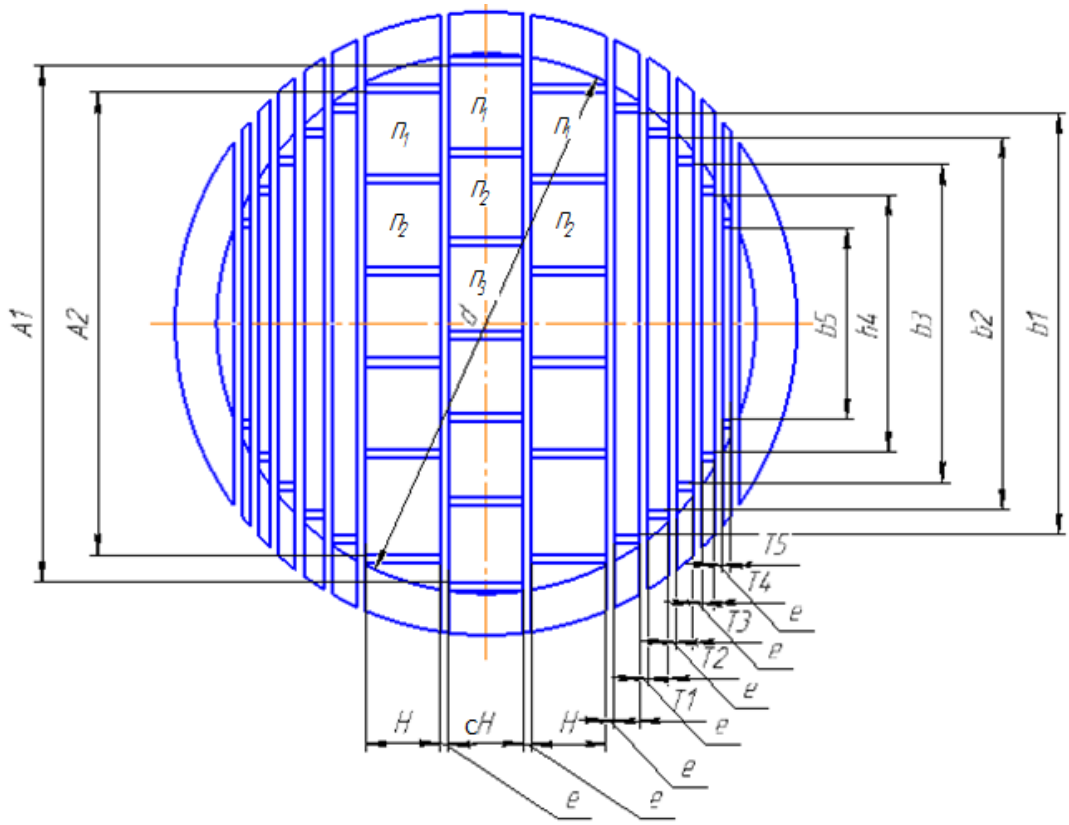


Рис. 3.28. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с их последующей распиловкой на обрезные доски с учетом ширины пропила

Алгоритм решения задачи. По аналогии с методиками решения ранее приведенных задач оптимизации алгоритм решения для такой задачи раскроя пиловочника можно написать в следующем виде.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \qquad (3.177)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \qquad (3.178)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \\ + \frac{2(1-((cm_H+2m_H+2m_e)^2+m_H^2(c+2)^2+2m_em_H(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (3.179)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-m_{b_1}^2} - (cm_H+2m_H+4m_e)\right). \quad (3.180)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \\ + \frac{2(m_{A_2}^2-m_H^2(c+2)^2-2m_Hm_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (3.181)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+4m_e\right). \quad (3.182)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{1-m_{b_2}^2} - (cm_H+2m_H+6m_e)). \quad (3.183)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+6m_e\right). \quad (3.184)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-m_{b_3}^2} - \left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+8m_e\right)\right). \quad (3.185)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+2m_{T_3}+8m_e\right). \quad (3.186)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e)\right). \quad (3.187)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}}{m_{b_4}}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 10m_e). \quad (3.188)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + \right.$$
$$\left. + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)\right). \quad (3.189)$$

Относительная площадь поперечных сечений обрезных брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H(cm_{A1} + 2m_{A1}). \quad (3.190)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2(m_{T1}m_{b1} + m_{T2}m_{b2} + m_{T3}m_{b3} + m_{T3}m_{b4} + m_{T5}m_{b5}). \quad (3.191)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (3.192)$$

Суммарная площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев с учетом ширины пропила, определится по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = Z_{\text{ц}} + Z_{\text{б}} = cH\left(A_1 - \left(n_{\text{ц}} + 1\right)e\right) + 2H(A_2 - (n_{\text{б}} + 1)e). \quad (3.193)$$

В относительных единицах площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев, определится по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H\left(m_{A_1} - \left(n_{\text{ц}} + 1\right)m_e\right) + 2m_H(m_{A_2} - (n_{\text{б}} + 1)m_e). \quad (3.194)$$

Поэтому при определении оптимальных размеров брусьев и досок с учетом ширины пропила необходимо в алгоритме решения задачи вместо формулы (3.190) использовать формулы (3.193) и (3.194). При этом число досок, выпиливаемых из центрального бруса, можно определить по формуле:

$$n_{\text{ц}} = \frac{A_1}{T_{\text{ц}} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{\text{ц}}} + m_e}. \quad (3.195)$$

Число досок, получаемых из бокового бруса, можно по определить по формуле:

$$n_{\text{б}} = \frac{A_2}{T_{\text{б}} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{\text{б}}} + m_e}. \quad (3.196)$$

Для дальнейших расчетов количество досок, получаемых из брусьев в формулах, принимается целое число.

На практике возможен вариант, когда необходимые толщины обрезных досок известны. Тогда по формулам (3.195) и (3.196) определяем количество выпиливаемых досок такого размера из центрального и бокового брусьев. Затем площадь поперечного сечения этих досок определяем по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{T_{\text{ц}}} n_{\text{ц}} + 2m_H m_{T_{\text{б}}} n_{\text{б}}. \quad (3.197)$$

Далее по алгоритму решения задачи определяем оптимальные размеры брусьев и досок, используя формулы (3.177)…(3,192).

Выполнение расчетов. Расчеты производятся в следующей последовательности. Задаемся значением величины коэффициента *c* и изменяем относительную толщину бокового бруса m_H, а затем определяем относительные ширины этих брусьев m_{A1} и m_{A2}. Далее по формулам (3.195) и (3.196) определяем число выпиливаемых досок из этих брусьев с учетом относительной ширины пропила m_e. Затем по алгоритму определяем все относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также относительные площади поперечных сечений брусьев и досок [69]. Анализируем результаты расчетов для различных вариантов толщин брусьев m_H и находим наилучший (оптимальный) вариант. Результаты расчетов представлены в приложении 3.1.

Анализ результатов. По результатам расчетов построены графики изменения влияния количества выпиливаемых досок из брусьев и коэффициента *c* на оптимальные относительные размеры и площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок для различных вариантов распиловки брусьев на обрезные доски [69].

Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и при коэффициенте изменения толщин *c* = 1,0 представлено на рис. 3.29. С увеличением количества выпили-

ваемых досок из центрального бруса $n_{ц}$ оптимальная относительная толщина центрального бруса незначительно уменьшается, и, следовательно, оптимальные относительные толщины боковых брусьев также уменьшаются незначительно. В итоге оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев незначительно возрастают.

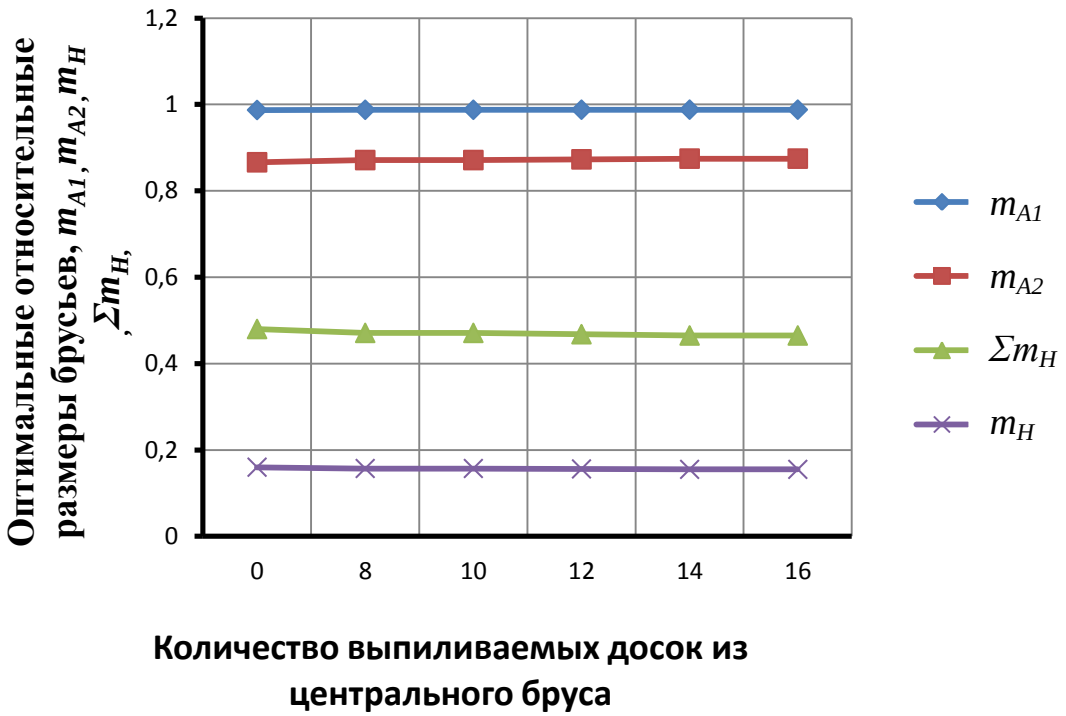


Рис. 3.29. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщин брусьев c = 1,0

Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 представлено на рис. 3.30. С увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_{ц}$ оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H незначительно уменьшается, и, следовательно, оптимальные относительные толщины боковых брусьев также уменьшаются незначительно. В итоге оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев незначительно возрастают. Такое изменение толщин и ширин брусьев объясняется взаимосвязью этих размеров по теореме Пифагора, где диаметр пиловочника является гипотенузой, а толщина и ширина брусьев – катетами прямоугольного треугольника.

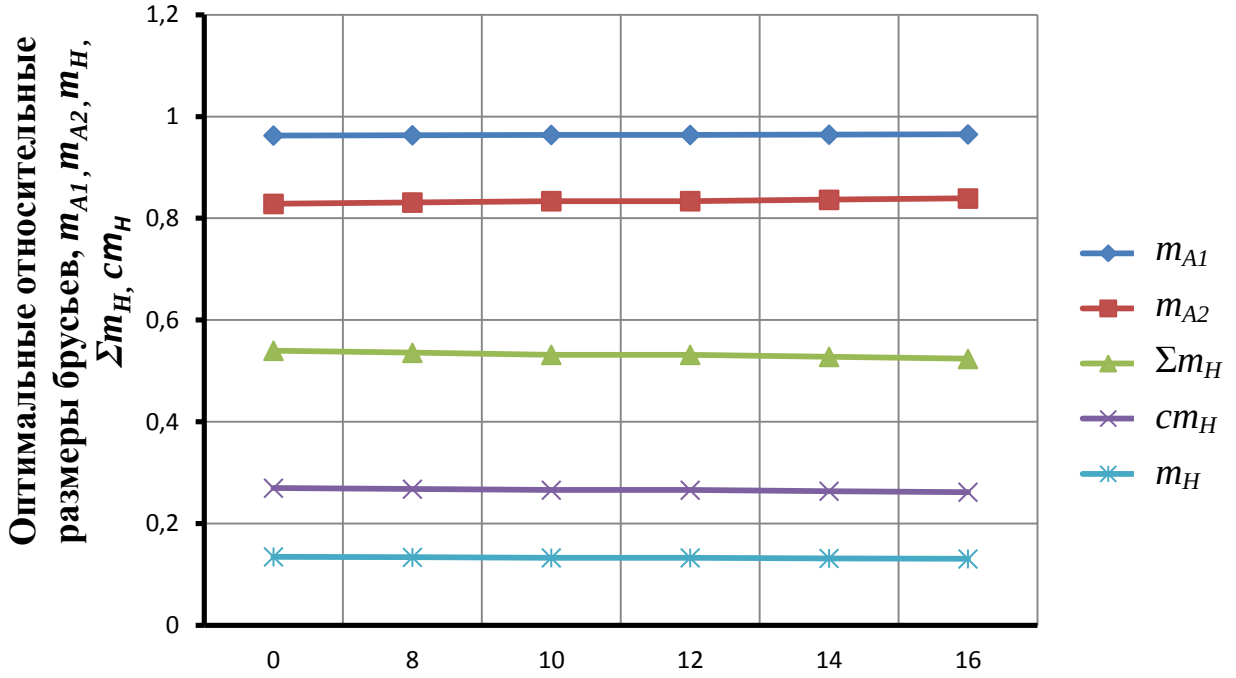


Рис. 3.30. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0

Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ на относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 представлено на рис. 3.31. С увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса оптимальная относительная толщина центрального бруса $cm_н$ незначительно уменьшается, и, следовательно, оптимальные относительные толщины боковых брусьев также уменьшаются незначительно. В итоге оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев незначительно возрастают.

Сравнивая между собой эти два рисунка – 3.30 и 3.31, следует отметить, что с изменением коэффициента c оптимальные относительные размеры брусьев изменились. С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина бокового бруса m_H уменьшилась, а оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H увеличилась. Но при этом характер изменения оптимальных относительных размеров этих брусьев с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ сохраняется.

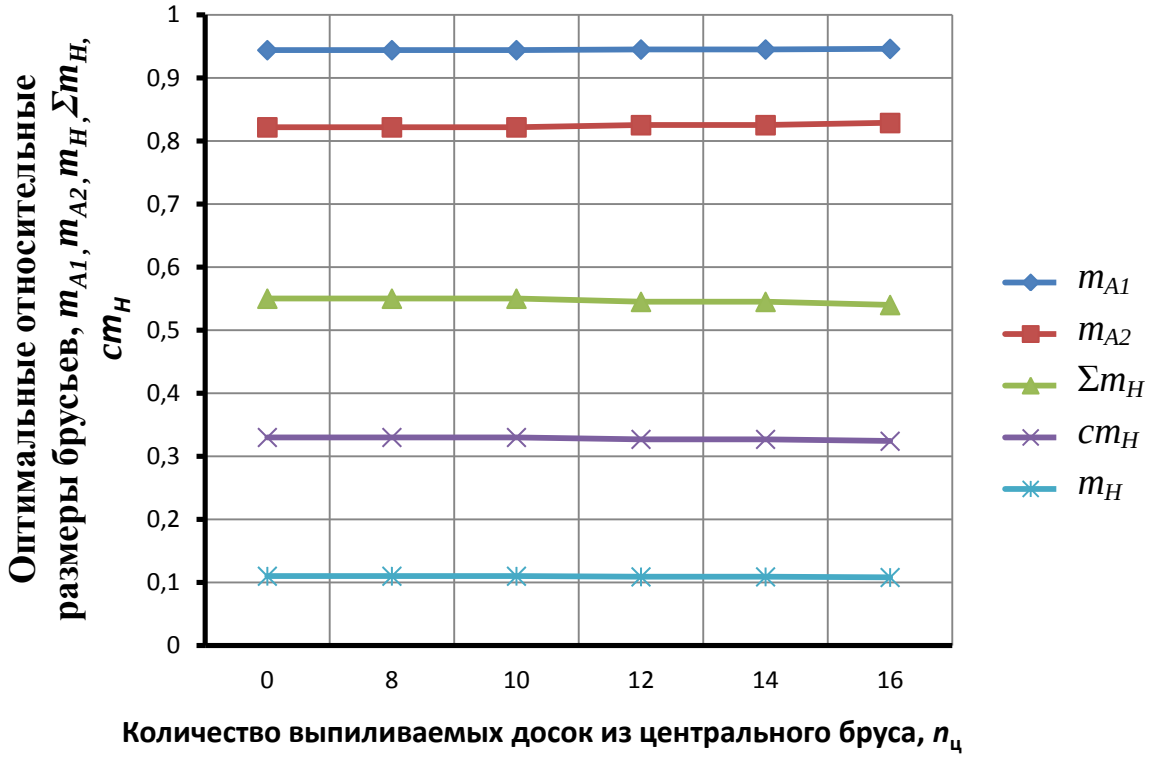


Рис. 3.31. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0

При последующей распиловке брусьев на обрезные доски и выпиливании из центрального бруса 10 досок, а из боковых брусьев по 8 досок с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается, оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из центрального бруса, возрастает, а из боковых брусьев уменьшается (см. рис. 3.32). Суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев, увеличивается до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается.

При анализе таких сложных зависимостей, как, например, с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев, происходит увеличение относительной площади поперечного сечения брусьев и, одновременно, уменьшение относительной площади поперечного сечения боковых обрезных досок. Поэтому, необходимо сохранить оптимальный общий выход пиломатериалов. Эту очень важную закономерность необходимо выполнять и использовать при расчете и составлении поставов.

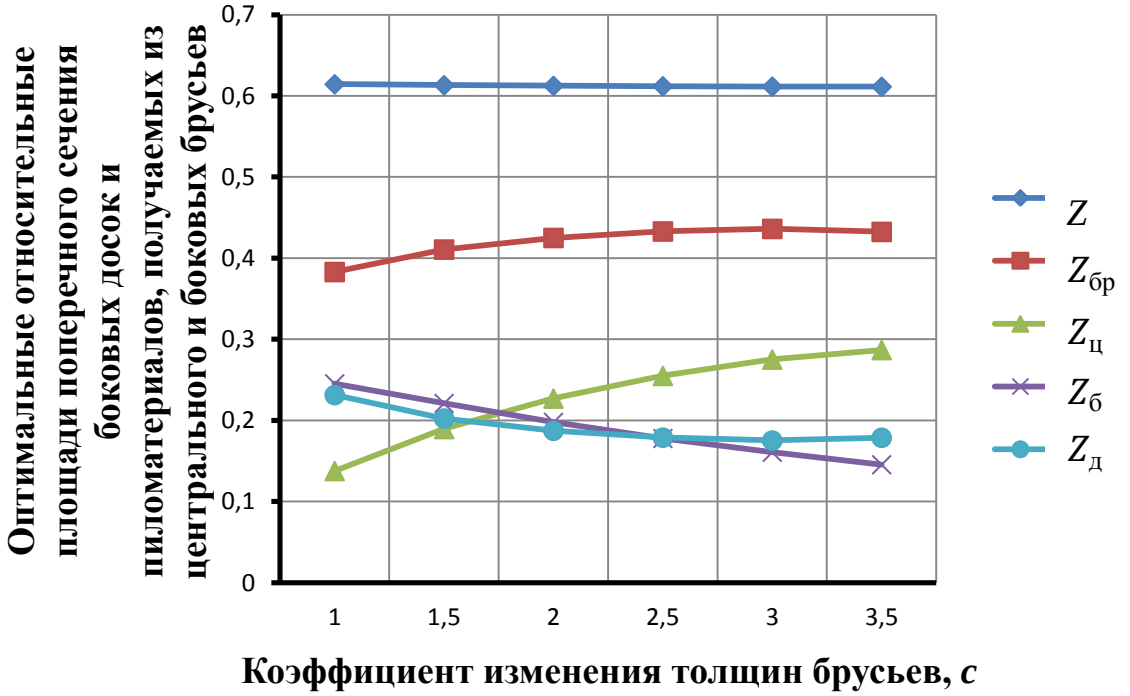


Рис. 3.32. Влияние коэффициента *c* на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых досок $Z_д$ с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски при m_e = 0,01 и выпиливании, $n_ц$ = 10, $n_б$ = 8 досок

При выпиливании из центрального бруса 12 обрезных досок, а из боковых по 10 боковых обрезных досок с увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $z_ц$, возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из боковых брусьев $z_б$, уменьшается (см. рис. 3.33). При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $z_д$ с увеличением коэффициента *c* уменьшается до *c* = 3,0, а затем незначительно увеличивается. Оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок получаемых из брусьев $z_{бр}$ с увеличением коэффициента *c* возрастает до *c* = 3,0, а затем незначительно уменьшается [69]. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок Z при этом уменьшается незначительно, принимая минимальное значение при *c* = 3,5.

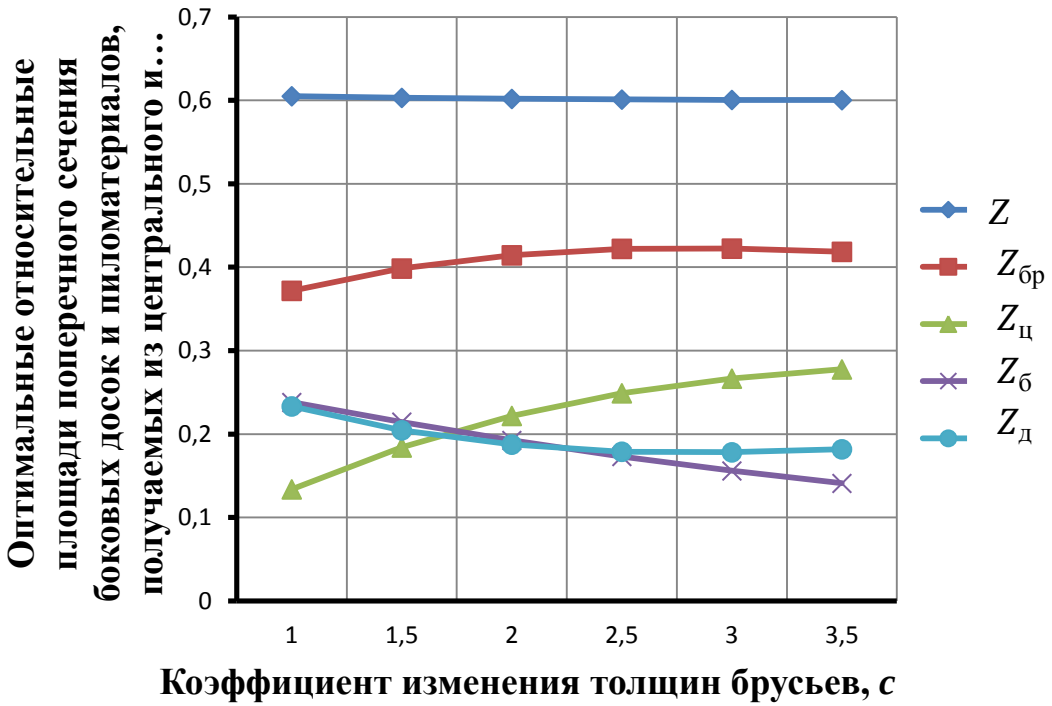


Рис. 3.33. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_{бр}$ брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и выпиливании $n_ц$ = 12, $n_б$ = 10 досок

При раскрое центрального бруса с получением $n_ц$ = 14 обрезных досок, а из боковых брусьев получают по $n_б$ = 12 обрезных досок, с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 3.34) [69]. При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. В сумме оптимальная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. В итоге общая сумма всех оптимальных относительных площадей поперечных сечений досок, получаемых из пиловочника Z, уменьшается незначительно и принимает минимальное значение при c = 3,5.

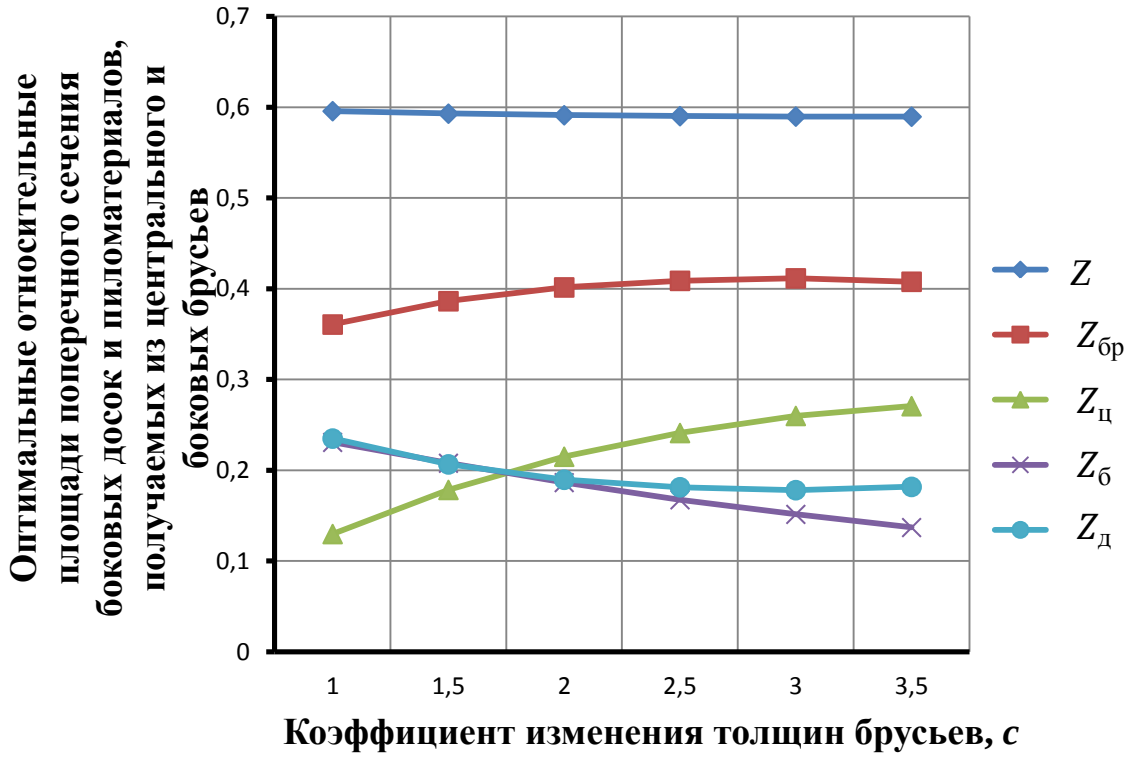


Рис. 3.34. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_б$ брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и выпиливании $n_ц$ = 14, $n_б$ = 12 досок

При распиловке центрального бруса с получением 16 обрезных досок, а каждый боковой брус распиливают на 14 обрезных досок, с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 3.35) [69]. При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c также уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. Оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. В итоге общая сумма всех оптимальных относительных площадей поперечных сечений досок, получаемых пиловочника Z, уменьшается незначительно.

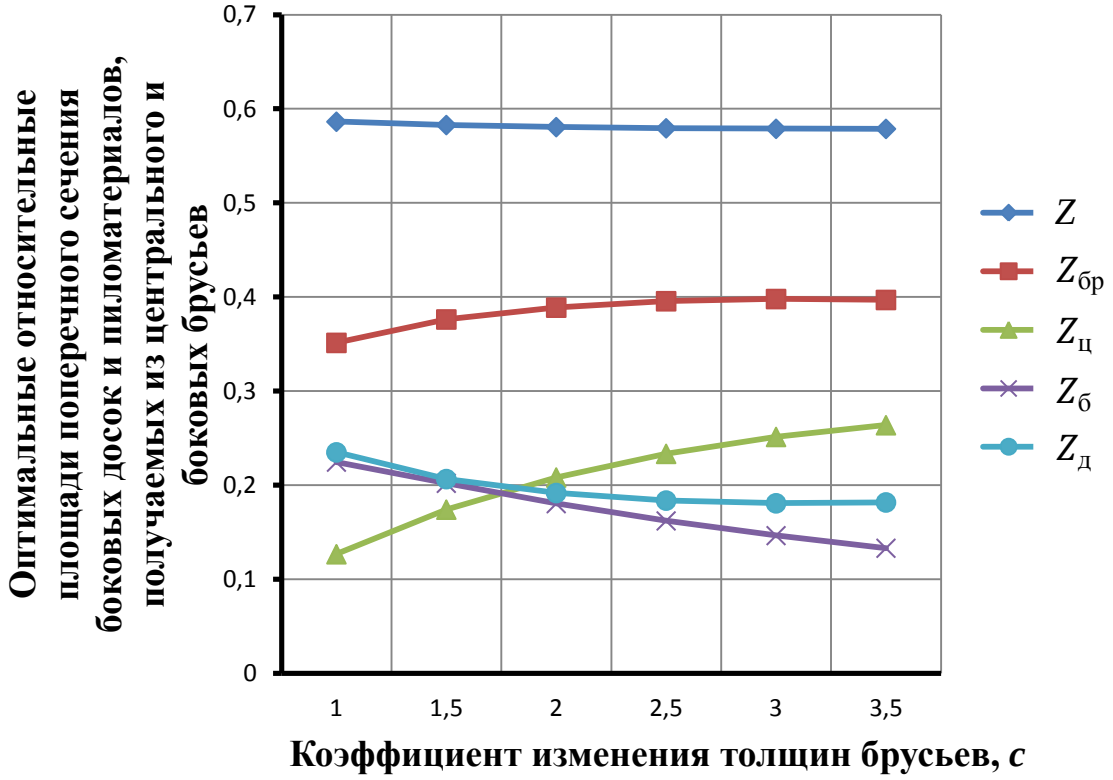


Рис. 3.35. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_б$ брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и выпиливании $n_ц$ = 16, $n_б$ = 14 досок

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 1,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ возрастает незначительно, а площадь поперечного сечения получаемых досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшается (см. рис. 3.36). В итоге суммарная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и досок, получаемых из брусьев, уменьшается. Это объясняется тем, что потери древесины в опилки при раскрое брусьев с увеличением количества пропилов превышают прирост оптимальных размеров боковых обрезных досок.

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев площади поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ возрастают незначительно, а площади поперечного сечения получаемых досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшаются (см. рис. 3.37). В результате суммарная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и досок, получаемых из брусьев, уменьшается.

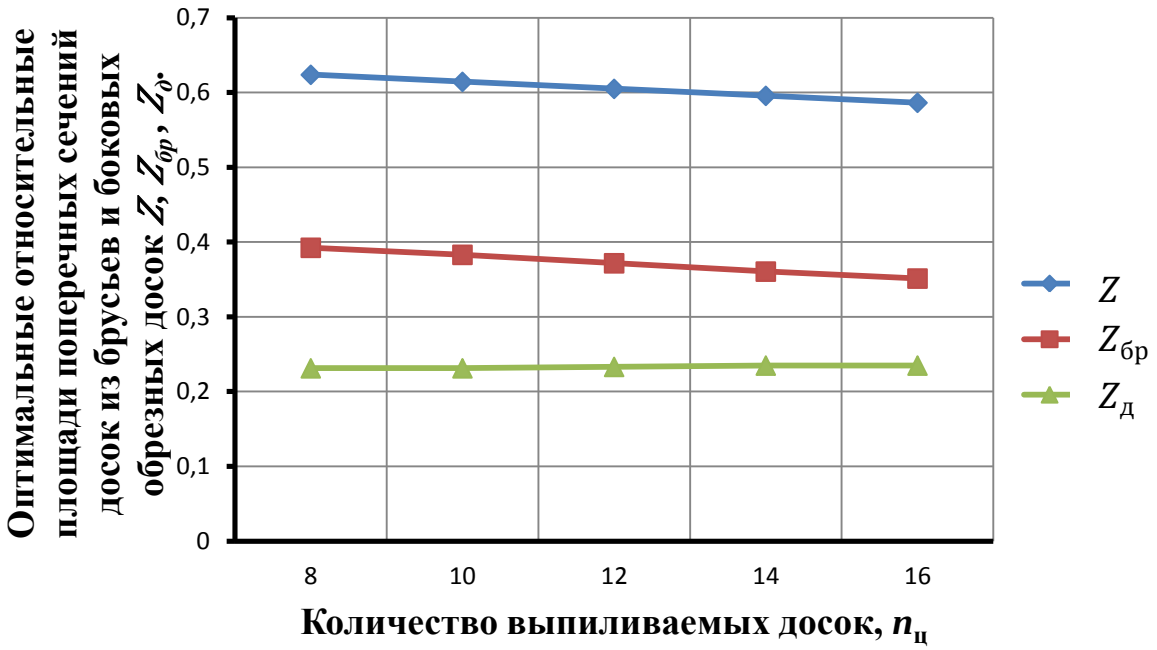


Рис. 3.36. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 1,0

Сравнивая между собой результаты на рис. 3.36 и 3.37, следует отметить, что характер изменения показателей на этих рисунках идентичный, но при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев, больше, чем при коэффициенте с = 1,0. При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 меньше, чем при коэффициенте c = 1,0 [69].

При оптимальном значении коэффициента изменения толщин брусьев c = 3,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ незначительно возрастают, а оптимальные относительные площади поперечных сечения досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, уменьшаются (см. рис. 3.38). Следовательно, уменьшение выхода обрезных пиломатериалов происходит за счет потерь древесины в опилки при раскрое брусьев на обрезные доски.

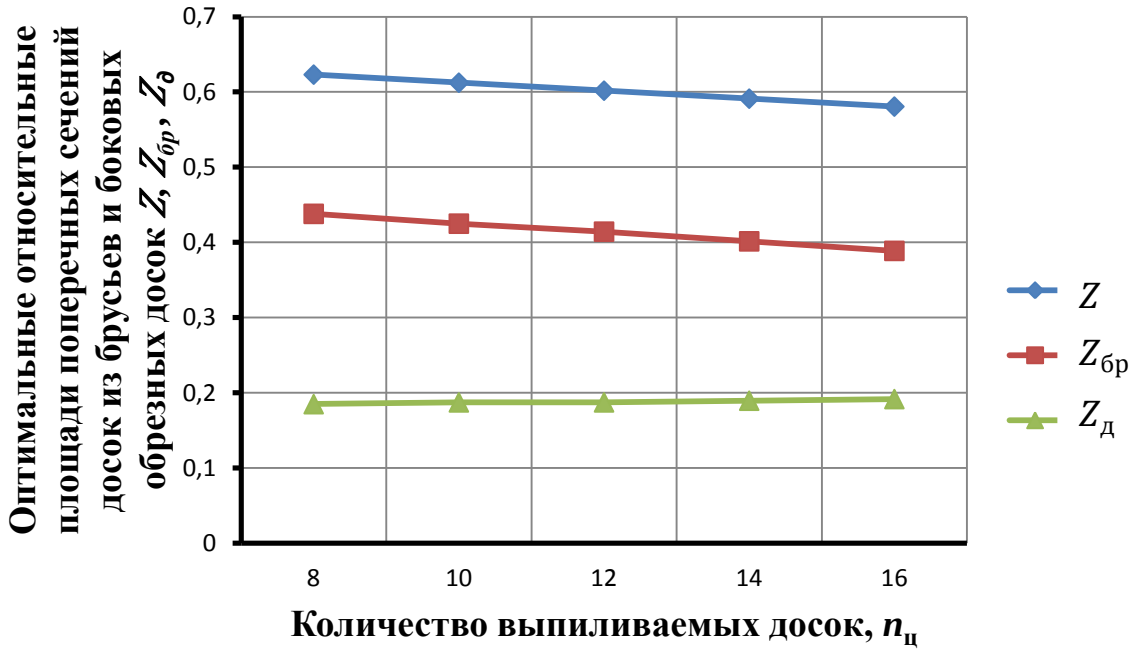


Рис. 3.37. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 2,0

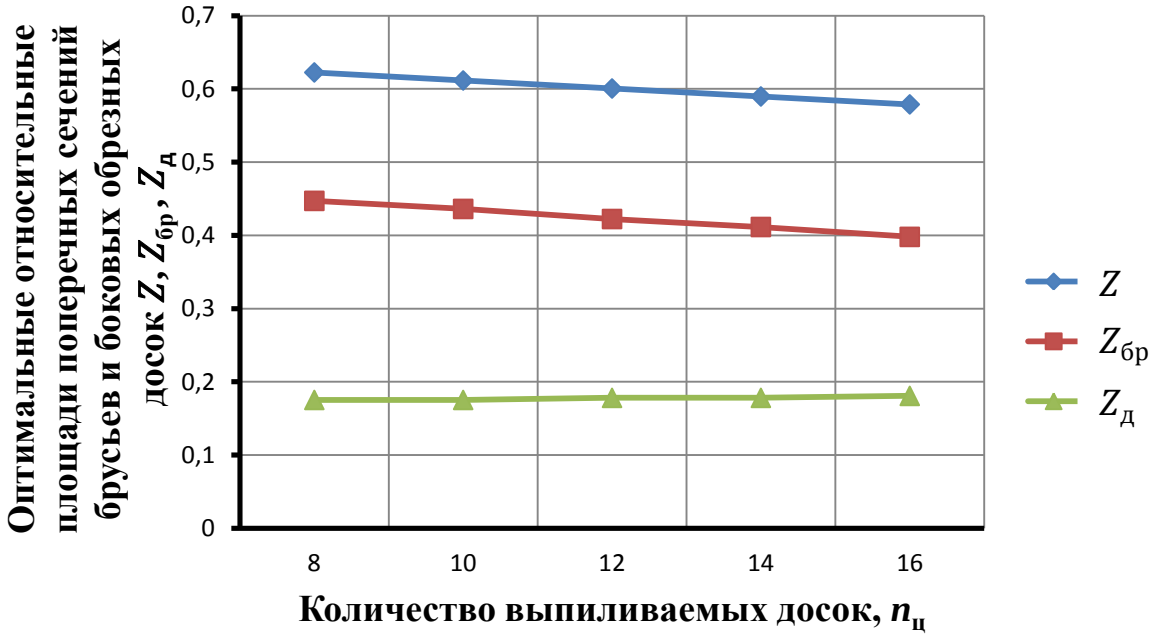


Рис. 3.38. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 3,0

Расчеты показали сложный характер изменения размерных параметров получаемых брусьев и боковых обрезных досок при последующей распиловке брусьев на обрезные доски.

С увеличением количества выпиливаемых обрезных досок из центрального бруса $n_ц$ оптимальные относительные площади попе-

речных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшаются, как при c = 1,0 (см. рис. 3.36), так и при c = 3,0 (см. рис. 3.38). При этом площади поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ возрастают для любых значений коэффициента c. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений досок, получаемых из брусьев, и оптимальные относительные площади поперечного сечения боковых обрезных досок с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ уменьшаются. Такая закономерность справедлива для любого значения коэффициента c. При этом наблюдается разное сочетание $Z_д$ и $Z_{бр}$ для различных значений коэффициента c.

Сравнивая графики на рис. 3.30…3.32, следует отметить, что оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. При этом с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, возрастает. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев и боковых обрезных досок, уменьшается незначительно.

Сравнивая эти закономерности, можно отметить, что при увеличении количества выпиливаемых обрезных досок, как из центрального бруса, так и из боковых брусьев, выход обрезных пиломатериалов несколько уменьшается, так как потери древесины в опилки по сравнению с вариантом, когда выпиливается меньшее количество обрезных досок, увеличиваются.

Таким образом, впервые было установлено влияние последующего раскроя брусьев на обрезные доски на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также на выходе пиломатериалов.

3.6. Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны и ширины пропила

Постановка и математическая модель задачи. С целью повышения выхода пиломатериалов при раскрое пиловочника расматривается, как правило, использование не только пифагорической, но и параболической (сбеговой) зон [89, 90]. С учетом сбеговой зоны схема раскроя пилвочника представлена на рис. 3.39 и 3.40.

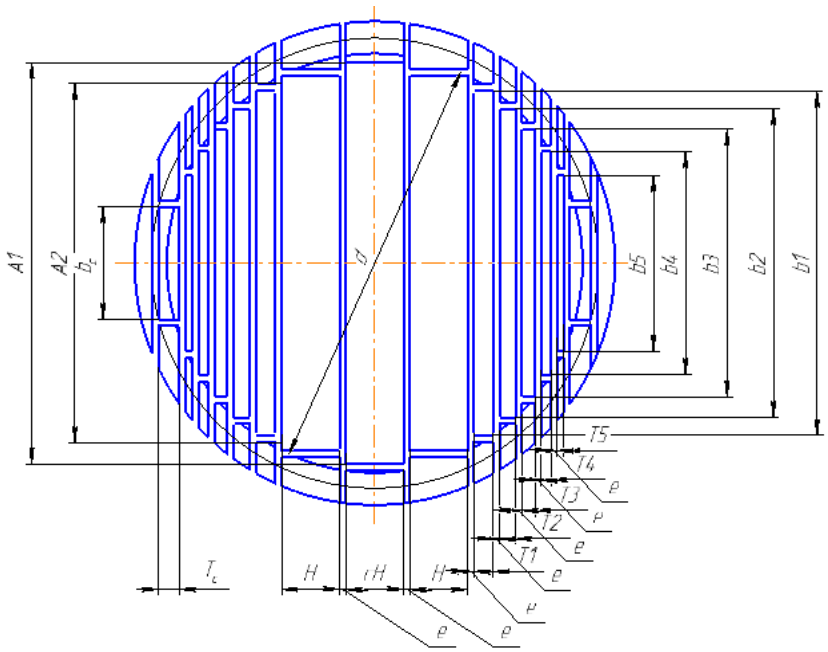


Рис. 3.39. Схема раскроя пиловочника в поперечном сечении с выпиливанием трех брусьев разной толщины и пяти пар боковых обрезных досок с учетом сбега бревна и ширины пропила

В сбеговой зоне получаются обрезные доски длиной менее длины бревна, то есть они обрезаются не только по ширине, но и по длине. В теории максимальных поставов [99, 103] было установлено, что оптимальная длина доски, получаемой из сбеговой зоны, равна 2/3 от длины наружной параболы $l_п$, которая образует наружную пласть этой доски.

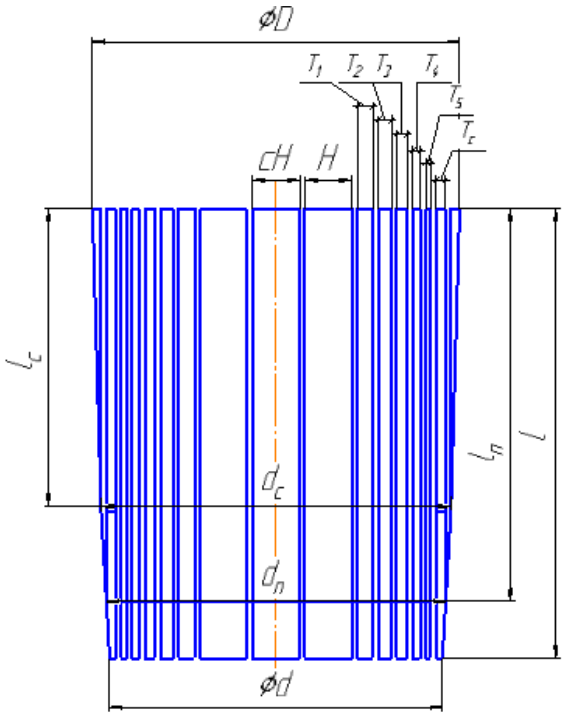


Рис.3.40. Схема раскроя пиловочника в продольном сечении с выпиливанием трех брусьев разной толщины и пяти пар боковых обрезных досок с учетом сбега бревна и ширины пропила

Для решения задачи оптимизации составляем уравнение целевой функции [89]. В качестве критерия оптимальности выбираем объем получаемых пиломатериалов. Целевая функция записывается в виде суммарного объема пиломатериалов V, получаемого из пифагорической зоны $V_{\text{П}}$, и объема обрезных досок $V_{\text{с}}$, получаемого из сбеговой зоны [90, 91, 92]:

$$V = V_{\text{П}} + V_{\text{с}}. \tag{3.198}$$

Объем пиломатериалов, получаемый из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$V_{\text{П}} = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 2b_4T_4 + 2b_5T_5). \tag{3.199}$$

Объем обрезных досок, получаемый из сбеговой зоны, можно записать в следующем виде:

$$V_{\text{с}} = 2b_{\text{с}}T_{\text{с}}l_{\text{с}}. \tag{3.200}$$

Диаметр бревна в нижнем торце D можно выразить так:

$$D = d + K_{\text{с}}dl = d(1 + K_{\text{с}}l). \tag{3.201}$$

Диаметр пиловочника, при котором начинается выпиливание сбеговой доски по длине, определится по уравнению:

$$d_c = d\big(1 + K_c(l - l_c)\big). \tag{3.202}$$

Целевая функция (3.198) составлена с учетом следующего предположения. При увеличении пифагорической зоны объем получаемых пиломатериалов из этой зоны возрастает, а объем досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшается, и наоборот. Очевидно, имеется такое соотношение этих объемов, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника написаны с учетом теоремы Пифагора. Для пифагорической зоны уравнения связи будут иметь следующий вид.

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \tag{3.203}$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0. \tag{3.204}$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (3.205)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (3.206)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) = 0. \quad (3.207)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \quad (3.208)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 12e)^2 = 0. \quad (3.209)$$

Уравнение связи для досок, получаемых из сбеговой зоны:

$$d_c^2 - b_c^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 2T_c + 14e)^2 = 0. \quad (3.210)$$

В уравнении связи (3.210) диаметр пиловочника d_c^2 определяется по формуле:

$$d_c^2 = d^2 + d^2 {K_c}^2 l^2 - 2d^2 {K_c}^2 l l_c + d^2 {K_c}^2 {l_c}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c. \quad (3.211)$$

В развернутом виде уравнение связи (3.210) будет иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} d^2 + d^2 {K_c}^2 l^2 - 2d^2 {K_c}^2 l l_c + d^2 {K_c}^2 {l_c}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c - \\ -b_c^2 - c^2 H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - 4cHT_c - \\ -28ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_c - \\ -56eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_c - 56eT_1 - \\ -4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_c - 56eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - \\ -8T_3T_5 - 8T_3T_c - 56eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 8T_4T_c - 56eT_4 - \\ -4T_5^2 - 8T_5T_c - 56eT_5 - 4T_c^2 - 56eT_c - 196e^2 = 0. \end{gathered}$$

Полагаем, что математическая модель данной задачи оптимизации с учетом пифагорической и сбеговой зон пиловочника составлена.

Решение математической модели. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде [94, 95]:

$$L = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + 2b_3T_3 + 2b_4T_4 + 2b_5T_5) + 2b_cT_cl_c +$$
$$+\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 -$$
$$-8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 -$$
$$-8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 -$$
$$-4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 -$$
$$-24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 -$$
$$-4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 -$$
$$-32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 -$$
$$-32eT_3 - 64e^2) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 -$$
$$-4cHT_3 - 4cHT_4 - 20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 40eH -$$
$$-4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 -$$
$$-40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2) +$$
$$+\lambda_7(d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - \quad (3.212)$$
$$-4cHT_4 - 4cHT_5 - 24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 -$$
$$-8HT_4 - 8HT_5 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 -$$
$$-8T_1T_5 - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 -$$
$$-48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 48eT_3 - 4T_4^2 -$$
$$-8T_4T_5 - 48eT_4 - 4T_5^2 - 48eT_5 - 144e^2) + \lambda_8(d^2 + d^2\,K_c{}^2l^2 -$$
$$-2d^2\,K_c{}^2ll_c + d^2\,K_c{}^2l_c{}^2 + 2d^2\,K_cl - 2d^2\,K_cl_c - b_c^2 - c^2H^2 -$$
$$-4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - 4cHT_c -$$
$$-28ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_c -$$
$$-56eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_c - 56eT_1 -$$
$$-4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_c - 56eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 -$$
$$-8T_3T_5 - 8T_3T_c - 56eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 8T_4T_c - 56eT_4 -$$
$$-4T_5^2 - 8T_5T_c - 56eT_5 - 4T_c^2 - 56eT_c - 196e^2) = 0.$$

Используя для решения данной задачи оптимизации раскроя пиловочника методику, изложенную в предыдущих задачах, получим ряд дополнительных уравнений, устанавливающих взаимосвязь размеров брусьев и обрезных досок, получаемых из пифагорической и сбеговой зон. Однако определить по этим уравнениям оптимальные размеры брусьев и обрезных досок классическим методом невозможно.

Алгоритм решения задачи. Для решения задачи воспользуемся численным методом. Для определения оптимальных размеров брусьев и досок расчеты производим в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ и $m_e = e/d$.

Алгоритм решения задачи представляем в следующем виде.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2m_H^2}. \quad (3.213)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (3.214)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} +$$

$$+\frac{2(1-((cm_H+2m_H+2m_e)^2+m_H^2(c+2)^2+2m_em_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (3.215)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b_1}^2}-(cm_H+2m_H+4m_e)). \quad (3.216)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)}+\frac{2(m_{A_2}^2-m_H^2(c+2)^2-2m_Hm_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (3.217)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1}-\frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+4m_e\right). \quad (3.218)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b_2}^2}-\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+6m_e\right)). \quad (3.219)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2}-\frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+6m_e\right). \quad (3.220)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b_3}^2}-\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+8m_e\right)). \quad (3.221)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 8m_e\right). \quad (3.222)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)\right). \quad (3.223)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = m_{b_4} - \frac{2m_4}{m_{b_4}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 10m_e\right). \quad (3.224)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - \right.$$
$$\left. -\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e\right)\right). \quad (3.225)$$

Относительная величина пифагорической зоны определяется по формуле:

$$m_E = cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e. \quad (3.226)$$

Относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны:

$$m_{T_c} = 0{,}5\left(\sqrt{d_c^2 - m_{b_c}^2} - \right.$$
$$\left. -\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e\right)\right). \quad (3.227)$$

Относительная ширина наружной пласти сбеговой доски:

$$m_{b_C} = \sqrt{2m_E m_{T_C} + 4m_{T_c}^2}. \quad (3.228)$$

Относительная длина сбеговой доски:

$$m_{l_C} = \frac{m_D - \sqrt{8m_{T_c}^2 + 6m_E m_{T_C} + m_E^2}}{K_c}. \quad (3.229)$$

Решая равенства (3.201) и (3.202), можно написать:

$$m_{d_C} = m_D - K_c m_{lc}. \quad (3.230)$$

Используя равенство (3.230), относительную толщину доски, получаемой из сбеговой зоны, можно определить по формуле:

$$m_{T_c} = \frac{\sqrt{16m_D^2 + 9m_E^2} - 5m_E^2}{16}. \quad (3.231)$$

Критерием оптимальности при раскрое пиловочника выбираем общий относительный выход пиломатериалов m_V, получаемых из пифагорической $m_{V_П}$ и сбеговой $m_{V_с}$ зон, относительно общего объема пиловочника $V_{ОП}$, который определяется по формуле:

$$m_V = \frac{V}{V_{ОП}}. \quad (3.232)$$

Объем пиловочника (бревна) определяется по формуле:

$$V_{ОП} = \frac{\pi(d + D)^2}{16} l. \quad (3.233)$$

Относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_с} = 2m_{T_с}m_{b_с}m_{l_с}. \quad (3.234)$$

Относительный объем брусьев, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_{бр}} = \left(cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}\right)l. \quad (3.235)$$

Относительный объем боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_д} = \left(2m_{T_1}m_{b_1} + 2m_{T_2}m_{b_2} + 2m_{T_3}m_{b_3} + 2m_{T_4}m_{b_4} + 2m_{T_5}m_{b_5}\right)l. \quad (3.236)$$

Суммарный относительный объем брусьев и досок, получаемый из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_П} = m_{V_{бр}} + m_{V_д}. \quad (3.237)$$

Общий относительный объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговой зон, определяется по формуле:

$$m_V = m_{V_п} + m_{V_с}. \quad (3.238)$$

Так как объем пиломатериалов V, получаемых из пиловочника, определяется по алгоритму в относительных единицах (m'_V), тогда для сравнения и анализа результатов и общий объем пиловочника необходимо представлять в относительных единицах.

Объем пиловочника в относительных единицах определяется по формуле:

$$m_{V_{\text{ОП}}} = \frac{\pi(1+m_D)^2}{16} l. \quad (3.239)$$

Относительный диаметр пиловочника в комлевом торце определяется по формуле:

$$m_D = 1 + Kcl. \quad (3.240)$$

Подставив равенство 3.238 в формулу 3.237, получим:

$$m_{V_{\text{ОП}}} = \frac{\pi(2+Kcl)^2}{16} l. \quad (3.241)$$

На практике при составлении и расчете поставов определяют выход пиломатериалов из бревна. Тогда в относительных единицах выход пиломатериалов из бревна определится по следующим формулам.

Относительный выход пиломатериалов, получаемых при раскрое пиловочника, определяется по формуле:

$$\text{П}_V = \frac{V}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_V}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (3.242)$$

Относительный выход досок, получаемых из сбеговой зоны, определяется по формуле:

$$\text{П}_{V_\text{с}} = \frac{V_c}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_{V_c}}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (3.243)$$

Относительный выход брусьев, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, определяется по формуле:

$$\text{П}_{V_{\text{бр}}} = \frac{V_{\text{бр}}}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_{V_{\text{бр}}}}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (3.244)$$

Относительный выход боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$П_{V_д} = \frac{V_д}{V_{ОП}} = \frac{m_{V_д}}{m_{V_{ОП}}}. \quad (3.245)$$

Относительный выход брусьев и боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$П_{V_П} = \frac{V_П}{V_{ОП}} = \frac{m_{V_П}}{m_{V_{ОП}}}. \quad (3.246)$$

Полагаем, что алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника с учетом сбеговой зоны в относительных единицах составлен.

Результаты расчетов. Расчеты выполняются в такой последовательности. Вначале задаемся длиной бревна *l* и коэффициентом изменения толщины брусьев *c*. Далее задаемся относительным сбегом бревна по диаметру *Кс* и относительной шириной пропила m_e. Для этих параметров по алгоритму определяем все размеры брусьев, досок и величину целевой функции для определенного диапазона относительной толщины брусьев m_H. По результатам расчетов находим оптимальное (максимальное) значение целевой функции [48]. Оптимальные результаты расчетов представлены в приложении 3.2.

Основные зависимости оптимальных относительных размеров брусьев и досок, а также их относительных объемов представлены на последующих рисунках.

При распиловке пиловочника с учетом сбеговой зоны с увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины бруса *c* = 1,0 и длине пиловочника *l* = 3,0 м оптимальная относительная толщина бокового бруса возрастает и пифагорическая зона также увеличивается (см. рис. 3.41). При этом возрастает также и оптимальная относительная толщина центрального бруса.

При увеличении относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника m_{Vc}, уменьшается, оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает, а оптимальный относительный объем боковых обрезных досок $m_{V_д}$ уменьшается (см. рис. 3.42). В результате суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, уменьшается. Следует обратить внимание на оптимальный относительный объем досок, получаемый из сбеговой зоны пиловочника, который при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ сокращается почти в два раза по сравнению с вариантом, когда относи-

тельная ширина пропила $m_e = 0$. При этом относительный выход пиломатериалов, получаемых из сбеговой зоны пиловочника, составляет всего лишь около m_{Vc} = 0,5% от всего объема пиломатериалов, получаемых из бревна. Таким образом, при использовании сбеговой зоны пиловочника с четырех сторон выход прибавляется за счет сбеговой зоны всего лишь на 1% [58].

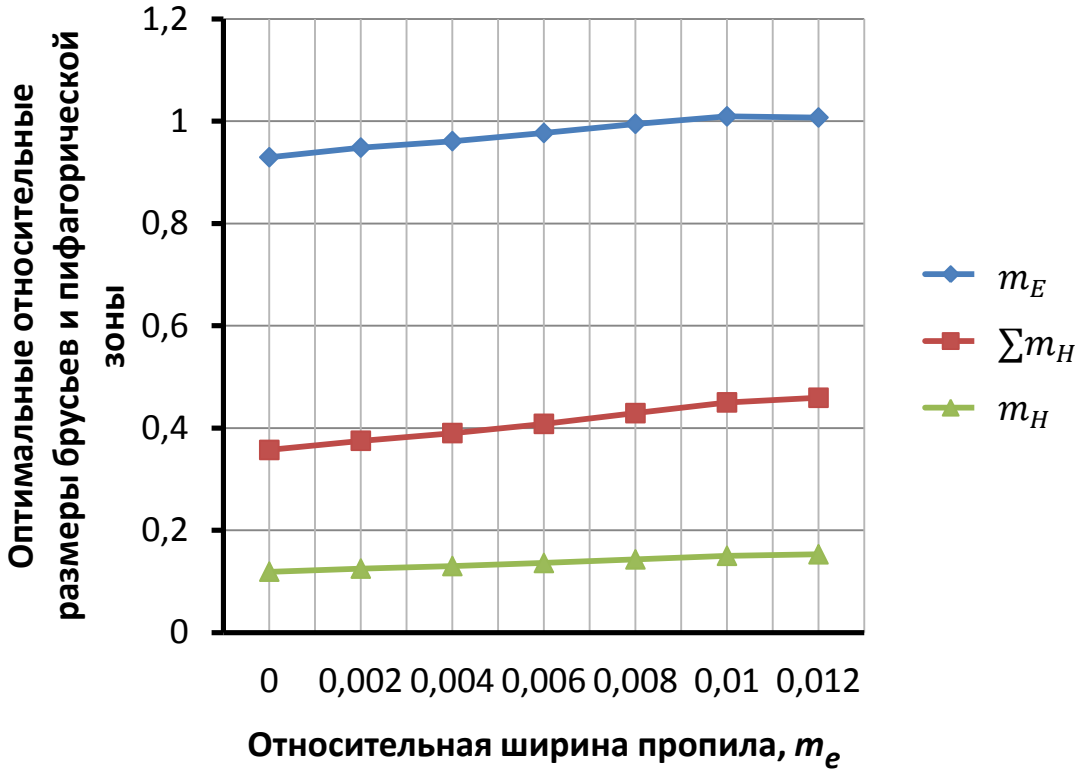


Рис. 3.41. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_H, m_E, $\sum m_H$ при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением ширины пропила оптимальные относительные размеры досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 3.43). При этом оптимальная относительная длина доски уменьшается в большой мере [68]. Следовательно, относительная ширина пропила наибольшее влияние оказывает на оптимальную длину доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника. Так, например, для данных условий пиления (c = 1,0 и l = 3,0 м) при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ относительная длина доски равна $m_{lc} = 0{,}5$ от длины пиловочника, а относительная ширина этой доски будет равна $m_{bc} = 0{,}2$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. При этом относительная толщина этой доски будет составлять $m_{Tc} = 0{,}023$ от диаметра пиловочника в вершинном торце [68]. В

этом варианте раскроя пиловочника получаются доски из сбеговой зоны сравнительно малых размеров.

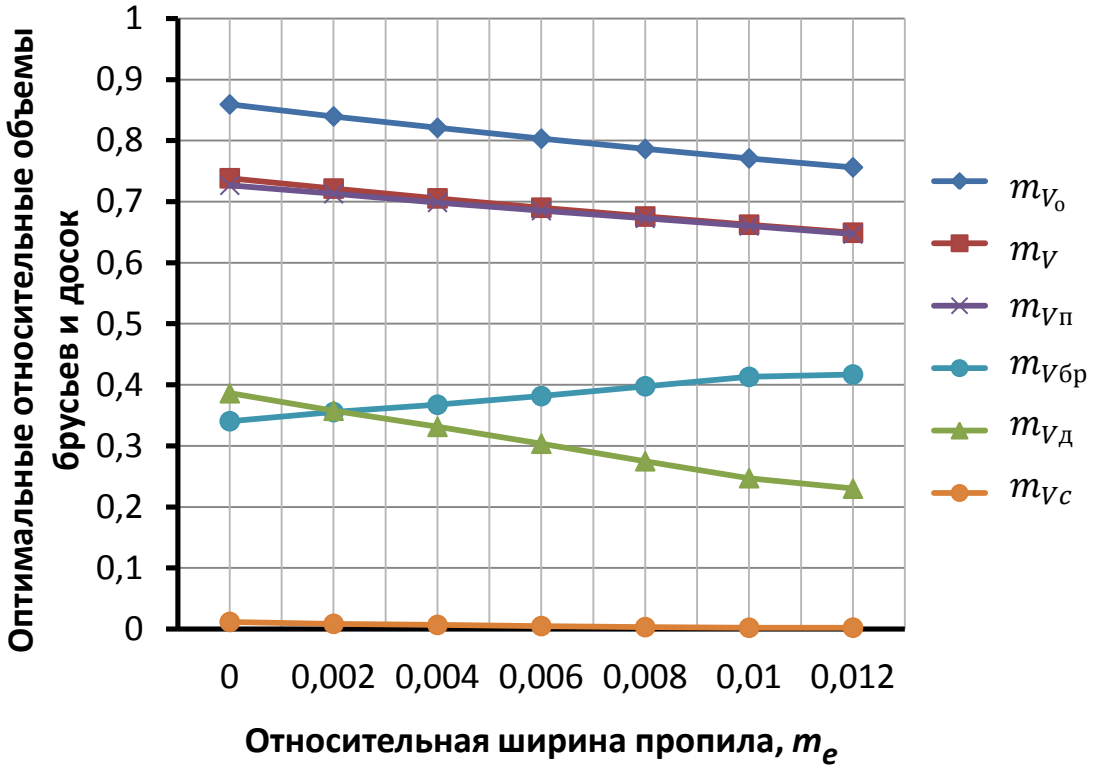


Рис. 3.42. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_{V_o} m_V, $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$, m_{Vc} при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок возрастает, а оптимальные относительные толщины следующих пар обрезных досок уменьшаются, причем уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 3.44). Так, например, толщина последней (пятой) пары боковых обрезных досок уменьшилась до нуля.

Данные расчеты показывают, что даже при относительной ширине пропила m_e = 0,006 относительная толщина пятой (крайней) пары боковых обрезных досок составляет всего лишь 0,02 от диаметра пиловочника в вершинном торце [68]. При распиливании пиловочника диаметром 60 см оптимальная толщина крайней боковой обрезной доски составит всего лишь m_{T5} = 12 мм. Такая толщина доски в стандарте на пиломатериалы не предусмотрена.

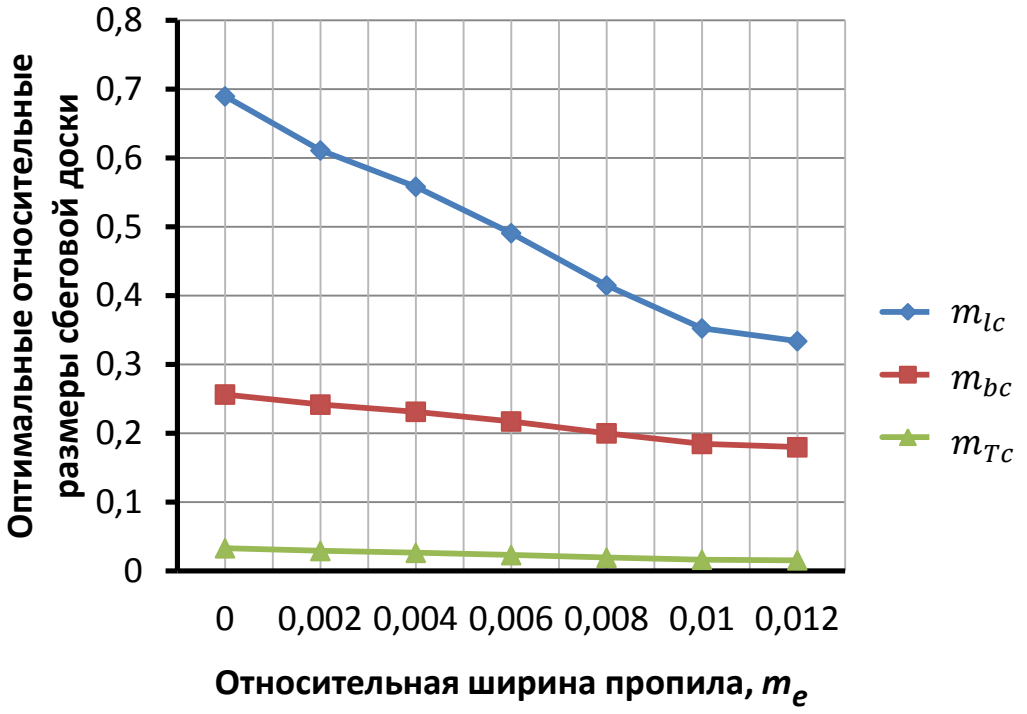


Рис. 3.43. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc} при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

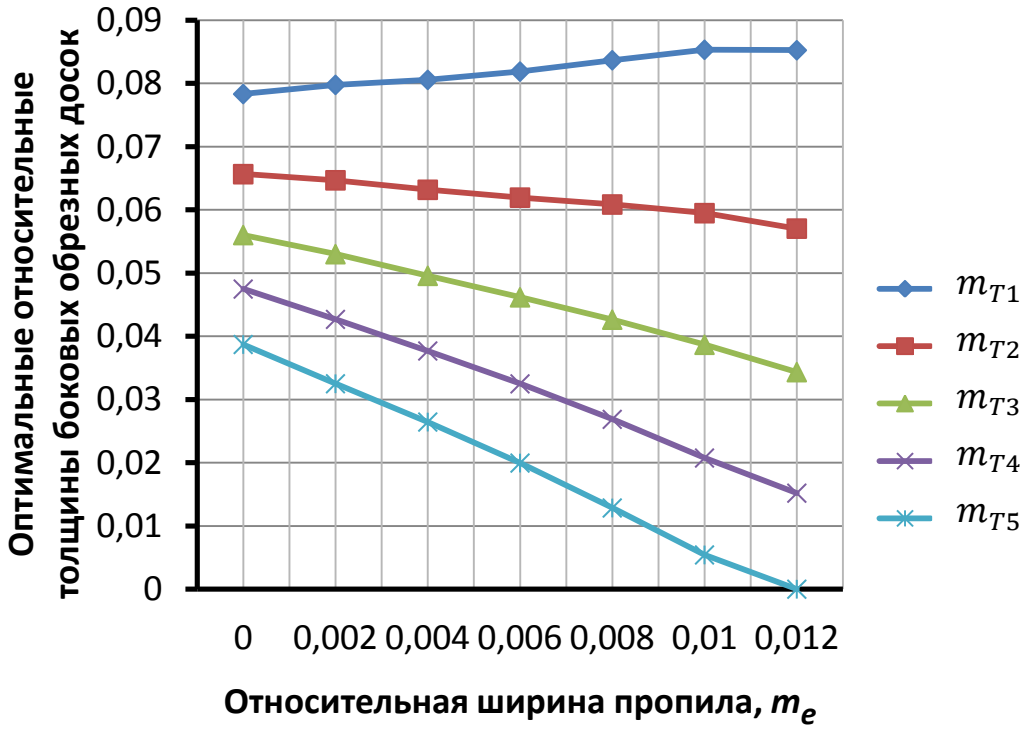


Рис. 3.44. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника

l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (рис. 3.45) с небольшим ускорением. Ширина крайней боковой обрезной доски при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}012$ принимает нулевое значение [68].

Следует обратить внимание, что при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ величина относительной ширины пятой пары боковой обрезной доски составляет 0,26 от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае при распиловке пиловочника диаметром 60 см оптимальная ширина крайней боковой обрезной доски составит $b_5 = 156$ мм. В стандарте на пиломатериалы предусмотрены доски шириной 100, 125 и 150 мм. Следовательно, уменьшая ширину доски и увеличивая ее толщину, можно выпиливать крайние боковые доски стандартных размеров.

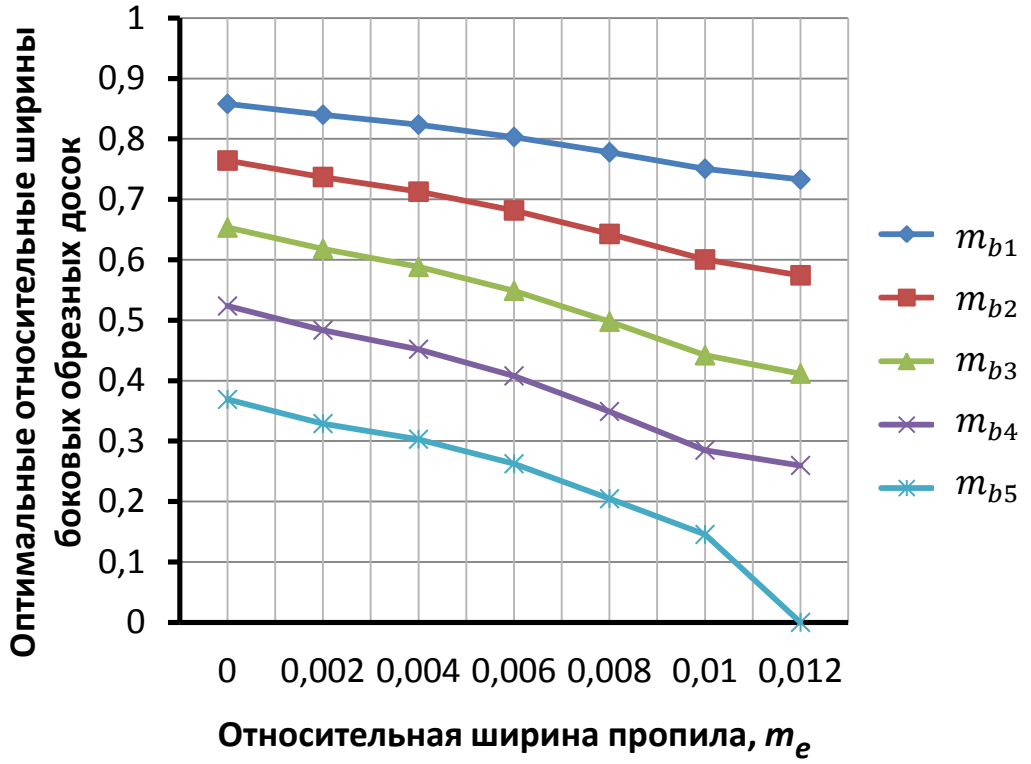


Рис. 3.45. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Аналогичная закономерность изменения размеров оптимальных относительных брусьев, досок и их объемов наблюдается при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 (см. рис. 3.46 и 3.41). Различие наблюдается в том, что относительная величина центрального бруса и сумма относительных толщин этих брусьев имеют другие соотношения.

Сравнивая рис. 3.41 и 3.46, следует отметить, что суммарная оптимальная толщина брусьев $\sum m_H$ больше при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0, чем при коэффициенте c = 1,0.

Следовательно, можно, изменяя величину коэффициента изменения толщин брусьев c, выбрать толщины этих брусьев стандартных размеров с учетом ширины пропила.

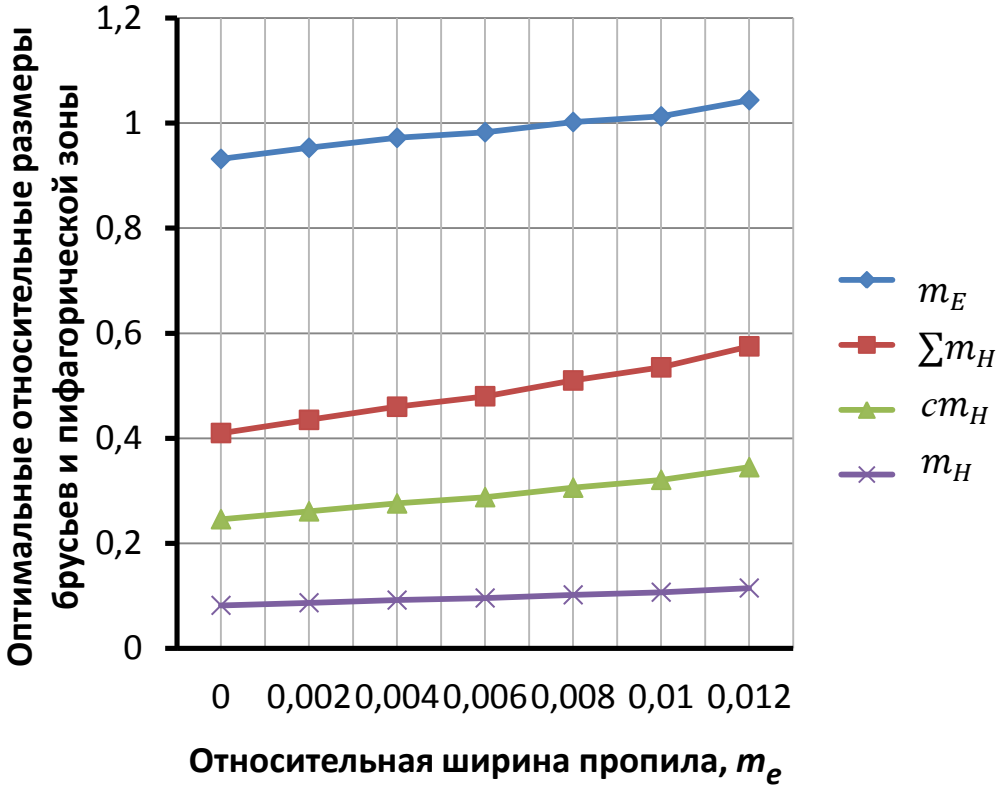


Рис. 3.46. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры $m_E, \sum m_H, m_H$ при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}, и оптимальный относительный объем досок, получаемых из пифагорической зоны $m_{Vд}$, уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев $m_{Vбр}$ возрастает (см. рис. 3.47). Суммарный относительный объем пиломатериалов $m_{Vп}$ с увеличением относительной ширины пропила уменьшается. Такие закономерности получены при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м. Сравнивая графики на рис. 3.42 и 3.47, следует отметить отличие: при коэффициенте c = 3,0 оптимальный относительный объем боковых обрезных досок $m_{Vд}$ меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

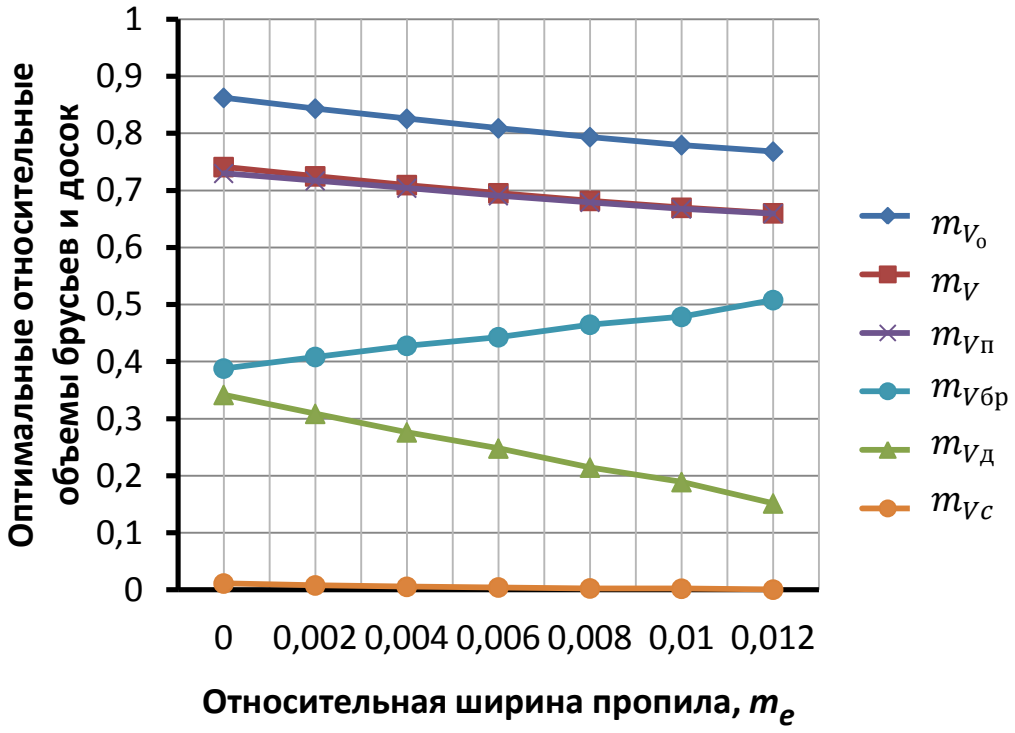


Рис. 3.47. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила m_e относительные размеры боковой обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 3.48). При этом относительная длина сбеговой доски m_{lc} уменьшается в большой мере, чем относительная ширина сбеговой доски m_{bc} и относительная толщина этой сбеговой доски m_{Tc}. Этот график получен при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м.

Сравнивая между собой результаты на рис. 3.43 и 3.48, следует отметить, что оптимальные относительные размеры обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника, также при увеличении относительной ширины пропила уменьшаются. При коэффициенте c = 3,0 оптимальные относительные размеры этой доски (длина, ширина и толщина) уменьшаются в большей степени, чем при коэффициенте с = 1,0 [68].

Следовательно, для выпиливания досок стандартных размеров можно рассматривать окончательный выбор величины коэффициента толщин брусьев c.

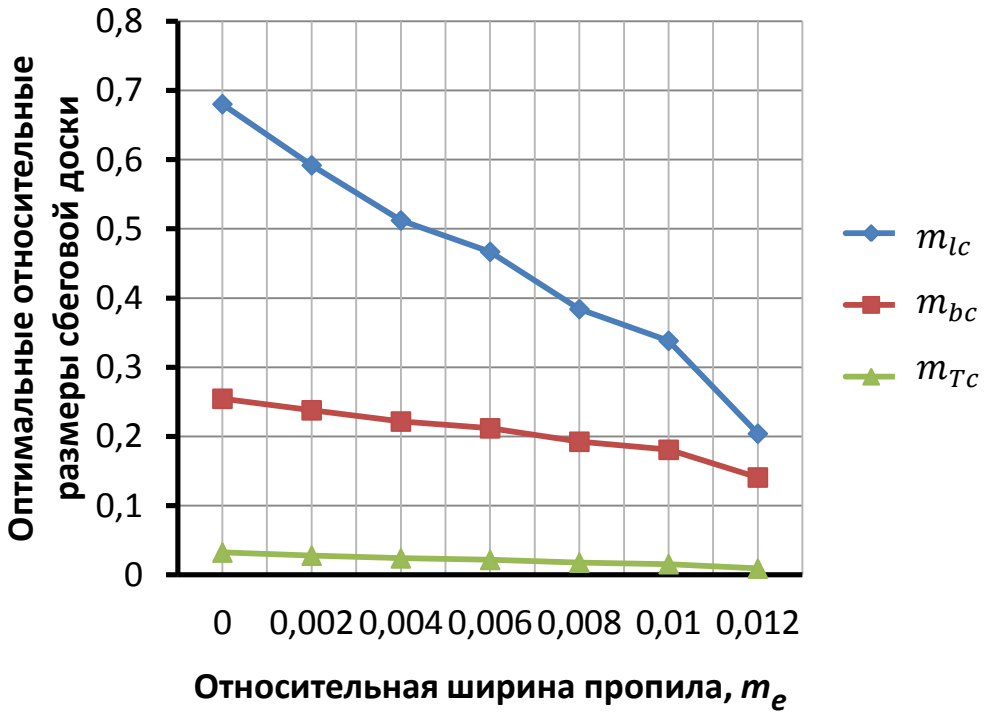


Рис. 3.48. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются, кроме первой боковой обрезной доски, величина которой при этом возрастает. При этом уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 3.49). Увеличение оптимальной относительной толщины первой пары боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила происходит незначительно. Оптимальная относительная толщина второй пары боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила существенно уменьшается. Толщина крайней боковой обрезной доски при m_e = 0,01 приближается к нулевому значению. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски составляет всего лишь $m_{T5} = 0{,}016$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае при распиловке пиловочника диаметром 60 см получается доска толщиной 9,6 мм [68].

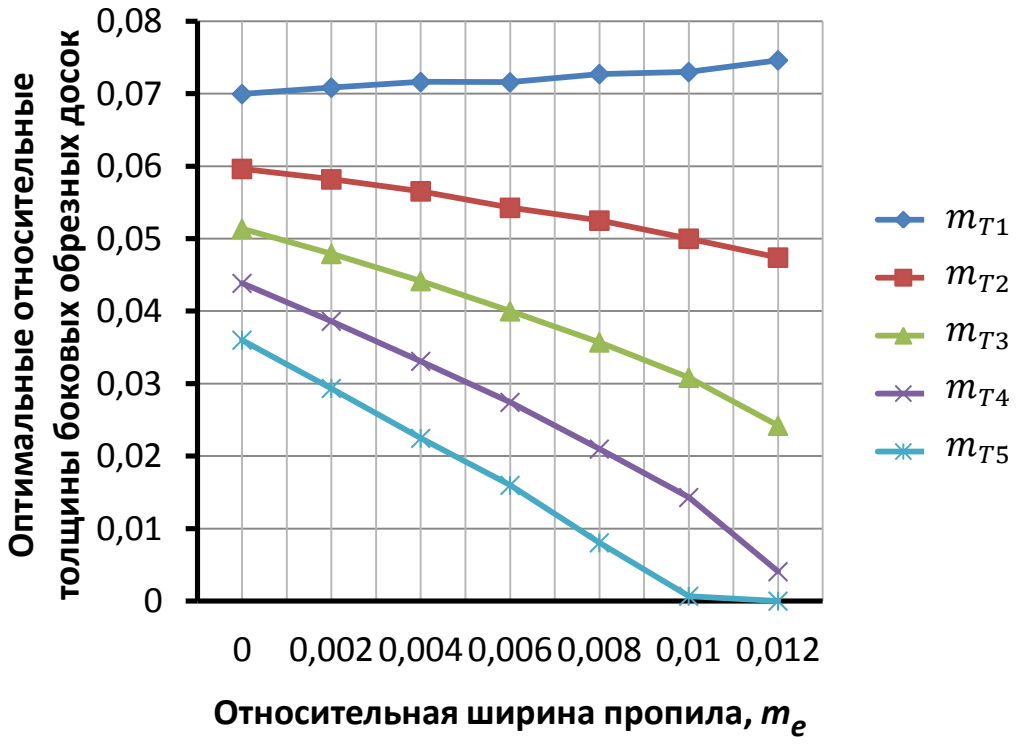


Рис. 3.49. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 3.50) с ускорением. Ширина крайней боковой обрезной доски при относительной ширине пропила m_e = 0,012 принимает нулевое значение.

Следует отметить, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальная ширина пятой пары (крайней) боковой обрезной доски при распиловке пиловочника диаметром в вершинном торце d = 60 см с относительной шириной пропила $m_e = 0{,}006$ получается равной $b_5 = 144$ мм. Такой размер вполне допустим.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м пифагорическая зона изменяется незначительно, но оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает. В итоге суммарная оптимальная относительная толщина брусьев возрастает до c = 3,0, а далее изменяется незначительно (см. рис. 3.51). Пифагорическая зона при этом изменяется незначительно, и величина ее превышает 1,0.

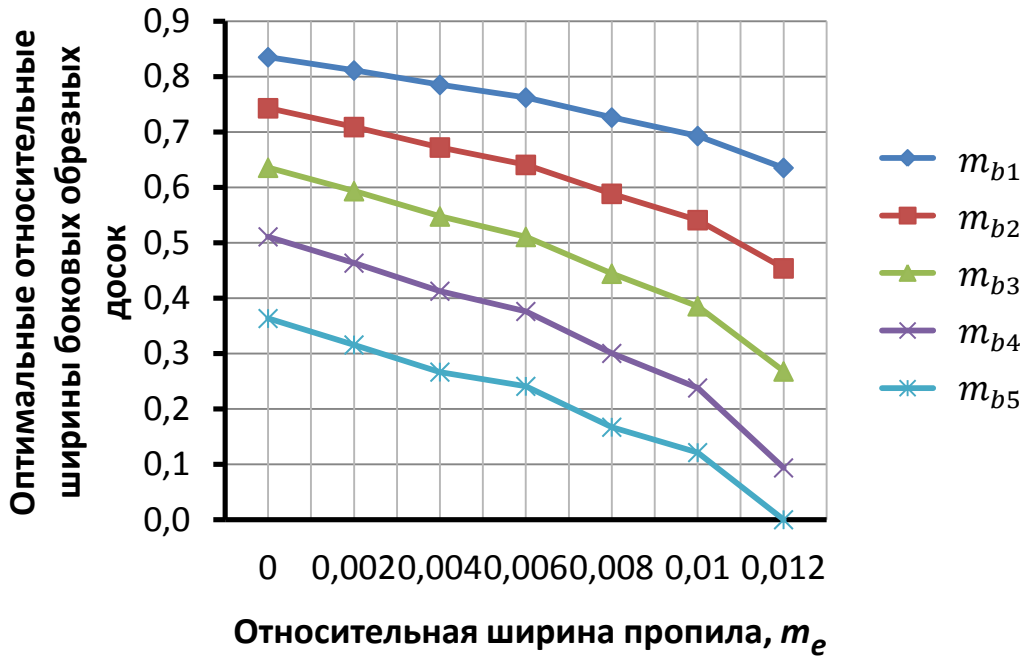


Рис. 3.50. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Такой размер пифагорической зоны объясняется тем, что в этом случае учитывались дополнительно два пропила. Следует также подчеркнуть, что охват бревна поставом используется в полном размере, и поэтому сбеговая зона начинается за диаметром пиловочника в вершинном торце и приемлема при составлении поставов.

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, незначительно уменьшается. При этом оптимальный относительный объем боковых обрезных досок уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев возрастает до c = 3,0, а затем практически сохраняется. В итоге оптимальный относительный объем получаемых пиломатериалов незначительно увеличивается (см. рис. 3.52). С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c существенно изменяются оптимальные относительные объемы брусьев и боковых обрезных досок, а сумма этих объемов изменяется не столь существенно.

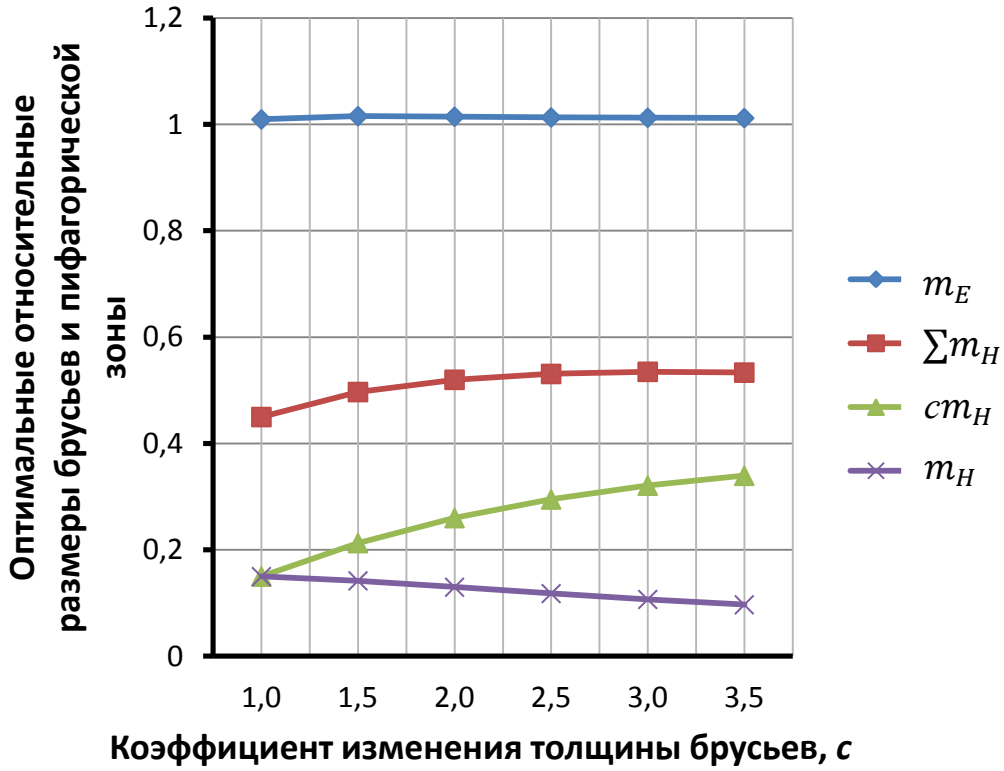


Рис. 3.51. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры $m_E, \sum m_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны m_{lc}, сначала уменьшается до c = 1,5, а затем незначительно увеличивается (см. рис. 3.53). Оптимальная относительная длина доски из сбеговой зоны l_c изменяется в пределах 0,33...0,35 от длины бревна. При этом оптимальная относительная ширина и оптимальная относительная толщина этой доски изменяются незначительно. Это объясняется тем, что величина пифагорической зоны при увеличении коэффициента изменения толщины брусьев изменяется незначительно.

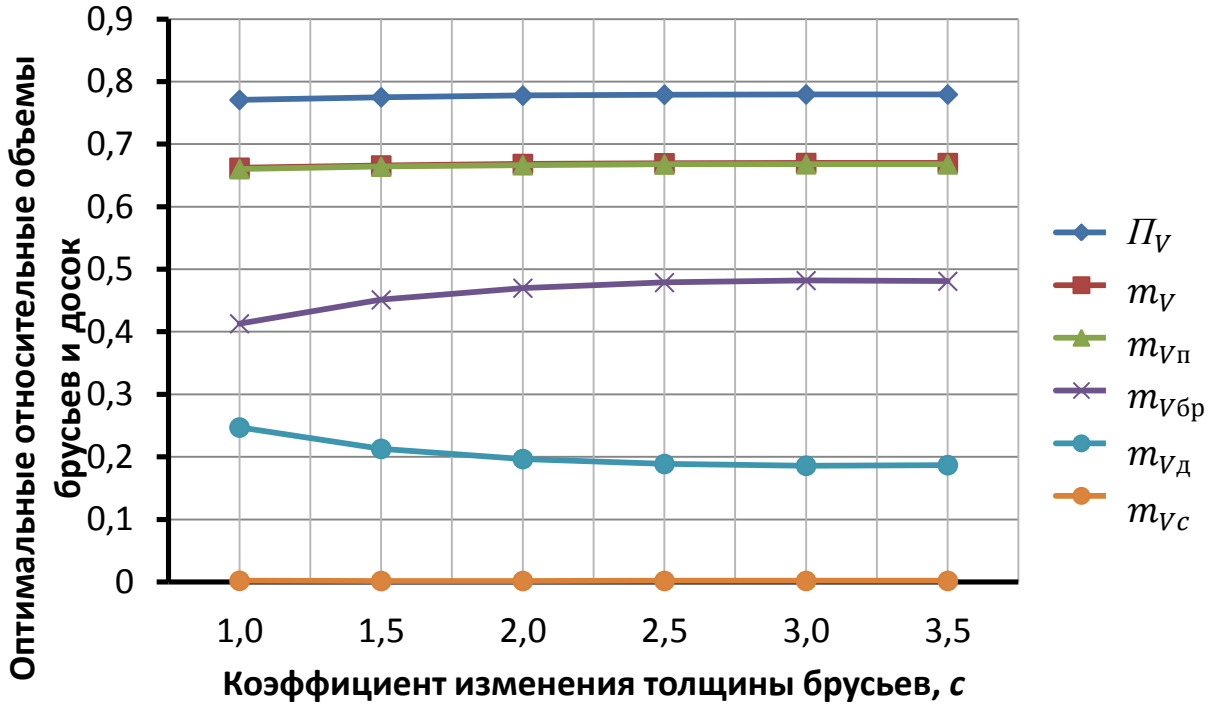


Рис. 3.52. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} и выход пиломатериалов $П_V$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

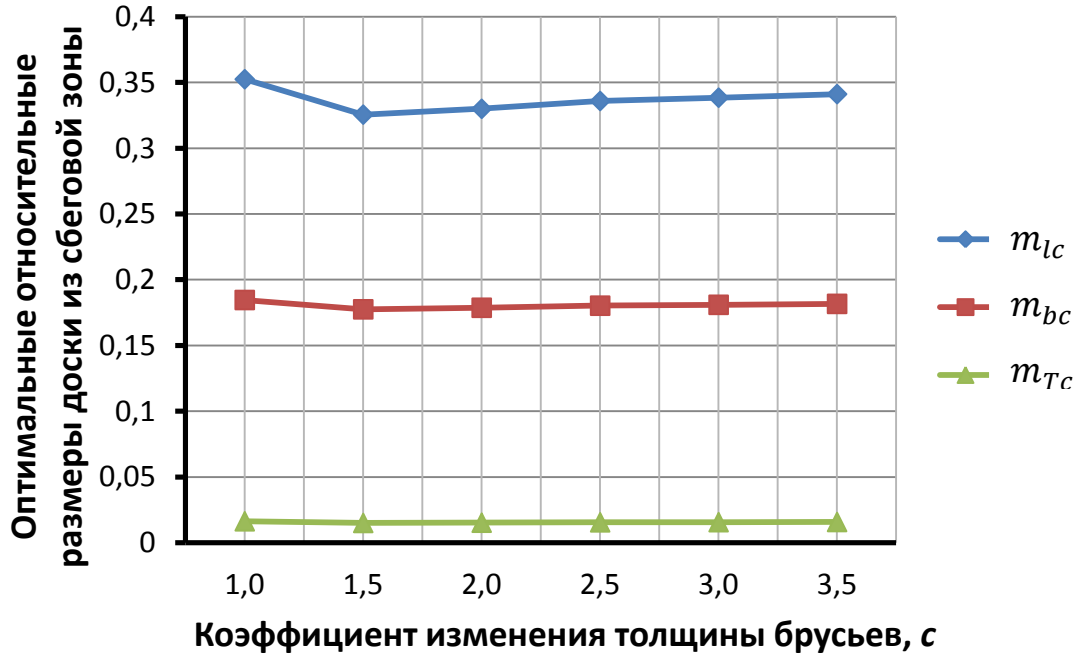


Рис. 3.53. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc}), при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

Следует обратить внимание, что оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны из пиловочника длиной 3,0 м и при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$, а также при изменении коэффициента c в пределах от 1,0…3,5, колеблется в диапазоне 0,016…0,015 [68]. В этом случае толщина доски получается очень малых размеров.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением по экспоненте. При этом уменьшения оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев в диапазоне c = 2,5…3,5 практически не происходит (рис. 3.54).

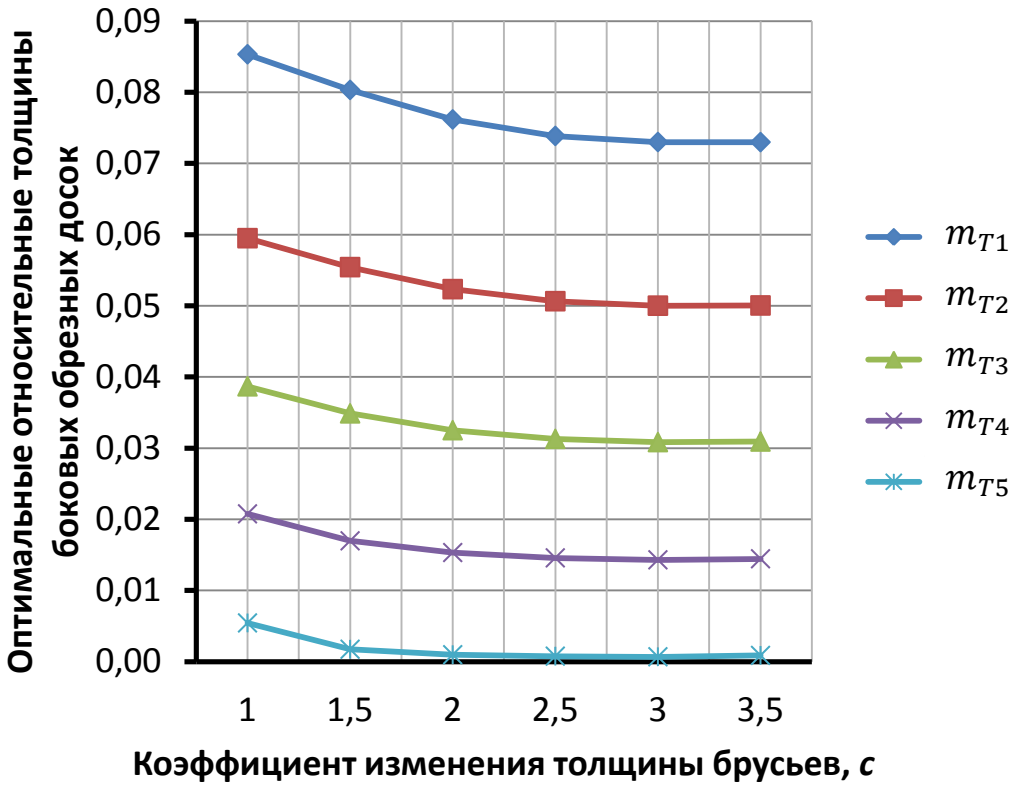


Рис. 3.54. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

Необходимо отметить, что оптимальная относительная толщина крайней (пятой) пары боковых обрезных досок, при длине пиловочника l = 3,0 м и относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ и при изменении коэффициента изменения толщин брусьев в диапазоне c = 2…3,5 составляет всего лишь $m_{T5} = 0{,}001$ от диаметра пиловочника в вершинном торце.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины первых трех боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением до c = 2,0, а далее эти размеры практически не изменяются. Оптимальные относительные ширины двух крайних боковых обрезных досок с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c вначале уменьшаются до c = 1,5, а затем незначительно возрастают (рис. 3.55). По расчетам оказалось, что оптимальная относительная ширина крайней (пятой) пары боковых обрезных досок при распиловке пиловочника диаметром в вершинном торце 60 см для данных условий раскроя пиловочника получается всего лишь 60…75 мм [68].

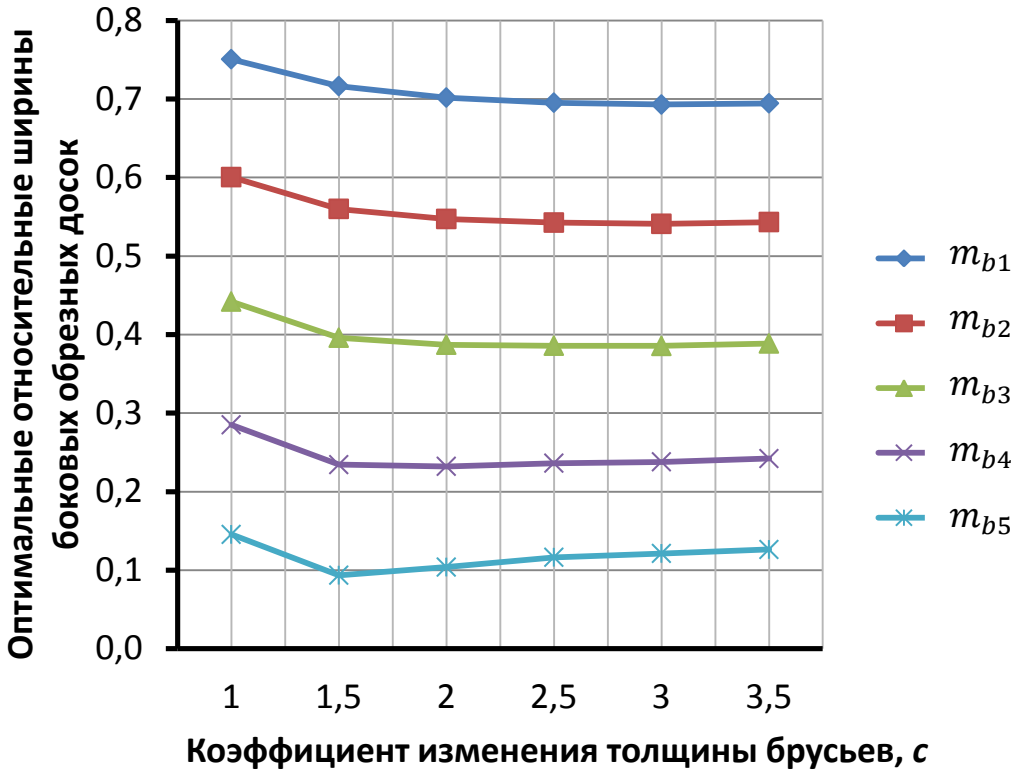


Рис. 3.55. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

Такие же сложные закономерности изменения размеров боковых обрезных досок и брусьев наблюдаются и при длине пиловочника l = 6,0 м (см. рис. 3.56, 3.57 и 3.58). С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c относительная толщина бокового бруса $m_Н$ уменьшается, а сумма оптимальных относительных толщин брусьев $\sum m_H$ возрастает до c = 2,5, а затем с ростом коэффициента c

этот параметр увеличивается незначительно. Пифагорическая зона при этом возрастает незначительно.

Сравнивая между собой рис. 3.51 и 3.56, следует отметить, что оптимальная величина пифагорической зоны при длине пиловочника l = 3,0 м при увеличении коэффициента изменения толщины брусьев изменяется в меньшем диапазоне, чем при длине пиловочника l = 6,0 м.

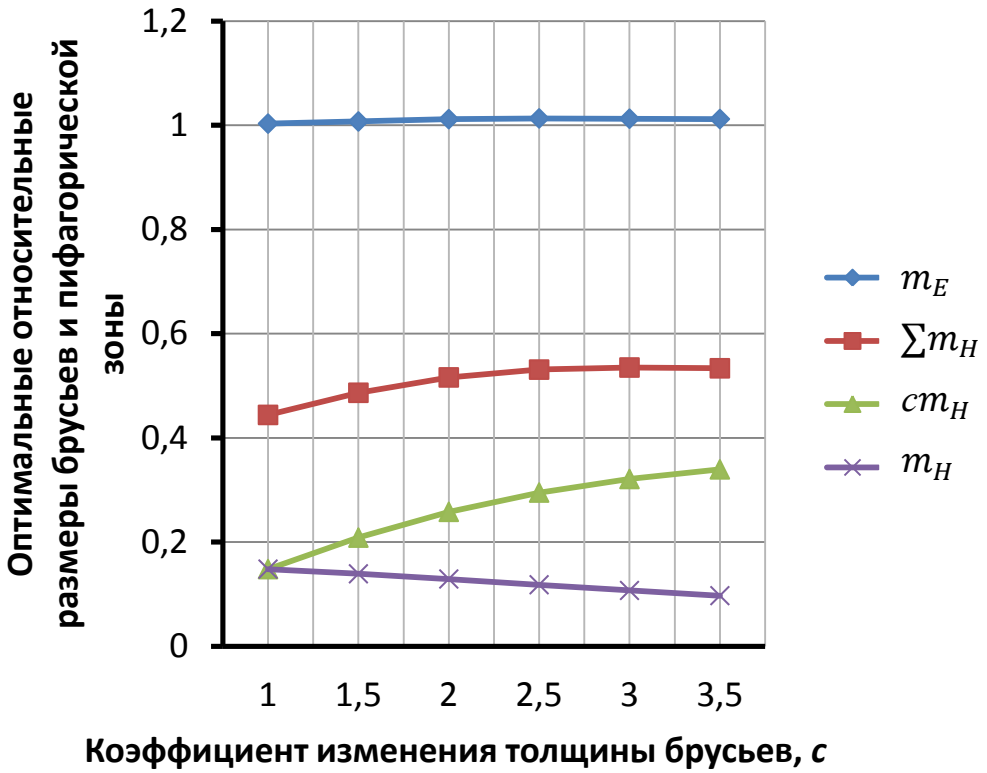


Рис. 3.56. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные m_E, $\sum m_H$, m_H при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м относительный объем обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}, незначительно изменяется. Это объясняется тем, что величина пифагорической зоны m_E возрастает незначительно. При этом относительный объем боковых обрезных досок $m_{V\text{д}}$ уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. Оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. В итоге суммарный относительный объем пиломатериалов изменяется незначительно и составляет чуть более 70% от объема бревна (рис. 3.57).

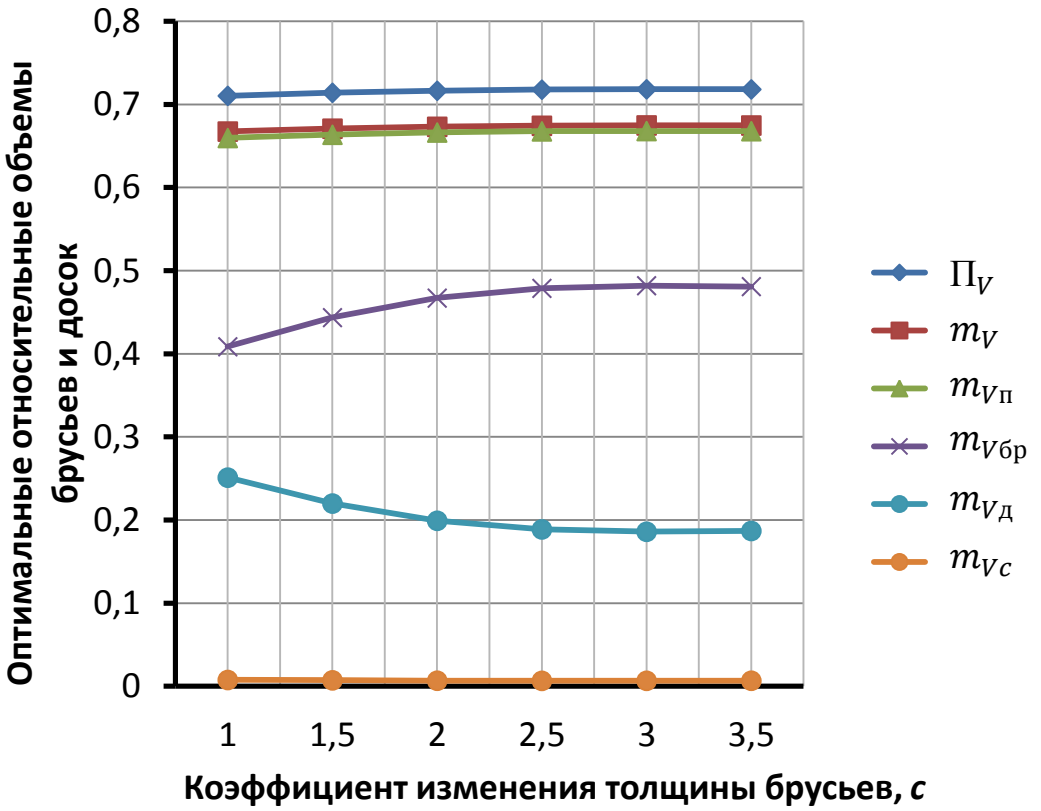


Рис. 3.57. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$, m_{Vc} и выход пиломатериалов $П_V$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая между собой рис. 3.52 и 3.57, можно отметить следующее. Оптимальный относительный объем брусьев $m_{Vбр}$ при длине пиловочника l = 6,0 м немного меньше, чем при длине пиловочника l = 3,0 м, а суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов m_V при длине пиловочника l = 3,0 м больше, чем при длине пиловочника l = 6,0 м. Это объясняется тем, что при длине пиловочника l = 6,0 м пифагорическая зона немного больше, чем при l = 3,0 м.

Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м представлено на рис. 3.58. С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальные относительные длина, ширина и толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, изменяются незначительно. При этом оптимальные относительные размеры (длина и ширина) уменьшаются до c = 2,5, а затем незначительно возрастают. Оптимальная относительная толщина доски из сбеговой зоны практически не изменяется.

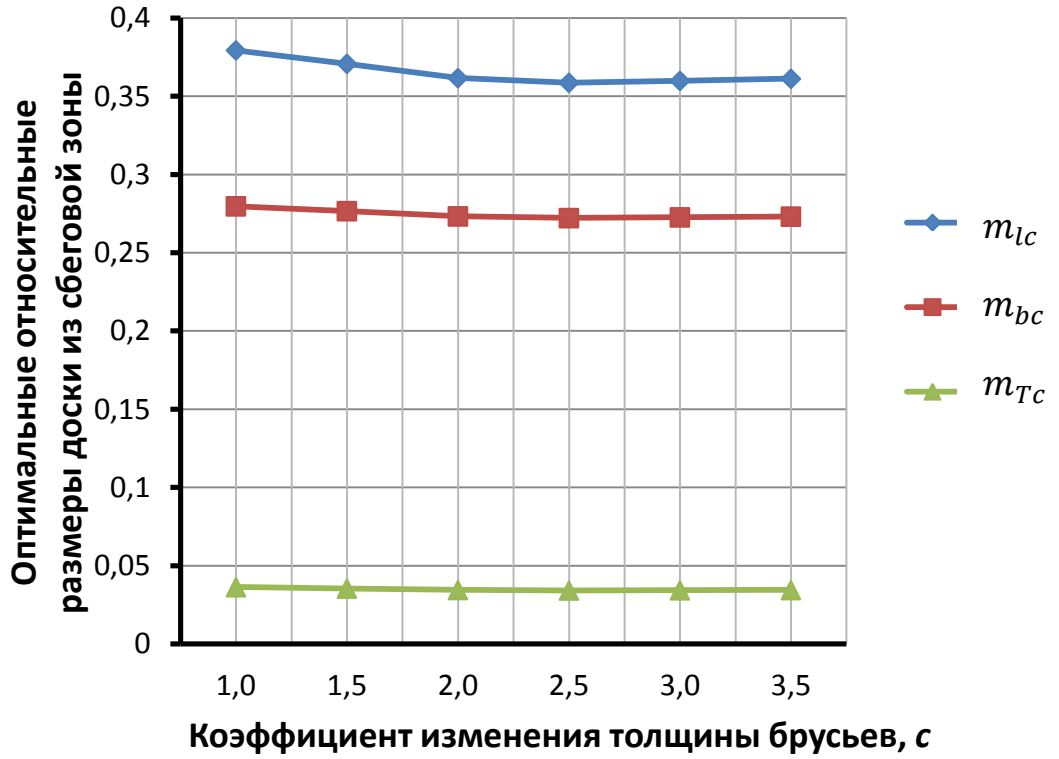


Рис. 3.58. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc} при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая графики на рис. 3.53 и 3.58, следует обратить внимание, что оптимальные относительные размеры досок, получаемые из сбеговой зоны, отличаются между собой. Оптимальная относительная ширина доски в сбеговой зоне при длине пиловочника l = 3,0 м равна m_{bc} = 0,18, тогда как оптимальная относительная ширина этой доски при l = 6,0 м равна m_{bc} = 0,28.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются, причем уменьшения оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок на участке изменения коэффициента изменения толщины брусьев c = 3,0…3,5 практически не происходит (см. рис. 3.59).

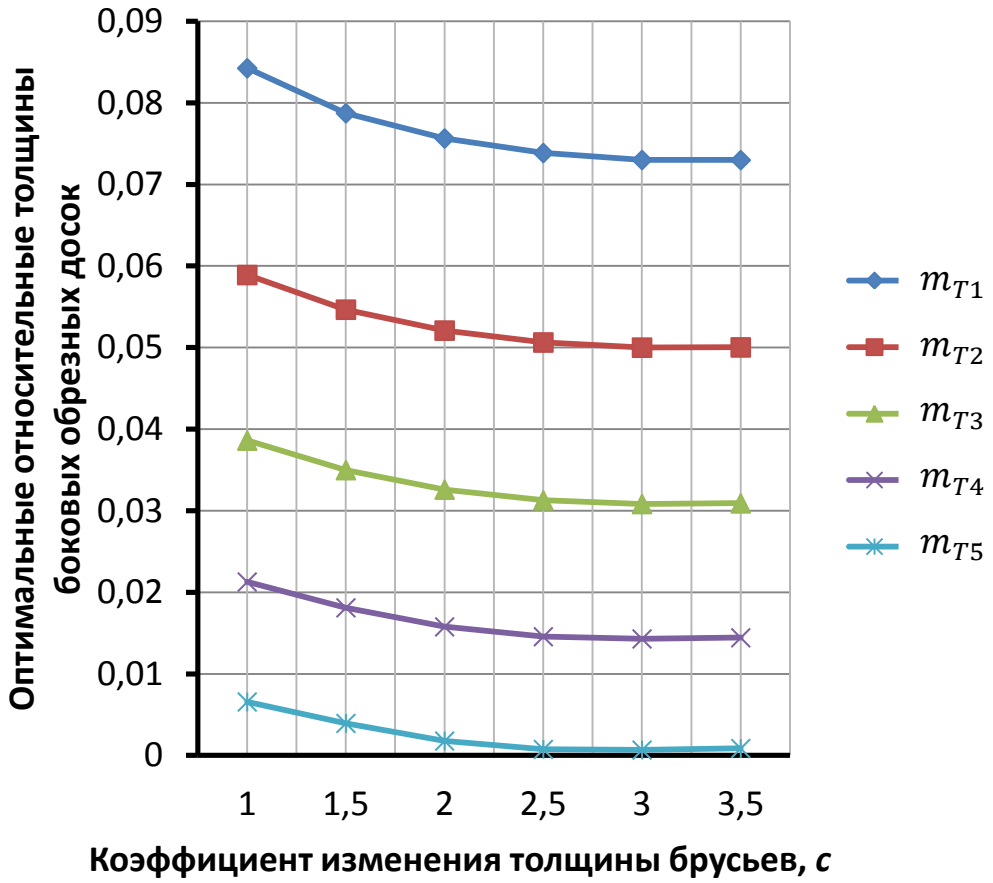


Рис. 3.59. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются до коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5, а затем практически не изменяются (см. рис. 3.60). Такая закономерность практически совпадает с результатом, представленным на рис. 3.55 для длины пиловочника l = 3,0 м.

Сравнивая между собой результаты на рис. 3.55 и 3.60, можно отметить, что их отличие не очень значительное, особенно в диапазоне изменения толщин брусьев c = 2,5…3,5.

С увеличением длины пиловочника оптимальная относительная толщина брусьев и размер пифагорической зоны изменяются (уменьшаются) незначительно (рис. 3.61 и 3.62). На рис. 3.61 представлены результаты при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0.

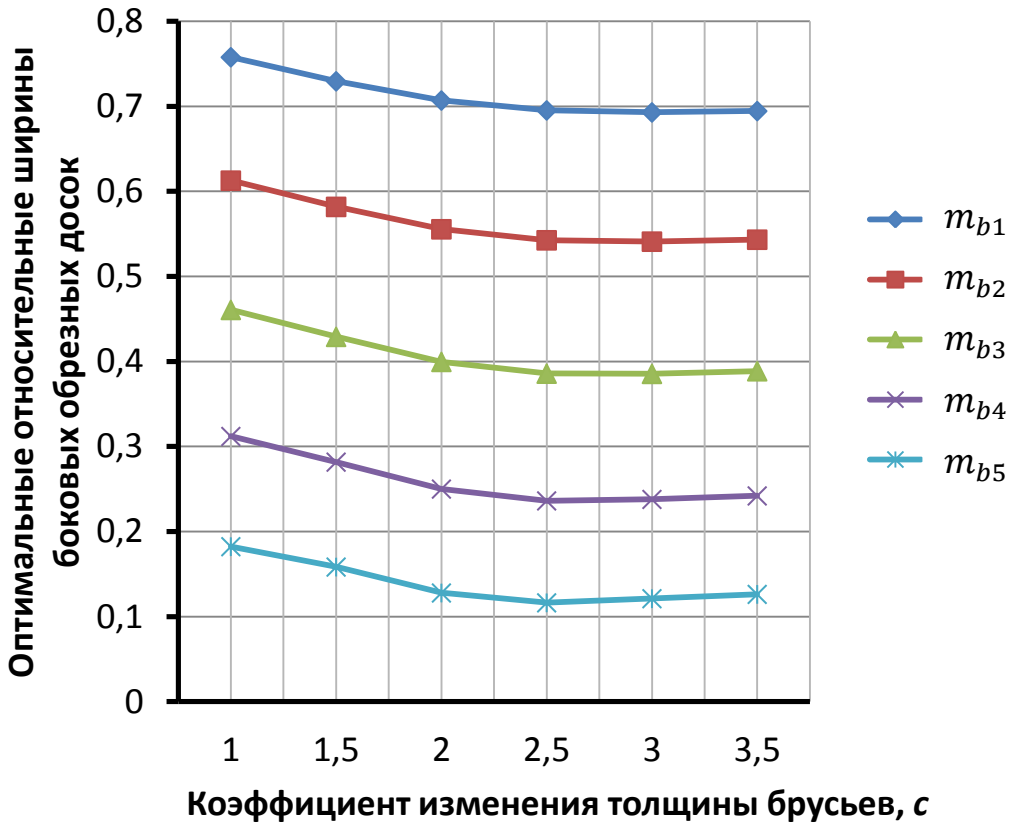


Рис. 3.60. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c
на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 6,0 м

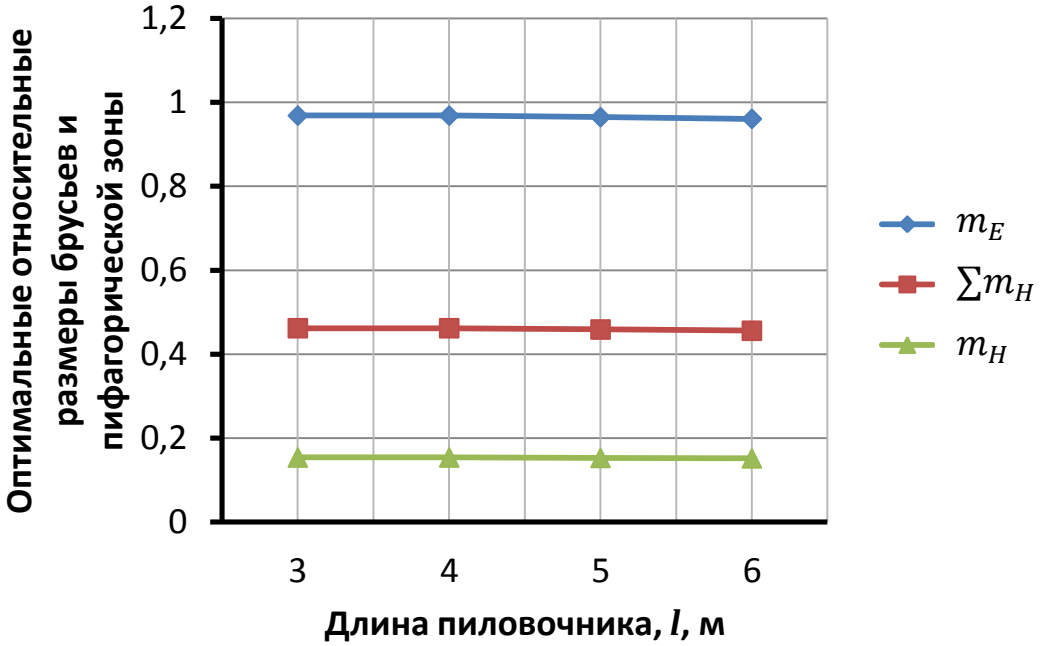


Рис. 3.61. Влияние длины пиловочника l
на оптимальные относительные $m_E, \sum m_H, m_H$
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

Необходимо обратить внимание, что отличие двух вариантов (c = 3,0 и c = 1,0) заключается в том, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 больше единицы. Это значит, что использование пиловочника происходит в большей мере. Однако это оказывает существенное влияние на размеры боковых обрезных досок, особенно на размеры крайних боковых досок.

На рис. 3.62 представлены результаты расчетов при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0. При этом следует отметить, что соотношения $\sum m_H$ и m_H отличаются между собой. При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальная относительная сумма толщин всех трех брусьев также больше, чем при коэффициенте c = 1,0. В итоге пифагорическая зона при коэффициенте изменения c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0 [75].

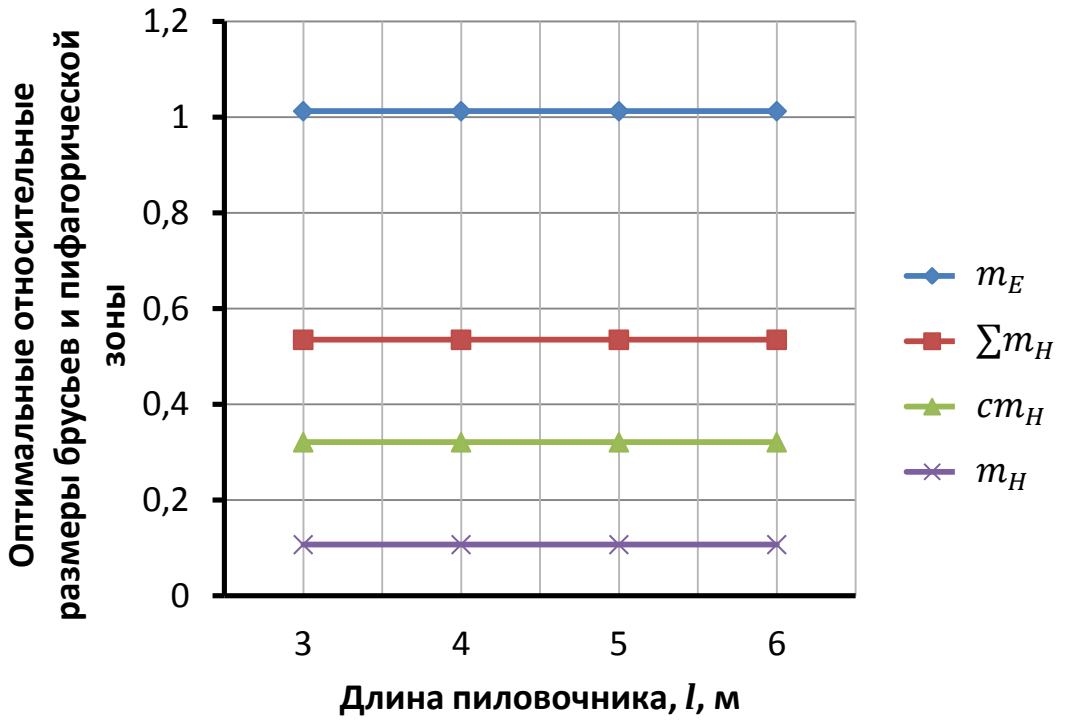


Рис. 3.62. Влияние длины пиловочника l
на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H, m_H$
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

Следует также отметить, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 оптимальная относительная толщина бокового бруса меньше, чем при коэффициенте c = 1,0. Длина пиловочника на размеры брусьев и боковых обрезных досок в пифагорической зоне не оказывает значительного влияния.

С увеличением длины пиловочника оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, возрастает. Оптимальный относительный объем досок, получаемых из пифагорической зоны, с увеличением длины пиловочника незначительно увеличивается, а оптимальный относительный объем брусьев незначительно уменьшается. При этом суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, увеличивается (рис. 3.63). Эти результаты представлены для относительной ширины пропила m_e = 0,01 и коэффициента изменения толщины брусьев c = 1,0. Уменьшение оптимального относительного объема пиломатериалов m_V с увеличением длины пиловочника объясняется тем, что при увеличении длины пиловочника возрастает сбеговая зона и объем бревна возрастает в большей степени, чем рост пиломатериалов из сбеговой зоны m_{Vc}.

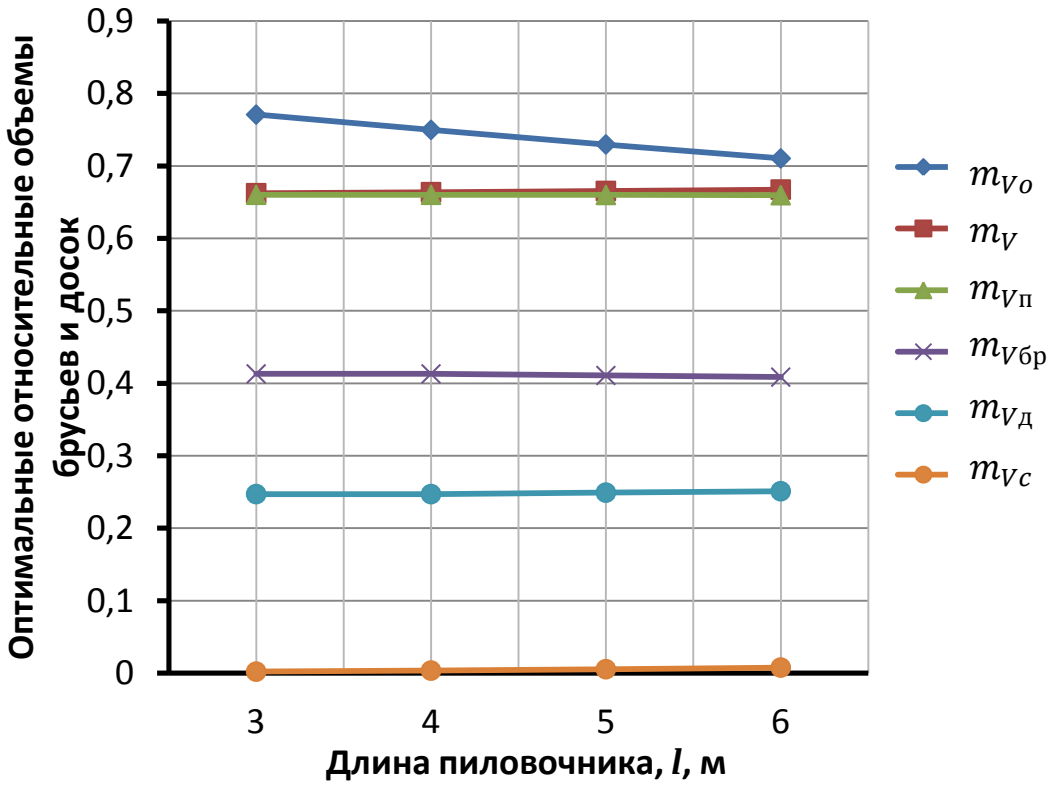


Рис. 3.63. Влияние длины бревна l
на оптимальные относительные объемы m_{Vo}, m_V, $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$, m_{Vc}
при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 изменение оптимальных относительных объемов получаемых пиломатериалов представлено на рис. 3.64. Закономерности изменения этих показателей примерно одинаковы, как и на рис. 3.63, но их соотношения несколько другие. Так, на рис. 3.64 при коэффициенте изменения

толщины брусьев c = 3,0 суммарный оптимальный относительный выход пиломатериала m_V больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Следует также отметить, что общий относительный выход пиломатериалов из пифагорической зоны $m_{V\text{п}}$ при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Это очень важная закономерность. В то же время оптимальный относительный объем боковых обрезных досок при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 больше, чем при коэффициенте c = 3,0. Общий оптимальный относительный выход пиломатериалов при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 немного больше по сравнению с вариантом, когда коэффициент c = 1,0.

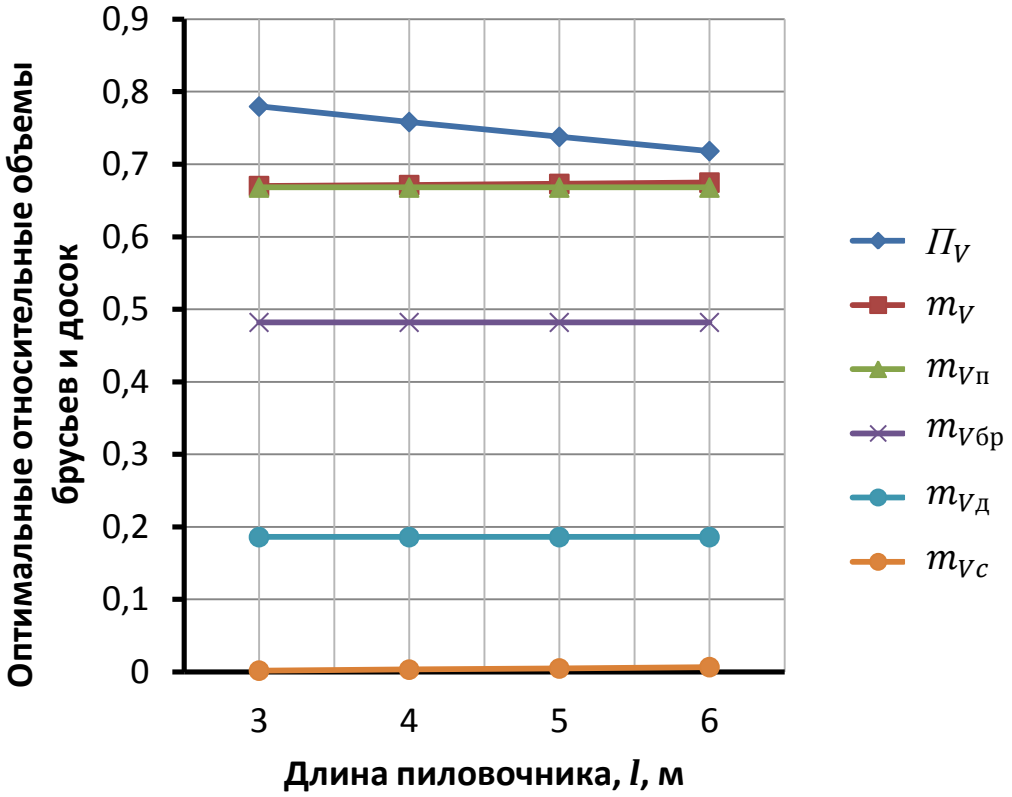


Рис. 3.64. Влияние длины бревна l
на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc}
и выход пиломатериалов $П_V$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01
и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0

С увеличением длины бревна оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастает, ее оптимальная относительная ширина и длина также увеличиваются (см. рис. 3.65). Эти результаты получены при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0. Это объясняется тем,

что с увеличением длины пиловочника сбеговая зона существенно возрастает, и поэтому оптимальные относительные размеры доски (длина, ширина и толщина), получаемые из сбеговой зоны, увеличиваются.

Если рассматривать эти результаты путем сравнения размеров доски, получаемой из сбеговой зоны, с вариантом при длине бревна l = 3,0 м, необходимо отметить, что в наибольшей степени изменятся толщина и ширина доски, получаемой из сбеговой зоны.

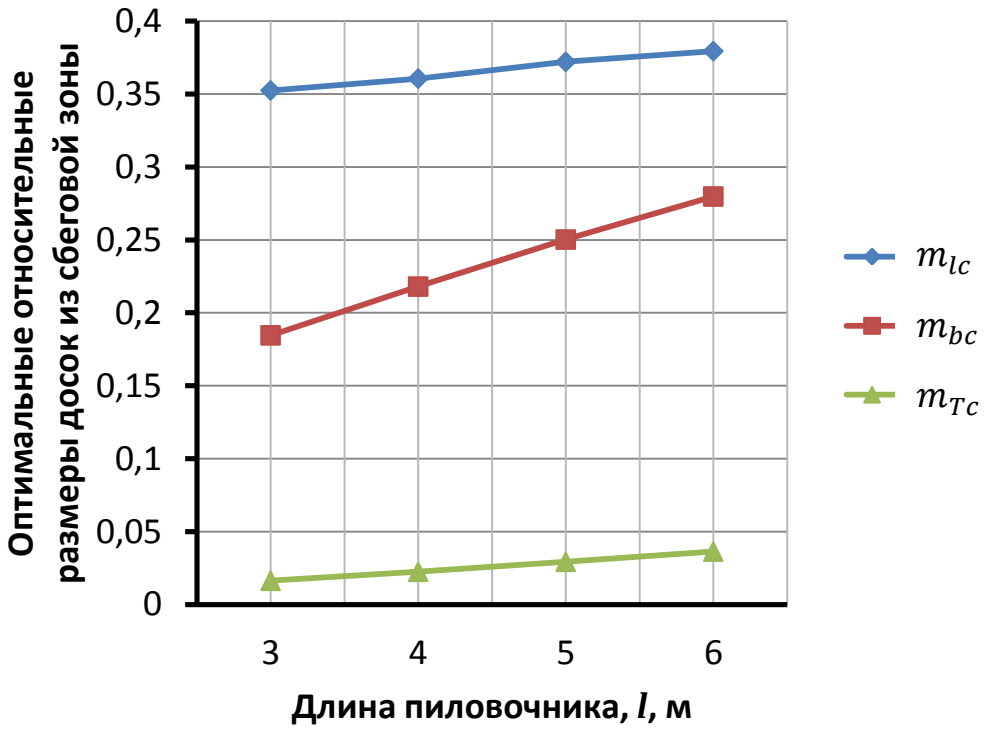


Рис. 3.65. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}, получаемой из сбеговой зоны при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальная относительная длина доски, получаемой из сбеговой зоны, немного увеличивается (см. рис. 3.66). При этом оптимальная относительная толщина и оптимальная относительная ширина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастают. Следует отметить, что при коэффициенте c = 3,0 относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, несколько меньше, чем при коэффициенте c = 1,0. Это объясняется тем, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 немного больше, чем при коэффициенте c = 1,0 [75].

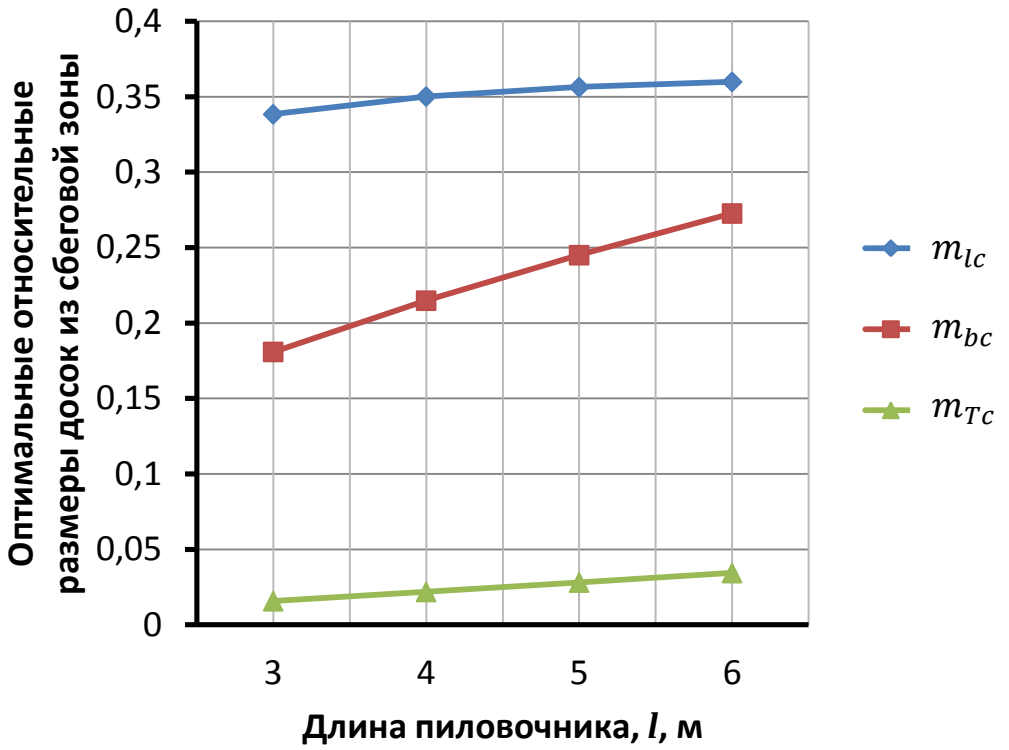


Рис. 3.66. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

Необходимо отметить, что оптимальные относительные размеры доски (толщина и ширина), получаемой из сбеговой зоны, с увеличением длины пиловочника возрастают в наибольшей степени, чем оптимальная относительная длина этой доски.

Сравнивая между собой рис. 3.65 и 3.66, можно отметить, что результаты между собой отличаются незначительно. Это объясняется тем, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 немного отличается от варианта, когда коэффициент изменения толщины брусьев c = 3,0.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 3.67).

Расчеты показали, что с увеличением длины пиловочника наблюдается незначительный рост оптимальных относительных толщин у двух крайних пар боковых обрезных досок, а у двух центральных пар, наоборот, происходит незначительное уменьшение оптимальных относительных толщин этих досок.

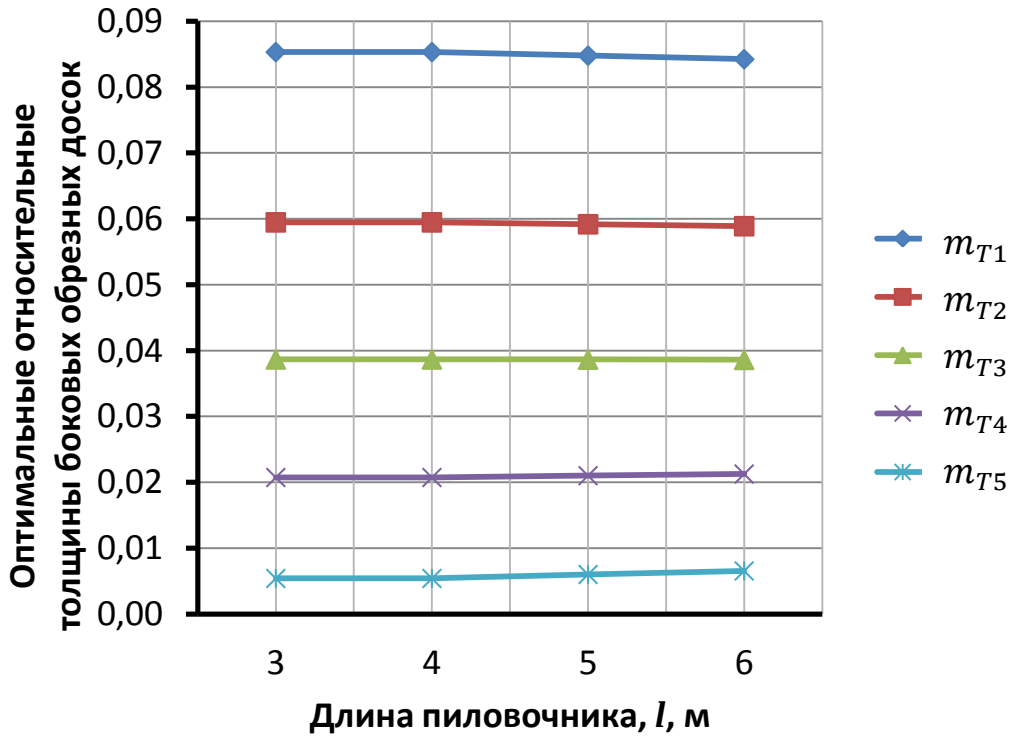


Рис. 3.67. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок увеличиваются (см. рис. 3.68). Оптимальная относительная ширина четырех крайних боковых обрезных досок начинает интенсивно возрастать при длине пиловочника l = 4,0 м и более практически прямо пропорционально. При этом интенсивность увеличения оптимальной относительной ширины боковой обрезной доски снижается от крайней боковой обрезной доски к центру пиловочника. Следовательно, увеличение длины пиловочника при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 в наибольшей степени влияет на оптимальные относительные ширины крайних боковых обрезных досок, и по мере приближения к центру пиловочника это влияние замедляется [75].

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 3.69).

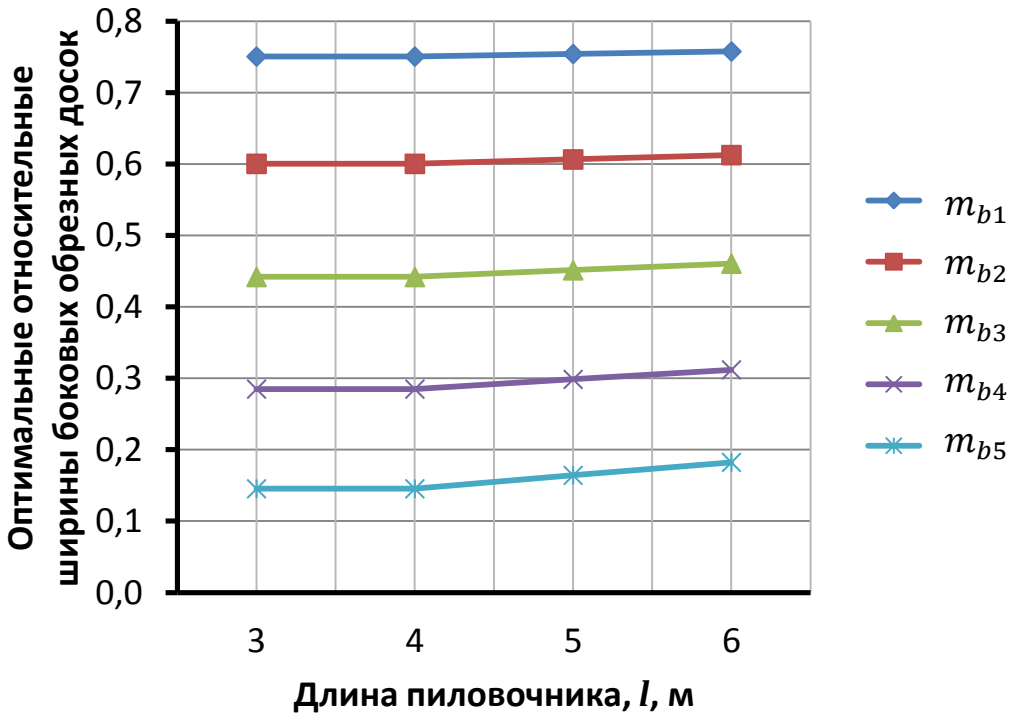


Рис. 3.68. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 1,0

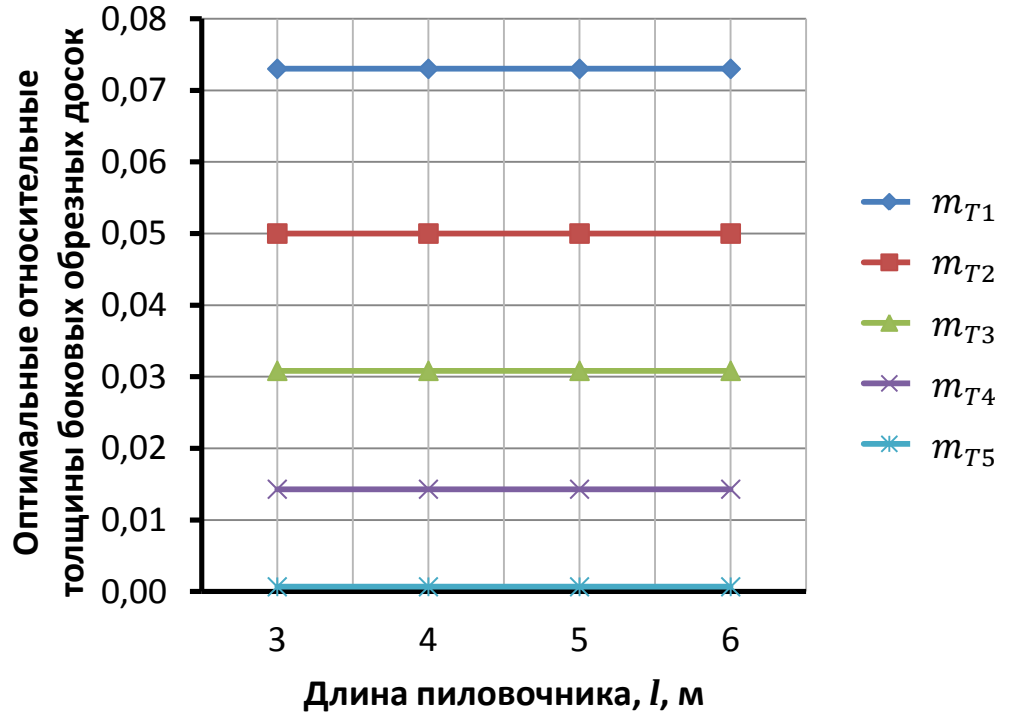


Рис. 3.69. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 оптимальную относительную толщину крайней (пятой) пары боковых обрезных

досок практически можно принять равной нулю. Это объясняется тем, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 относительная доля брусьев в пиловочнике возрастает, а относительная доля боковых обрезных досок уменьшается. Поэтому получается, что пятую (последнюю) пару боковых обрезных досок выпиливать не целесообразно.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок практически мало изменяются (рис. 3.70).

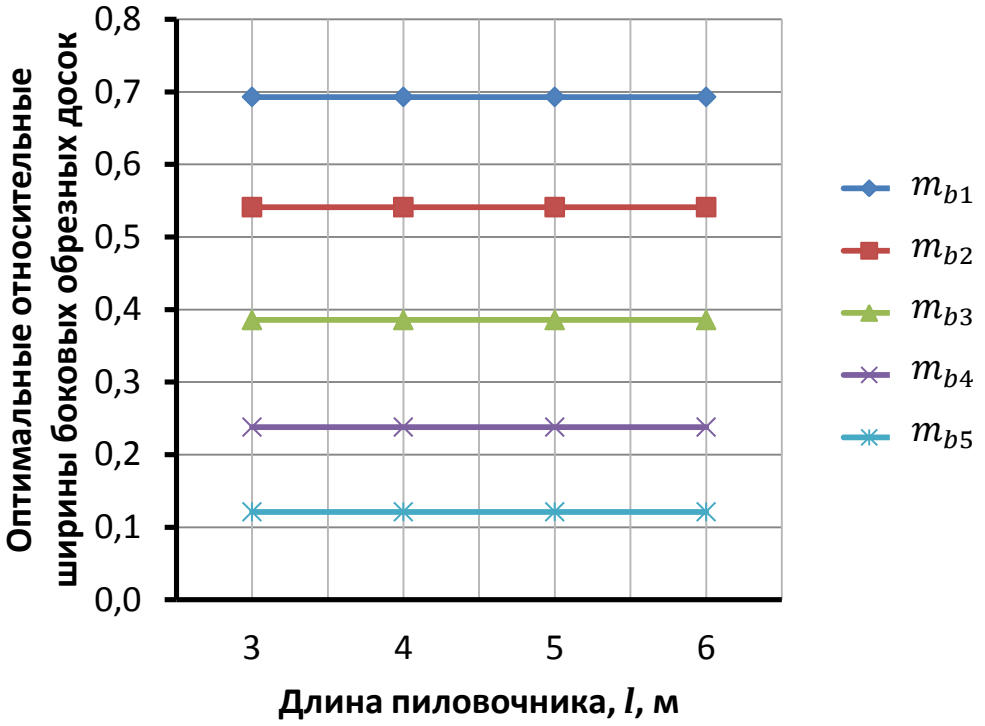


Рис. 3.70. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при m_e = 0,01 и коэффициенте c = 3,0

Необходимо отметить, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 оптимальная относительная ширина пятой (крайней) пары боковых обрезных досок получается небольшой величины и составляет $m_{b5} = 0{,}12 \ldots 0{,}13$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае ширина этой боковой обрезной доски не получается стандартных размеров. Сравнивая между собой рис. 3.67 и 3.69, необходимо отметить, что относительные размеры толщин боковых обрезных досок при c = 1,0 немного больше, чем при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0. Это объясняется тем, что доля брусьев в пифагорической зоне при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Сравнивая между собой рис. 3.68 и 3.70,

необходимо обратить внимание, что оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при c = 1,0 по величине немного больше, чем при c = 3,0, хотя изменения этих размеров незначительны. Это связано с тем, что суммарная толщина брусьев при c = 3,0 больше, чем при c = 1,0. Поэтому при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок немного меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Кроме того, с увеличением длины пиловочника при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 наблюдается небольшой рост оптимальных относительных ширин у трех периферийных боковых обрезных досок, начиная с длины пиловочника l = 4,0 м. Такая закономерность не наблюдается при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 (см. рис. 3.70).

Основные выводы по главе

1. При раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием из пифагорической зоны трех брусьев одинаковой толщины [58] и пяти пар боковых обрезных досок [91] оказалось, что оптимальная относительная толщина бруса равна 0,126, при которой целевая функция принимает максимальное значение. В этом случае сумма толщин всех трех брусьев составляет 0,378 от диаметра пиловочника в вершинном торце [58]. Пифагорическая зона в этом случае равна 0,964 от диаметра бревна в вершинном торце. Оказалось, что при выпиливании трех брусьев одинаковой толщины и пяти пар боковых обрезных досок имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором площадь поперечного сечения этих брусьев и досок принимает максимальное значение [81]. Следовательно, принятая гипотеза при составлении целевой функции подтверждается.

2. С увеличением ширины пропила оптимальная относительная толщина бруса незначительно возрастает. В связи с этим площадь поперечного сечения брусьев также возрастает, а площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается [54]. В итоге суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок с увеличением ширины пропила уменьшается. Таким образом, установлена интересная зависимость, что с увеличением ширины пропила оптимальная толщина брусьев возрастает, а оптимальная толщина боковых обрезных досок уменьшается.

3. При раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины выход обрезных пиломатериалов вначале, с увеличением коэффициента изменения толщины бруса, возрастает, а затем уменьшает-

ся [43]. Максимальное значение целевая функция принимает при условии, когда толщина центрального бруса больше толщины бокового бруса в 3 раза. В этом случае относительная толщина бокового бруса равна 0,093 от диаметра пиловочника в вершинном торце, а относительная толщина центрального бруса равна 0,279 от этого диаметра пиловочника. Суммарная толщина всех брусьев составляет 0,455 от диаметра пиловочника в вершинном торце [48]. Пифагорическая зона в этом случае равна 0,98 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При изменении коэффициента c в пределах 2,0…3,5 целевая функция изменяется незначительно.

4. При увеличении коэффициента изменения толщины бруса площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. Но в итоге имеется такое сочетание соотношения размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором получается максимальная сумма поперечных сечений получаемых пиломатериалов (брусьев и досок). Для каждого значения коэффициента изменения толщины брусьев имеется оптимальный вариант сочетания размеров брусьев и боковых досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение. В результате расчетов определено глобальное оптимальное значение коэффициента изменения толщины брусьев, при котором целевая функция принимает максимальное значение из максимальных вариантов. Таким образом, подтверждается гипотеза о том, что, возможно, для каждого значения коэффициента изменения толщины бруса имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором получается максимальный выход пиломатериалов.

5. С увеличением ширины пропила для различных коэффициентов изменения толщин брусьев c относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. В итоге суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок все-таки уменьшается. Следовательно, с увеличением ширины пропила размеры брусьев возрастают, а размеры боковых обрезных досок уменьшаются при любом значении коэффициента c [43]. При этом оптимальное соотношение толщины центрального бруса $H_{\text{ц}}$ к толщине бокового бруса $H_{\text{б}}$ сохраняется прежним, т. е. c = 3,0. Такая важная закономерность должна также учитываться при расчете и составлении поставов.

6. При последующей распиловке брусьев на обрезные доски образуются потери древесины в виде опилок. В этом случае оптималь-

ное (глобальное) соотношение толщин центрального бруса к боковому сохраняется и принимает величину равную c = 3,0. Это объясняется тем, что с уменьшением толщины центрального бруса потери древесины в опилки при его раскрое на обрезные доски снижаются в большей мере. С увеличением коэффициента c площадь поперечного сечения центрального бруса возрастает, а площадь поперечного сечения бокового бруса уменьшается, но суммарная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает, а затем уменьшается. При этом площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. В итоге максимальное значение (глобальный оптимум) целевая функция принимает при c = 3,0.

7. При раскрое пиловочника длиной 6 м с учетом сбеговой зоны оказалось, что выход обрезных пиломатериалов повышается всего лишь примерно на 2,0%. При этом их длина составляет примерно 0,38 от длины бревна, а относительная толщина сбеговой доски составляет 0,036 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При длине бревна l = 3,0 м относительный выход пиломатериалов получается немного больше, чем при длине бревна l = 6,0 м [92]. При этом относительная оптимальная толщина сбеговой доски составляет 0,016, а оптимальная относительная ширина этой доски составляет 0,18 от диаметра пиловочника в вершинном торце.

8. Таким образом, разработаны алгоритмы решения задач оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров брусово-развальным способом с выпиливанием трех брусов и пяти пар боковых обрезных досок. Установлена сложная взаимосвязь влияния различных факторов на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и пяти пар боковых обрезных досок.

4. РАСКРОЙ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ И ШЕСТИ ПАР БОКОВЫХ ОБРЕЗНЫХ ДОСОК

4.1. Общая постановка и математическая модель задачи оптимизации

Постановка задачи. При раскрое пиловочника очень крупных размеров (80 см и более) необходимо рассмотреть вопрос о целесообразности использования такой схемы распиловки, в которой получают три одинаковых по толщине бруса и шесть пар боковых обрезных досок (рис. 4.1) [44].

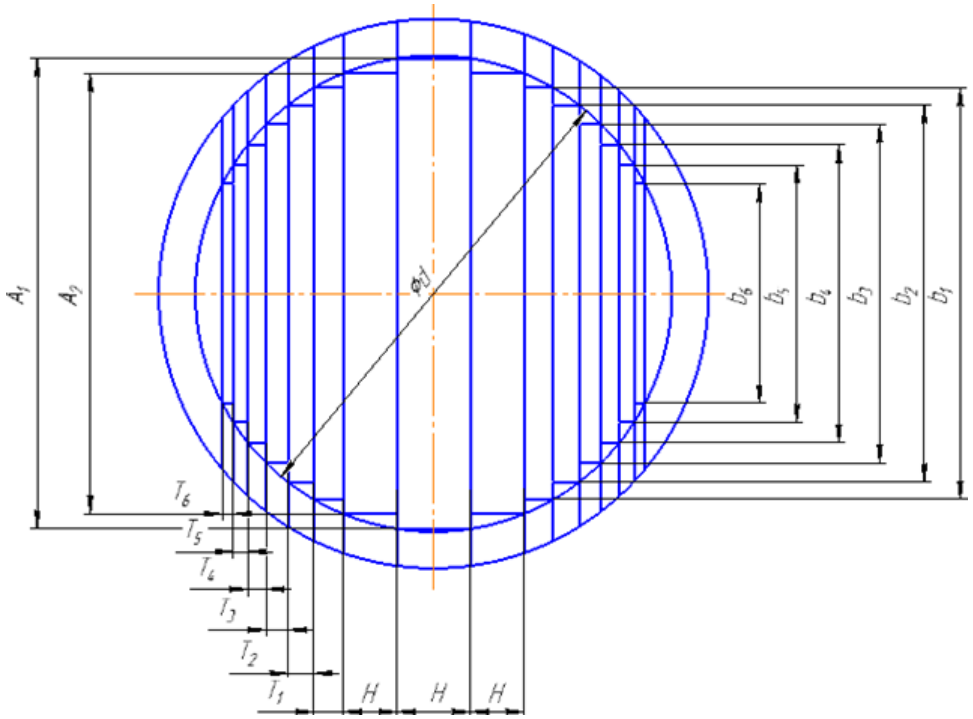


Рис. 4.1. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и шести пар боковых обрезных досок

Составление математической модели. Для ответа на поставленный вопрос вначале рассматриваем задачу определения оптимальных размеров брусьев и досок без учета ширины пропила [82]. Для этого составляем математическую модель. В качестве критерия оптимальности выбираем выход обрезных пиломатериалов после первого прохода раскроя пиловочника брусово-развальным способом [44]. Целевую функцию можно представить в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, так как в задаче рассматривается пифагорическая зона пиловочника [47]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + 2T_6b_6. \quad (4.1)$$

Написание целевой функции в таком варианте основано на предположении, что с увеличением размеров и, следовательно, площади поперечного сечения брусьев размеры и площади поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшаются, и наоборот [82]. Следовательно, можно предположить, что имеется такое соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение [97].

Для составления уравнения связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и досок можно представить следующими уравнениями связи [47].

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (4.2)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - 9H^2 - A_2^2 = 0. \quad (4.3)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1)^2 - b_1^2 = 0. \quad (4.4)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2)^2 - b_2^2 = 0. \quad (4.5)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 - b_3^2 = 0. \quad (4.6)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 - b_4^2 = 0. \quad (4.7)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)^2 - b_5^2 = 0. \quad (4.8)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 2T_6)^2 - b_6^2 = 0. \quad (4.9)$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующее.

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 12HT_1 = 0. \quad (4.10)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \quad (4.11)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - \\ -12HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0. \quad (4.12)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\ -8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_3T_4 = 0. \quad (4.13)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - \\ -12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - \\ -8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_4T_5 = 0. \quad (4.14)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_6^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - 4T_6^2 - 12HT_1 - \\ 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - 12HT_6 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\ 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 8T_3T_4 - \\ 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - 8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 8T_5T_6 = 0. \quad (4.15)$$

Полагаем, что математическая модель данной задачи оптимизации составлена.

Решение математической модели. Анализируя математическую модель, следует отметить, что неизвестных факторов (размеров брусьев и боковых обрезных досок) в количестве 15 параметров, а уравнений связи всего лишь 8 штук. Классическим методом такую задачу оптимизации решить невозможно.

В этом случае, с целью обеспечения возможности решения данной задачи оптимизации, можно добавить (сформулировать) новые условия – требования, которые записываются дополнительными уравнениями связи. В данных задачах оптимизации раскроя пиловочника, например, можно рекомендовать для сокращения некоторых неизвестных факторов сформулировать и выбрать следующие требования.

1. Отношение ширины доски к ее толщине (x) или наоборот. Если принять $b=xT$ тогда в задаче оптимизации вместо ширины доски записывают xT. В этом случае неизвестных факторов можно сократить на количество выпиливаемых боковых обрезных досок.

2. Соотношение толщин соседних боковых обрезных досок (y) можно задать постоянным числом. Тогда можно написать $T_1 = yT_2$, $T_2 = yT_3$, $T_3 = yT_4$, $T_4 = yT_5$, $T_5 = yT_6$. Задаваясь минимальной толщиной крайней боковой обрезной доски, можно написать $T1 = y^5T_6$, $T_2 = y^4T_6$, $T_3 = y^3T_6$, $T_4 = y^2T_6$, $T_5 = yT_6$.

В этом случае число неизвестных факторов также существенно сократиться. В итоге получиться другая оптимизационная задача. Такую задачу можно решить классическим методом. Конечно, прежде всего целесообразно задачу оптимизации раскроя пиловочника составленную в общем виде, решить классическим методом.

В связи с этим используем метод множителей Лагранжа, который позволяет увеличить количество уравнений связи и тем самым получить возможность решения данной задачи оптимизации [47]. Функция Лагранжа будет иметь вид:

$$\begin{gathered}
L = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + \\
+2T_4b_4 + 2T_5b_5 + 2T_6b_6 + \\
+\lambda_1(d^2 - H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - H^2 - A_2^2) + \\
+\lambda_3(d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 12HT_1 - 4T_1^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - \\
-9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 8T_1T_2) + \\
+\lambda_5(d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 12HT_1 + \\
-12HT_2 - 12HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - \\
-9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - \\
-12HT_4 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\
-8T_3T_4) + \lambda_7(d^2 - b_5^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - \\
-4T_5^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - 8T_1T_2 - \\
-8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\
-8T_2T_5 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_4T_5) + \lambda_8(d^2 - b_6^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - \\
4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - 4T_6^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - \\
12HT_4 - 12HT_5 - 12HT_6 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - \\
8T_1T_6 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - \\
8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 8T_5T_6).
\end{gathered} \tag{4.16}$$

Для отыскания экстремума находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial L}{\partial A_1} = H - 2\lambda_1 A_1 = 0, \frac{\partial L}{\partial A_2} = 2H - 2\lambda_2 A_2 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial H} = A_1 + 2A_2 - 2\lambda_1 H - 18\lambda_2 H - 18\lambda_3 H - 12\lambda_3 T_1 - \\
-18\lambda_4 H - 12\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 T_2 - \\
-18\lambda_5 H - 12\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 T_3 - 18\lambda_6 H - \\
-12\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 T_4 - 18\lambda_7 H - \\
-12\lambda_7 T_1 - 12\lambda_7 T_2 - 12\lambda_7 T_3 - 12\lambda_7 T_4 - 12\lambda_7 T_5 - 18\lambda_8 H - 12\lambda_8 T_1 - \\
-12\lambda_8 T_2 - 12\lambda_8 T_3 - 12\lambda_8 T_4 - 12\lambda_8 T_5 - 12\lambda_8 T_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial b_1} = 2T_1 - 2\lambda_3 b_1 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial T_1} = 2b_1 - 12\lambda_3 H - 8\lambda_3 T_1 - 8\lambda_4 T_1 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_2 - \\
-8\lambda_5 T_1 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_5 T_3 - \\
-8\lambda_6 T_1 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - \\
-8\lambda_7 T_1 - 12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 - \\
-8\lambda_8 T_1 - 12\lambda_8 H - 8\lambda_8 T_2 - 8\lambda_8 T_3 - 8\lambda_8 T_4 - 8\lambda_8 T_5 - 8\lambda_8 T_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial b_2} = 2T_2 - 2\lambda_4 b_2 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial T_2} = 2b_2 - 8\lambda_4 T_2 - 12\lambda_4 H - 8\lambda_4 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - \\
-8\lambda_5 T_3 - 8\lambda_6 T_2 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_6 T_4 - \\
-8\lambda_7 T_1 - 12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 - \\
-8\lambda_8 T_1 - 12\lambda_8 H - 8\lambda_8 T_2 - 8\lambda_8 T_3 - 8\lambda_8 T_4 - 8\lambda_8 T_5 - 8\lambda_8 T_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial b_3} = 2T_3 - 2\lambda_5 b_3 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial T_3} = 2b_3 - 8\lambda_5 T_3 - 12\lambda_5 H - 8\lambda_5 T_1 - 8\lambda_5 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 12\lambda_6 H - \\
-8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_4 - 8\lambda_7 T_3 - 12\lambda_7 \mathrm{H} - \\
-8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 - \\
-12\lambda_8 \mathrm{H} - 8\lambda_8 T_1 - 8\lambda_8 T_2 - 8\lambda_8 T_3 - 8\lambda_8 T_4 - 8\lambda_8 T_5 - 8\lambda_8 T_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial b_4} = 2T_4 - 2\lambda_6 b_4 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial T_4} = 2b_4 - 8\lambda_6 T_4 - 12\lambda_6 H - 8\lambda_6 T_1 - 8\lambda_6 T_2 - 8\lambda_6 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - \\
-12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_5 - \\
-12\lambda_8 \mathrm{H} - 8\lambda_8 T_1 - 8\lambda_8 T_2 - 8\lambda_8 T_3 - 8\lambda_8 T_4 - 8\lambda_8 T_5 - 8\lambda_8 T_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial b_5} = 2T_5 - 2\lambda_7 b_5 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial T_5} = 2b_5 - 12\lambda_7 H - 8\lambda_7 T_1 - 8\lambda_7 T_2 - 8\lambda_7 T_3 - 8\lambda_7 T_4 - 8\lambda_7 T_5 - \\
-12\lambda_8 \mathrm{H} - 8\lambda_8 T_1 - 8\lambda_8 T_2 - 8\lambda_8 T_3 - 8\lambda_8 T_4 - 8\lambda_8 T_5 - 8\lambda_8 T_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial b_6} = 2T_6 - 2\lambda_8 b_6 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial T_6} = 2b_6 - 12\lambda_8 \mathrm{H} - 8\lambda_8 T_1 - 8\lambda_8 T_2 - 8\lambda_8 T_3 - 8\lambda_8 T_4 - 8\lambda_8 T_5 - 8\lambda_8 T_6 = 0.
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

Решаем полученную систему уравнений (4.17) совместно с уравнениями связи.

Рассматриваем предпоследнее уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_8:

$$T_6 = \lambda_8 b_6, \qquad \lambda_8 = \frac{T_6}{b_6}. \tag{4.18}$$

Рассматриваем последнее уравнение системы (4.17), которое представляем в следующем виде:

$$b_6 = 6\lambda_8 H + 4\lambda_8 T_1 + 4\lambda_8 T_2 + 4\lambda_8 T_3 + 4\lambda_8 T_4 + 4\lambda_8 T_5 + 4\lambda_8 T_6. \tag{4.19}$$

В равенство (4.19) подставляем выражение (4.18), получим:

$$b_6^2 = 6HT_6 + 4T_1T_6 + 4T_2T_6 + 4T_3T_6 + 4T_4T_6 + 4T_5T_6 + 4T_6^2. \tag{4.20}$$

В равенство (4.22) подставляем уравнение связи (4.9), получим:

$$\begin{gathered} 8T_6^2 + 6T_6(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5) + \\ +(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)^2 - \frac{d^2}{8} = 0. \end{gathered} \tag{4.21}$$

Решая это квадратное уравнение (4.21), получим:

$$\begin{aligned} T_6 = \frac{1}{8}(&\sqrt{d^2+(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)^2} - \\ &-3(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Рассматриваем двенадцатое уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_5 = \lambda_7 b_5, \qquad \lambda_7 = \frac{T_5}{b_5}. \tag{4.23}$$

Рассматриваем тринадцатое уравнение системы (4.17), которое представляем в следующем виде:

$$b_5 = 6\lambda_7 H + 4\lambda_7 T_1 + 4\lambda_7 T_2 + 4\lambda_7 T_3 + 4\lambda_7 T_4 + 4\lambda_7 T_5 + b_6. \tag{4.24}$$

В равенство (4.24) подставим выражение (4.23), получим:

$$b_5^2 = 6HT_5 + 4T_1\,T_5 + 4T_2\,T_5 + 4T_3\,T_5 + 4T_4\,T_5 + 4T_5^2 + b_5b_6. \tag{4.25}$$

Из последнего равенства (4.25) можно определить ширину шестой пары боковой обрезной доски:

$$b_6 = b_5 - \frac{2T_5}{b_5}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5). \tag{4.25'}$$

Рассматриваем десятое уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_6:

$$T_4 = \lambda_6 b_4, \qquad \lambda_6 = \frac{T_4}{b_4}. \tag{4.26}$$

Рассматриваем одиннадцатое уравнение системы (4.17), которое представляем в следующем виде:

$$b_4 = 6\lambda_6 H + 4\lambda_6 T_1 + 4\lambda_6 T_2 + 4\lambda_6 T_3 + 4\lambda_6 T_4 + b_5. \tag{4.27}$$

В равенство (4.27) подставим выражение (4.26), получим:

$$b_4^2 = 6HT_4 + 4T_1\ T_4 + 4T_2\ T_4 + 4T_3\ T_4 + 4T_4^2 + b_4 b_5. \tag{4.28}$$

Из последнего равенства (4.28) можно определить ширину пятой пары боковых обрезных досок:

$$b_5 = b_4 - \frac{2T_4}{b_4}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4). \tag{4.29}$$

Рассматриваем восьмое уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_5:

$$T_3 = \lambda_5\, b_3\ , \qquad \lambda_5 = \frac{T_3}{b_3}. \tag{4.30}$$

Рассматриваем девятое уравнение системы (4.17), которое можно представить в виде

$$b_3 = 4\lambda_5\, T_3 + 6\lambda_5\, H + 4\lambda_5\, T_1 + 4\lambda_5\, T_2 + b_4\ . \tag{4.31}$$

В равенство (4.31) подставляем выражение (4.30), получим:

$$b_3^2 = 4T_3^2 + 6HT_3 + 4T_1\ T_3 + 4T_2\ T_3 + b_3\ b_4\ . \tag{4.32}$$

Из последнего равенства можно определить ширину четвертой пары боковых обрезных досок по формуле:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3}{b_3}(3H + 2T_3 + 2T_1 + 2T_2). \tag{4.33}$$

Рассматриваем шестое уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_4:

$$T_2 = \lambda_4\, b_2\ , \qquad \lambda_4 = \frac{T_2}{b_2}. \tag{4.34}$$

Рассматриваем седьмое уравнение системы (4.17), которое представляем в следующем виде:

$$b_2 \;=\; 4\lambda_4\, T_1 \;+ 4\lambda_4\, T_2 \;+ 6\lambda_4\, H + b_3\;, \qquad (4.35)$$

В последнее равенство (4.35) подставим выражение (4.34), получим:

$$b_2^2 \;=\; 4T_1\; T_2 \;+ 4T_2^2 + 6HT_2 \;+ b_2\; b_3\;. \qquad (4.36)$$

Из равенства (4.36) можно выразить ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 \;=\; b_2 \;- \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2). \qquad (4.37)$$

Рассматриваем четвертое уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_3:

$$T_1 \;=\; \lambda_3\, b_1\;, \qquad\qquad \lambda_3 \;=\; \frac{T_1}{b_1}. \qquad (4.38)$$

Рассматриваем пятое уравнение системы (4.17), которое представляем в следующем виде:

$$b_1 \;=\; 6\lambda_3\, H + 4\lambda_3\, T_1 \;+ b_2\;. \qquad (4.39)$$

В равенство (4.39) подставим выражение (4.38), получим:

$$b_1^2 \;=\; 6HT_1 \;+ 4T_1^2 + b_1\; b_2\;. \qquad (4.40)$$

Из равенства (4.40) можно определить ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 \;=\; b_1 \;- \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \qquad (4.41)$$

Рассматриваем первое уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_1:

$$H \;=\; 2\lambda_1\, A_1\;, \qquad\qquad \lambda_1 \;=\; \frac{H}{2A_1}. \qquad (4.42)$$

Рассматриваем второе уравнение системы (4.17), из которого определяем коэффициент Лагранжа λ_2:

$$H \;=\; \lambda_2\, A_2\;, \qquad\qquad \lambda_2 \;=\; \frac{H}{A_2}\;. \qquad (4.43)$$

Из уравнения связи (4.2) можно определить ширину пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (4.44)$$

Используя равенство (4.44), множитель Лагранжа λ_1 можно определить по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{H}{2\sqrt{d^2 - H^2}} . \quad (4.45)$$

Из уравнения связи (4.3) можно определить ширину наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (4.46)$$

Используя равенство (4.46), выражение (4.45) можно представить в следующем виде:

$$\lambda_2 = \frac{H}{\sqrt{H^2 - 9H^2}} . \quad (4.47)$$

Рассматриваем третье уравнение системы (4.17), которое представляем в следующем виде:

$$A_1 + 2A_2 = 2\lambda_1 H + 18\lambda_2 H + 3b_1 . \quad (4.48)$$

В последнее равенство (4.48) подставим выражения для множителей Лагранжа λ_1 *и* λ_2, получим:

$$A_1 + 2A_2 = \frac{H^2}{A_1} + 18\frac{H^2}{A_2} + 3b_1. \quad (4.49)$$

Из равенства (4.49) можно определить ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3}(\sqrt{d^2 - H^2} + 2\sqrt{d^2 - 9H^2} - (\frac{H^2}{\sqrt{d^2 - H^2}} + 18\frac{H^2}{\sqrt{d^2 - 9H^2}})). \quad (4.50)$$

Определив ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок, толщину первой пары боковых обрезных досок можно определить из уравнения связи (4.4) по формуле:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \quad (4.51)$$

Зная ширину боковой обрезной доски, её толщину можно определить из уравнения связи по следующим формулам.

Толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \quad (4.52)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (4.53)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (4.54)$$

Толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$T_5 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \quad (4.55)$$

Толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$T_6 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)). \quad (4.56)$$

Таким образом, рассмотрены все уравнения системы (4.17) и учтены все уравнения связи. Получены формулы, в которых размеры брусьев и досок взаимосвязаны. Определить по этим формулам непосредственно оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным. В связи с этим для реализации математической модели воспользуемся численным методом.

Алгоритм решения задачи. Размеры брусьев и досок можно определить по следующим формулам. Алгоритм решения задач оптимизации представляем начиная от центрального бруса.

Ширину пласти центрального бруса [58]:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - H^2}. \quad (4.57)$$

Ширину наружной пласти боковых брусьев [72]:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - 9H^2}. \quad (4.58)$$

Ширину первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{1}{3} \cdot (A_1 + 2A_2 - H^2(\frac{1}{A_1} + \frac{18}{A_2})). \quad (4.59)$$

Толщину первой пары боковых обрезных досок:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - 3H). \quad (4.60)$$

Ширину второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1}{b_1}(3H + 2T_1). \quad (4.61)$$

Толщину второй пары боковых обрезных досок:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (3H + 2T_1)). \quad (4.62)$$

Ширину третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2}{b_2}(3H + 2T_1 + 2T_2). \quad (4.63)$$

Толщину третьей пары боковых обрезных досок:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (4.64)$$

Ширину четвертой пары боковых обрезных досок:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3}{b_3}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3). \quad (4.65)$$

Толщину четвертой пары боковых обрезных досок:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (4.66)$$

Ширину пятой пары боковых обрезных досок:

$$b_5 = b_4 - \frac{2T_4}{b_4}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4). \quad (4.67)$$

Толщину пятой пары боковых обрезных досок:

$$T_5 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \quad (4.68)$$

Ширину шестой пары боковых обрезных досок:

$$b_6 = b_5 - \frac{2T_5}{b_5}(3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5). \quad (4.69)$$

Толщину шестой пары боковых обрезных досок:

$$T_6 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_6^2} - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)). \quad (4.70)$$

Таким образом, алгоритм решения задачи оптимизации составлен. Однако в этих формулах размеры брусьев и досок взаимосвязаны не только между собой, но и с размерами пиловочника. Определить

по этому алгоритму оптимальные размеры брусьев и досок не представляется возможным.

Методика выполнения расчетов. Поэтому для решения задачи воспользуемся численным методом. Для этого задаемся толщиной бруса, а остальные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также значение целевой функции определяем по представленным выше формулам. Для облегчения расчетов и анализа результатов полученные формулы представляем в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$.

Алгоритм решения задачи оптимизации в относительных единицах представлен ниже.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (4.71)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - 9m_H^2}. \quad (4.72)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}\left(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H^2\left(\frac{1}{m_{A_1}} + \frac{18}{m_{A_2}}\right)\right). \quad (4.73)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - 3m_H\right). \quad (4.74)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}(3m_H + 2m_{T_1}). \quad (4.75)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1}\right)\right). \quad (4.76)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}). \quad (4.77)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2}\right)\right). \quad (4.78)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}\right). \quad (4.79)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3}\right)\right). \quad (4.80)$$

Относительная ширина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = \frac{b_5}{d} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}}{m_{b_4}}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4}\right). \quad (4.81)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = \frac{T_5}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4}\right)\right). \quad (4.82)$$

Относительная ширина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_6} = \frac{b_6}{d} = m_{b_5} - \frac{2m_{T_5}}{m_{b_5}}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5}\right). \quad (4.83)$$

Относительная толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_6} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_6}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5})). \quad (4.84)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (4.85)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2(m_{T_1}m_{b_1} + m_{T_2}m_{b_2} + m_{T_3}m_{b_3} + m_{T_4}m_{b_4} + m_{T_5}m_{b_5} + m_{T_6}m_{b_6}). \quad (4.86)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (4.87)$$

Выполнение расчетов. Расчеты производятся в два этапа. Вначале, на первом этапе выполнения расчетов, задаемся относительной толщиной бруса с градацией 0,01 в пределах 0,1…0,16 от диаметра бревна в вершинном торце и определяем все размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим максимальное значение целевой функции и определяем оптимальный диапазон изменения относительной толщины бруса. Результаты расчетов представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Относительные размеры брусьев и боковых досок, а также величина целевой функции при изменении толщины брусьев

№	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}	m_{T_3}
1	0,1	0,9950	0,9539	0,9014	0,0665	0,8375	0,0567	0,7634	0,0497
2	0,11	0,9939	0,9440	0,8797	0,0728	0,8009	0,0616	0,7089	0,0533
3	**0,12**	**0,9928**	**0,9330**	**0,8554**	**0,0789**	**0,7599**	**0,0661**	**0,6468**	**0,0563**
4	0,13	0,9915	0,9208	0,8286	0,0849	0,7138	0,0702	0,5760	0,0586
5	0,14	0,9902	0,9075	0,7989	0,0907	0,6622	0,0739	0,4950	0,0598
6	0,15	0,9887	0,8930	0,7662	0,0963	0,6046	0,0770	0,4018	0,0596
7	0,16	0,9871	0,8773	0,7302	0,1016	0,5399	0,0792	0,2929	0,0572

Окончание табл. 4.1

№	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
1	0,6793	0,0440	0,5843	0,0388	0,4764	0,0338	0,290286584	0,428202	0,7184883
2	0,6029	0,0463	0,4804	0,0396	0,3358	0,0324	0,31700828	0,417878	0,7348867
3	**0,5140**	**0,0476**	**0,3552**	**0,0385**	**0,1527**	**0,0267**	**0,34304142**	**0,392744**	**0,7357853**
4	0,4097	0,0474	0,1988	0,0339	0	0	0,368308682	0,360786	0,7290943
5	0,2851	0,0448	0	0	0	0	0,39272796	0,327618	0,7203459
6	0,1301	0,0379	0	0	0	0	0,416211466	0,29839	0,7146019
7	0,0080	0,0203	0	0	0	0	0,438664638	0,264213	0,7028777

По результатам расчетов можно сделать вывод, что целевая функция принимает максимальное значение при относительной толщине бруса m_H = 0,12, причем максимальное значение целевой функции находится в диапазоне m_H = 0,11…0,12. Далее, на втором этапе

выполнения расчетов, задаемся толщиной бруса с интервалом 0,001, в ранее полученный диапазон максимального значения целевой функции. Затем по алгоритму в этом оптимальном диапазоне определяем все размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величину целевой функции. На основании расчетов находим максимальное значение целевой функции, которое и принимаем за оптимальное решение задачи, так как полагаем, что такая точность расчетов достаточная. Результаты расчетов сводятся в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Относительные размеры брусьев и боковых досок, а также величина целевой функции при изменении толщины брусьев в оптимальном диапазоне

№	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}	m_{T_3}
1	0,113	0,9936	0,9408	0,8727	0,0747	0,7891	0,0630	0,6911	0,0543
2	0,114	0,9935	0,9397	0,8703	0,0753	0,7851	0,0634	0,6850	0,0546
3	0,115	0,9934	0,9386	0,8679	0,0759	0,7810	0,0639	0,6788	0,0549
4	**0,116**	**0,9932**	**0,9375**	**0,8654**	**0,0765**	**0,7769**	**0,0643**	**0,6726**	**0,0552**
5	0,117	0,9931	0,9364	0,8630	0,0771	0,7727	0,0648	0,6663	0,0555
6	0,118	0,9930	0,9352	0,8605	0,0777	0,7685	0,0652	0,6598	0,0558
7	0,119	0,9929	0,9341	0,8580	0,0783	0,7642	0,0657	0,6534	0,0560

Окончание табл. 4.2

№	m_{b_4}	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
1	0,5776	0,0468	0,4454	0,0395	0,2865	0,0314	0,324894	0,411879	0,736773
2	0,5689	0,0469	0,4333	0,0394	0,2692	0,0309	0,327508	0,409579	0,737087
3	0,5601	0,0471	0,4209	0,0393	0,2513	0,0304	0,330116	0,407130	0,737246
4	**0,5512**	**0,0472**	**0,4083**	**0,0392**	**0,2329**	**0,0298**	**0,332716**	**0,404534**	**0,737250**
5	0,5421	0,0473	0,3955	0,0391	0,2139	0,0292	0,335308	0,401793	0,737102
6	0,5329	0,0474	0,3823	0,0389	0,1942	0,0285	0,337894	0,398912	0,736805
7	0,5235	0,0475	0,3689	0,0387	0,1739	0,0277	0,340471	0,395893	0,736364

Анализ результатов расчетов. По результатам расчетов определено максимальное значение целевой функции, относительная величина которой равна z = 0,73725. Максимальное значение целевой функции наблюдается при относительной толщине бруса m_H = 0,116.

С увеличением относительной толщины бруса площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а суммарная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. При этом целевая функция принимает максимальное значение при относительной толщине бруса m_H = 0,116. Расчеты показали, что оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев немного меньше,

чем оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок. Таким образом, подтверждается гипотеза о том, что имеется максимальное значение целевой функции при определенной толщине бруса (рис. 4.2).

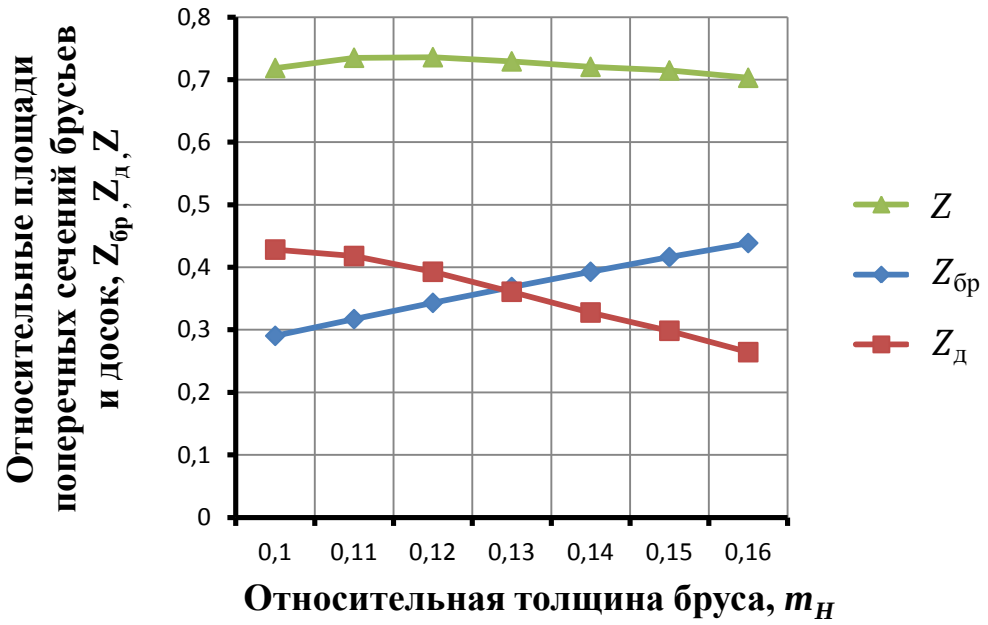


Рис. 4.2. Влияние относительной толщины бруса на относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок

С увеличением относительной толщины бруса относительные толщины боковых обрезных досок, расположенные ближе к центру бревна, возрастают, а толщины остальных боковых обрезных досок, расположенные в периферии, вначале немного возрастают, а затем уменьшаются (см. рис. 4.3). Относительная толщина пятой пары боковой обрезной доски уменьшается также ускоренно и при относительной толщине бруса m_H = 0,14 принимает нулевое значение. При этом относительная толщина крайней пары (шестой) боковой обрезной доски уменьшается ускоренно и при относительной толщине бруса m_H = 0,13 принимает толщину равную нулю.

Следовательно, изменение относительной толщины бруса оказывает различное влияние на относительные размеры боковых обрезных досок. Это затрудняет выбор оптимальных размеров этих боковых обрезных досок. Если рассматривать диапазон изменения относительных толщин бруса m_H = 0,11...0,12, то в этом диапазоне относительные толщины боковых обрезных досок изменяются не столь значительно. Этот диапазон следует рекомендовать при расчете и составлении поставов. Следует обратить внимание, что в этом диапазо-

не изменения толщины бруса относительные толщины боковых обрезных досок изменяются также различно.

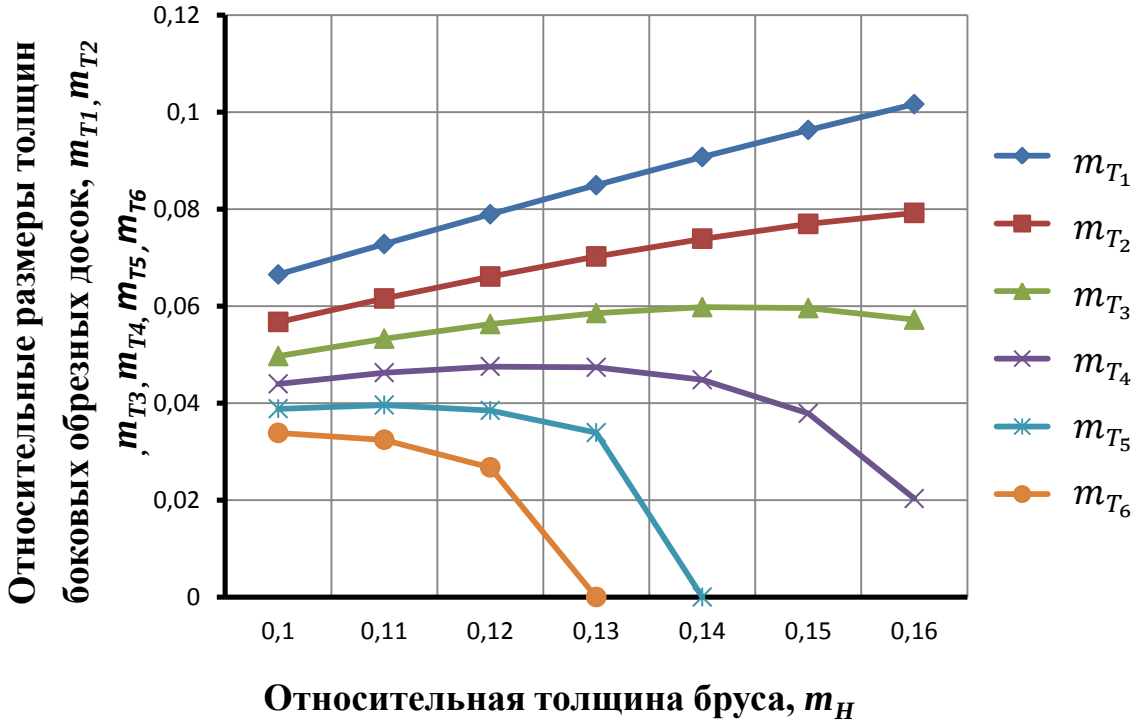


Рис. 4.3. Влияние относительной толщины бруса на относительные толщины боковых обрезных досок

С увеличением относительной толщины выпиливаемого бруса относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.4). При этом уменьшение относительной ширины доски возрастает в зависимости от её расположения в поперечном сечении пиловочника относительно сердцевины бревна. Ширина периферийных боковых обрезных досок при увеличении относительной толщины бруса уменьшается в большей степени и при относительной толщине бруса m_H = 0,13 принимает нулевое значение.

Сравнивая между собой рис. 4.3 и 4.4, необходимо отметить, что с увеличением относительной толщины бруса характер изменения относительных толщин и ширин боковых обрезных досок различный. При этом относительные ширины всех боковых обрезных досок с увеличением относительной толщины бруса уменьшаются веером, т. е. не прямо пропорционально. Такая сложная зависимость размеров боковых обрезных досок требует необходимости использования предлагаемого алгоритма решения задачи непосредственно при расчете и составлении поставов.

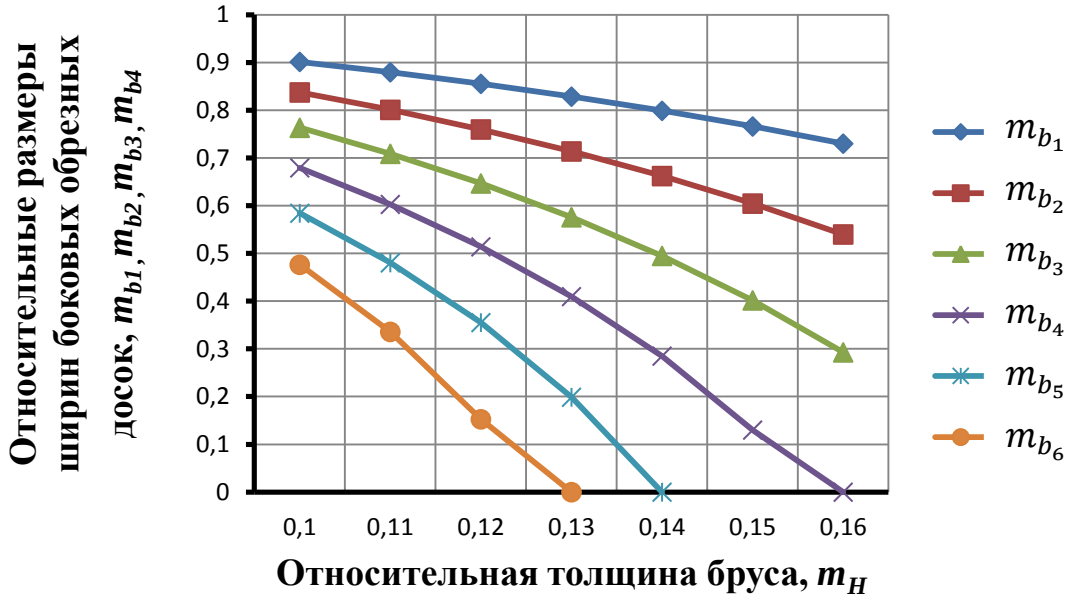


Рис. 4.4. Влияние относительной толщины бруса
на относительную ширину боковых обрезных досок

Результаты расчетов показали, что шестая пара боковых обрезных досок принимает нулевое значение при относительной толщине бруса m_H = 0,13, а пятая пара боковых обрезных досок принимает нулевое значение при относительной толщине бруса m_H = 0,14, а четвертая пара боковых обрезных досок принимает нулевое значение при относительной толщине бруса m_H = 0,16. Следовательно, при расчете и составлении поставов необходимо относительную толщину бруса выбирать в небольшом диапазоне от оптимального относительного значения. По полученным данным, этот диапазон можно обозначить в пределах m_H = 0,11…0,12. В этом случае относительные толщины и ширины боковых обрезных досок изменяются в различных пределах, но значения этих размеров всегда положительные.

Таким образом, расчеты показали, что при оптимальной относительной толщине бруса m_H = 0,116 оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок оказались следующими:

m_{T_1} = 0,0765,	m_{b_1} = 0,8654,	m_{T_4} = 0,0472,	m_{b_4} = 0,5512,
m_{T_2} = 0,0643,	m_{b_2} = 0,7769,	m_{T_5} = 0,0392,	m_{b_5} = 0,4083,
m_{T_3} = 0,0552,	m_{b_3} = 0,6726	m_{T_6} = 0,0298.	m_{b_6} = 0,2329.

4.2. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок

Постановка задачи. Определение оптимальных размеров бруса и досок для данного варианта раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и шести пар боковых обрезных досок ранее было выполнено без учета ширины пропила. Рассмотрим влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок (см. рис. 4.5) [43, 44].

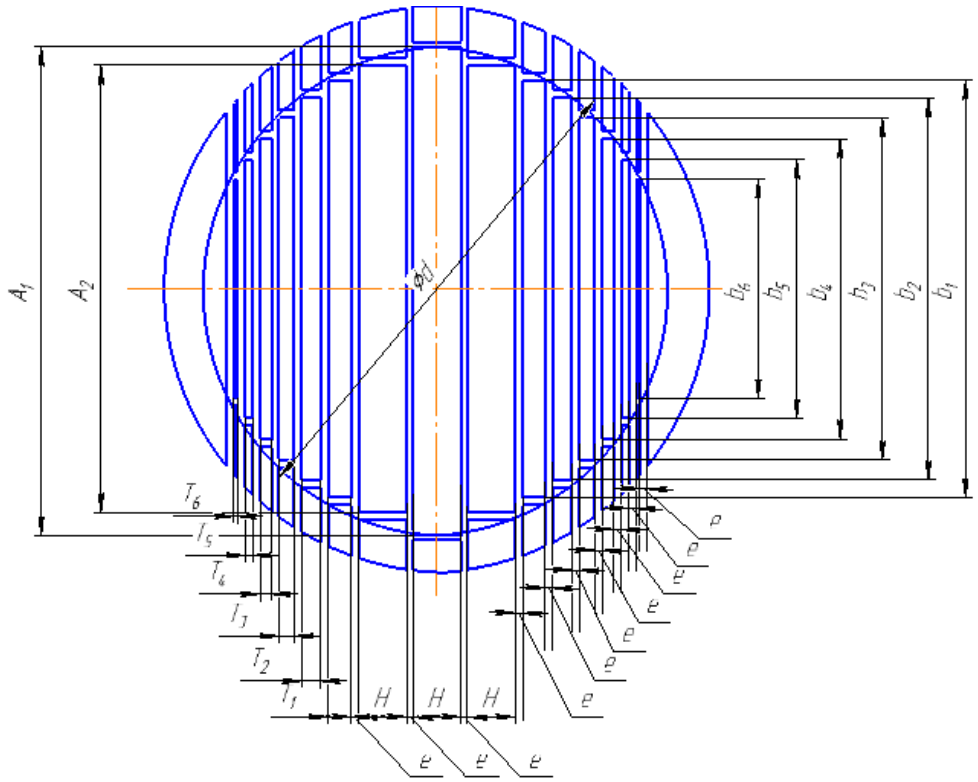


Рис. 4.5. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и шести пар боковых досок с учетом ширины пропила

Составление математической модели. В качестве критерия оптимальности выбираем выход пилопродукции [57]. Целевую функцию представляем в виде суммы поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, получаемых после первого прохода брусово-развального способа раскроя пиловочника, так как в данной задаче оптимизации рассматривается только пифагорическая зона пиловочника [55]:

$$Z = HA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + 2T_6b_6. \quad (4.90)$$

Для составления уравнений связи воспользуемся теоремой Пифагора. Взаимосвязь диаметра бревна в вершинном торце с размерами брусьев и боковых обрезных досок с учетом ширины пропила можно представить следующими уравнениями.

Для центрального бруса:

$$d^2 - H^2 - A_1^2 = 0. \quad (4.91)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (3H + 2e)^2 = 0. \quad (4.92)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (3H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (4.93)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (4.94)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0. \quad (4.95)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \quad (4.96)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 12e)^2 = 0. \quad (4.97)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_6^2 - (3H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 2T_6 + 14e)^2 = 0. \quad (4.98)$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующие уравнения без квадратных скобок.

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - 9H^2 - 12He - 4e^2 = 0. \quad (4.99)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 16e^2 - 12HT_1 - 24He - 16T_1e = 0. \quad (4.100)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 36e^2 - 12HT_1 - \\ -12HT_2 - 36He - 8T_1T_2 - 24T_1e - 24T_2e = 0. \end{gathered} \quad (4.101)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 64e^2 - \\ -12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 48He - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 32T_1e - 8T_2T_3 - 32T_2e - 32T_3e = 0. \quad (4.102)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - \\ -100e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 60He - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40T_1e - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -40T_2e - 8T_3T_4 - 40T_3e - 40T_4e = 0. \quad (4.103)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - \\ -144e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - 12HT_5 - \\ -72He - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 48T_1e - 8T_2T_3 - \\ -8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 48T_2e - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\ -48T_3e - 8T_4T_5 - 48T_4e - 48T_5e = 0. \quad (4.104)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_6^2 - 9H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - 4T_4^2 - 4T_5^2 - 4T_6^2 - \\ -196e^2 - 12HT_1 - 12HT_2 - 12HT_3 - 12HT_4 - \\ -12HT_5 - 12HT_6 - 84He - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\ -8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 56T_1e - 8T_2T_3 - \\ -8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 56T_2e - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\ -8T_3T_6 - 56T_3e - 8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 56T_4e - 8T_5T_6 - \\ -56T_5e - 56T_6e = 0. \quad (4.105)$$

Полагаем, что математическая модель данной оптимизационной задачи составлена.

Отличие представленных уравнений связи от предыдущих заключается в том, что в этих уравнениях добавляется еще один параметр – ширина пропила, которая связана с количеством не только брусьев, но и боковых обрезных досок.

Алгоритм решения задачи [53]. По полученным формулам непосредственно определить оптимальные размеры брусьев и досок невозможно. Решая данную математическую модель методами, изложенными ранее, получим ряд идентичных новых равенств, по которым определить оптимальные размеры брусьев и досок также не представляется возможным. В связи с этим используем численный метод. Для его реализации составляем алгоритм решения задачи в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ и $m_e = e/d$.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A_1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - m_H^2}. \quad (4.106)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (3m_H + 2m_e)^2}. \quad (4.107)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{b_1}{d} = \frac{1}{3}(m_{A_1} + 2m_{A_2} - m_H\left(\frac{m_H}{m_{A_1}} + \frac{18m_H}{m_{A_2}} + \frac{12m_e}{m_{A_2}}\right)). \quad (4.108)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{T_1}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (3m_H + 4m_e)\right). \quad (4.109)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = \frac{b_2}{d} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}(3m_H + 2m_{T_1} + 6m_e)}{m_{b_1}}. \quad (4.110)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{T_2}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 6m_e\right)\right). \quad (4.111)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = \frac{b_3}{d} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)}{m_{b2}}. \quad (4.112)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{T_3}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)\right). \quad (4.113)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = \frac{b_4}{d} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)}{m_{b_3}}. \quad (4.114)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{T_4}{d} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - \left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e\right)\right). \quad (4.115)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = \frac{b_5}{d} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e\right)}{m_{b_4}}. \quad (4.116)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = \frac{T_5}{d} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + \\ + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)). \quad (4.117)$$

Относительная ширина наружной пласти шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_6} = m_{b_5} - \\ - \frac{2m_{T_5}\left(3m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e\right)}{m_{b_5}}. \quad (4.118)$$

Относительная толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_6} = \frac{T_6}{d} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_6}^2} - (3m_H + 2m_{T_1} + \\ + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e)). \quad (4.119)$$

Относительная площадь поперечного сечения брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2} = m_H(m_{A_1} + 2m_{A_2}). \quad (4.120)$$

Относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{b_2} m_{T_2} + 2m_{b_3} m_{T_3} + \\ + 2m_{b_4} m_{T_4} + 2m_{b_5} m_{T_5} + 2m_{b_6} m_{T_6}. \quad (4.121)$$

Суммарная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \qquad (4.122)$$

Таким образом, алгоритм решения задачи оптимизации для данной схемы раскроя пиловочника в относительных единицах составлен.

Выполнение расчетов. Расчеты по представленным формулам производятся в следующем порядке. Вначале задаемся относительной величиной ширины пропила m_e. Затем для этой относительной ширины пропила изменяем толщину бруса в различных пределах с градацией 0,001 и вычисляем размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. По результатам расчетов находим вариант, в котором целевая функция принимает максимальное значение. Результаты расчетов сводятся в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также величина целевой функции при изменении относительной ширины пропила

№	m_e	m_H	m_{A_1}	m_{A_2}	m_{b_1}	m_{T_1}	m_{b_2}	m_{T_2}	m_{b_3}	m_{T_3}	m_{b_4}
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0,116	0,993	0,937	0,865	0,077	0,777	0,064	0,673	0,055	0,551
2	0,002	0,122	0,993	0,929	0,850	0,076	0,755	0,063	0,645	0,052	0,522
3	0,004	0,129	0,992	0,919	0,831	0,077	0,727	0,061	0,610	0,049	0,482
4	0,006	0,138	0,990	0,905	0,804	0,078	0,687	0,060	0,556	0,046	0,417
5	0,008	0,147	0,989	0,889	0,775	0,079	0,642	0,059	0,498	0,042	0,347
6	0,01	0,158	0,987	0,869	0,736	0,082	0,580	0,058	0,413	0,038	0,240

Окончание табл. 4.3

№	m_{T_4}	m_{b_5}	m_{T_5}	m_{b_6}	m_{T_6}	$z_{\text{бр}}$	$z_{\text{д}}$	z
	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0,047	0,408	0,039	0,233	0,030	0,33271564	0,404534	0,737249649
2	0,043	0,382	0,034	0,218	0,024	0,34777242	0,371913	0,71968514
3	0,038	0,342	0,028	0,189	0,017	0,364941881	0,337955	0,702897258
4	0,033	0,272	0,021	0,123	0,009	0,38638324	0,300727	0,687110142
5	0,027	0,197	0,013	0,063	0,001	0,406906272	0,265801	0,672707504
6	0,020	0,075	0,003	0,000	0,000	0,430765341	0,229712	0,660476863

Результаты расчетов. С увеличением относительной ширины пропила m_e, оптимальная относительная толщина бруса m_H возрастает и, следовательно, оптимальные относительные ширины пластей брусьев уменьшаются (см. рис. 4.6).

При этом относительная ширина наружной пласти бокового бруса с увеличением относительной ширины пропила уменьшается в большей мере, чем относительная ширина центрального бруса.

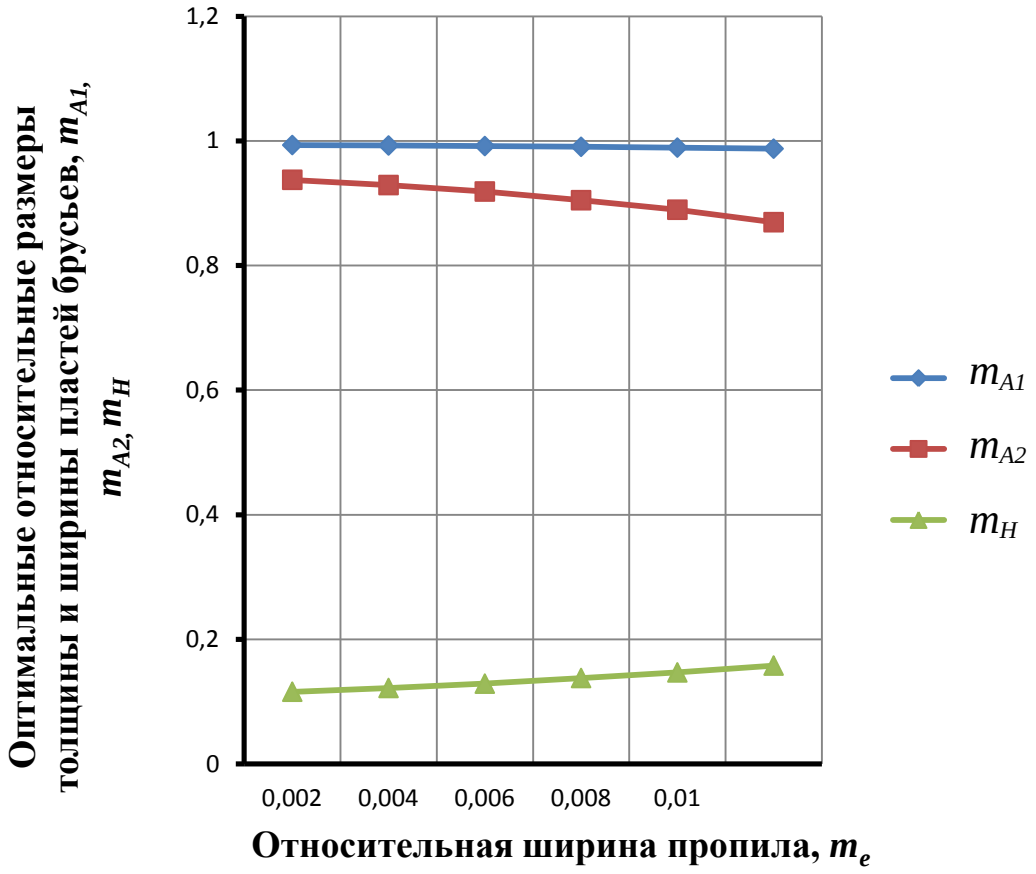


Рис. 4.6. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 4.7). В итоге суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев и досок уменьшается. Следовательно, увеличение площади поперечного сечения брусьев с увеличением относительной ширины пропила происходит в меньшей степени по сравнению с уменьшением площади поперечного сечения боковых обрезных досок.

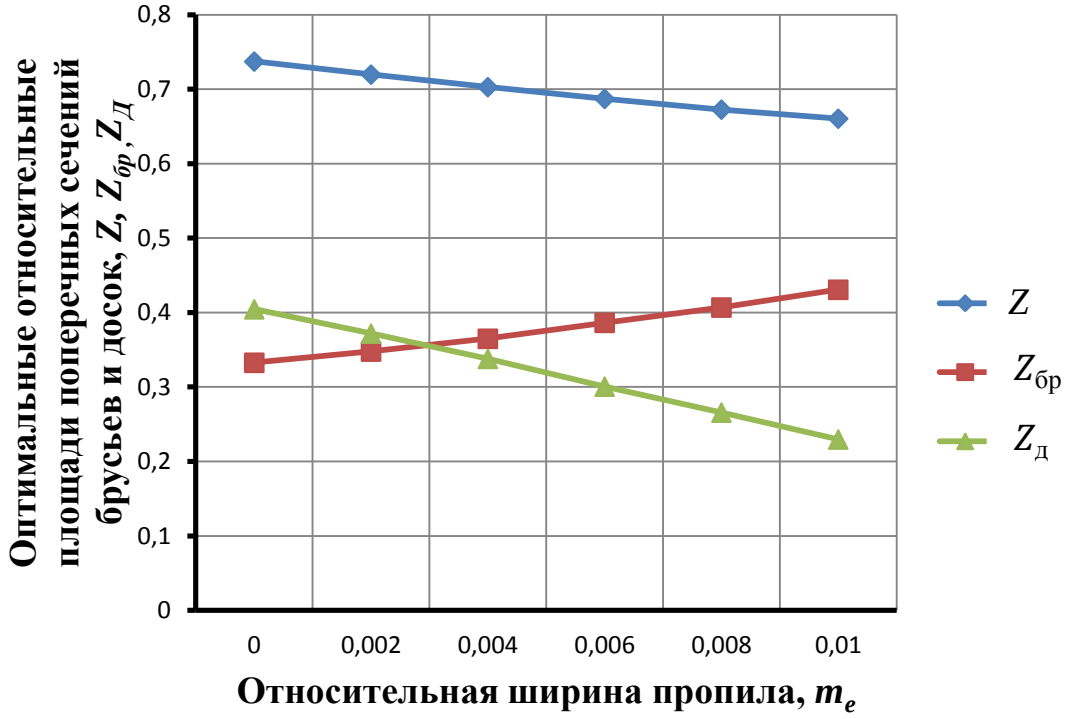


Рис. 4.7. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев
и боковых обрезных досок

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальная относительная толщина первой пары боковой обрезной доски практически мало изменяется (немного ускоренно возрастает), а оптимальные относительные толщины других пар боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.8). Особенно уменьшаются оптимальные относительные толщины крайних боковых обрезных досок. Оптимальная относительная толщина крайней (шестой) пары боковых обрезных досок при $m_e = 0{,}008$ принимает значение равное 0,0008 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Такой сложный характер изменения оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок при изменении относительной ширины пропила для данной схемы раскроя пиловочника установлен и впервые рассмотрен в работах [44, 47].

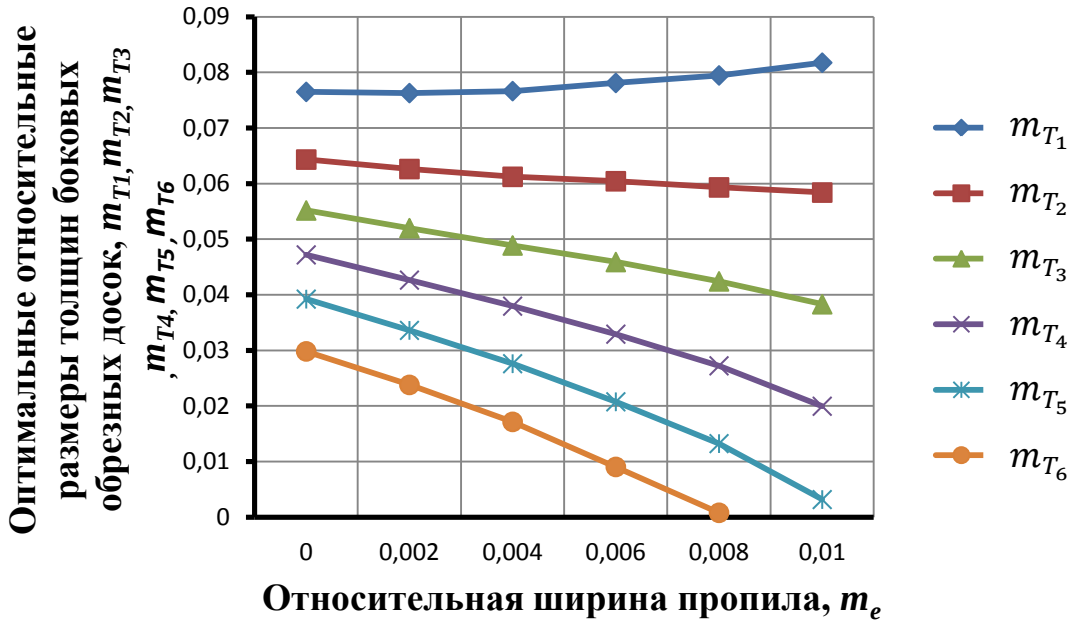


Рис. 4.8. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные толщины боковых обрезных досок

С увеличением относительной ширины пропила m_e оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются. Наибольшее изменение оптимальной относительной ширины наблюдается у крайней боковой обрезной доски. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски принимает нулевое значение от диаметра пиловочника в верхнем торце (см. рис. 4.9).

Анализируя результаты расчетов, можно отметить, что оптимальная относительная площадь поперечных сечений брусьев с увеличением относительной ширины пропила возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается. Общая оптимальная относительная площадь поперечных сечений пилопродукции с увеличением относительной ширины пропила уменьшается (см. рис. 4.7). С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина брусьев возрастает, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок уменьшаются.

На практике относительная ширина пропила чаще всего находится в пределах $m_e = 0{,}005 \ldots 0{,}007$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае оптимальные относительные размеры брусьев изменяются не столь значительно, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок изменяются более существенно. Это затрудняет выбор стандартных размеров и брусьев, особенно размеров боковых обрезных досок.

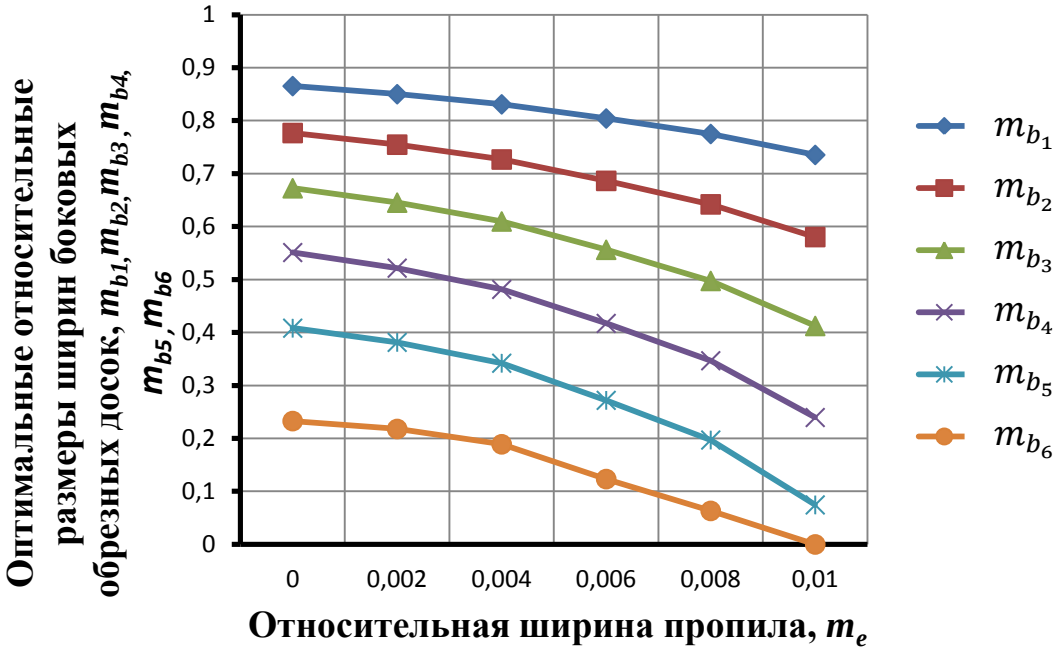


Рис. 4.9. Влияние относительной ширины пропила
на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок

Таким образом, аналитическим путем удалось решить задачу оптимизации раскроя пиловочника брусо-развальным способом с выпиливанием трех брусьев и шести пар боковых досок с учетом ширины пропила. Ширина пропила оказывает наибольшее влияние на размеры крайних боковых обрезных досок.

Следовательно, при расчете и составлении поставов ширину пропила следует учитывать дифференцированно, принимая во внимание полученные результаты.

4.3. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины

Постановка задачи. На лесопильных предприятиях центральный брус чаще всего выпиливают по толщине больше, чем боковые. Иногда возможен также вариант выпиливания центрального бруса по толщине меньше, чем боковые брусья (см. рис. 4.10). Поэтому необходимо знать, какое соотношение размеров брусьев по толщине является наиболее предпочтительным. Вначале задачу оптимизации рассматриваем без учета ширины пропила [44].

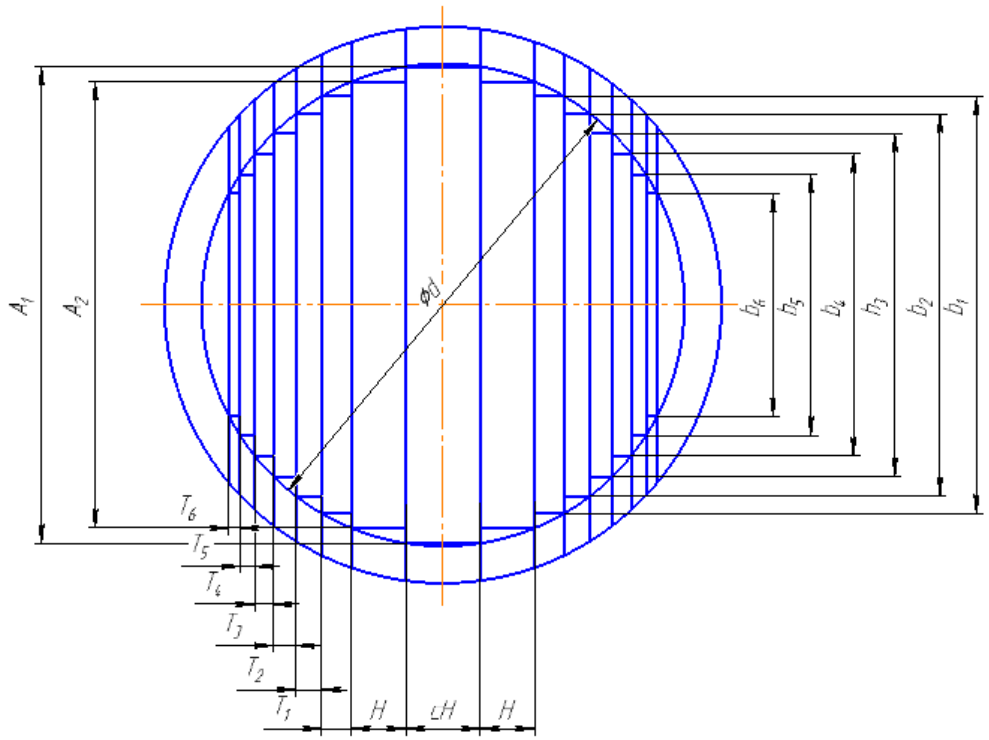


Рис. 4.10. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и шести пар боковых обрезных досок

Составление математической модели [44]. В данной задаче оптимизации раскроя пиловочника рассматривается пифагорическая зона. Целевую функцию представляем в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + \\ +2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + 2T_6b_6. \quad (4.123)$$

Уравнения связи составляем, используя теорему Пифагора. Взаимосвязь диаметра пиловочника в вершинном торце с размерами брусьев и боковых обрезных досок представляется следующими уравнениями.

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \quad (4.124)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - H^2(c+2)^2 - A_2^2 = 0. \quad (4.125)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1)^2 - b_1^2 = 0. \quad (4.126)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)^2 - b_2^2 = 0. \quad (4.127)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)^2 - b_3^2 = 0. \quad (4.128)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)^2 - b_4^2 = 0. \quad (4.129)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)^2 - b_5^2 = 0. \quad (4.130)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 2T_6)^2 - b_6^2 = 0. \quad (4.131)$$

Раскрывая скобки в уравнениях связи, получим следующие равенства.

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4H^2 = 0. \quad (4.132)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8HT_1 = 0. \quad (4.133)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\ -4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2 = 0. \end{gathered} \quad (4.134)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - \\ -4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 8HT_1 - 8HT_2 - \\ -8HT_3 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_2T_3 = 0. \end{gathered} \quad (4.135)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - 4T_3^2 - \\ -4T_4^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_3T_4 = 0. \end{gathered} \quad (4.136)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - \\ -4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - \\ -4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - \\ -8HT_5 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - \\ -8T_1T_5 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - \\ -4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 4T_5^2 = 0. \quad (4.137)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_6^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\ -4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - 4cHT_6 - 4H^2 - 8HT_1 - \\ -8HT_2 - 8HT_3 - -8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_6 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\ -8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - -4T_2^2 - 8T_2T_3 - \\ -8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\ -8T_3T_6 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 4T_5^2 - 8T_5T_6 - 4T_6^2 = 0. \quad (4.138)$$

Полагаем, что математическая модель данной оптимизационной задачи раскроя пиловочника составлена.

Анализируя математическую модель данной схемы раскроя пиловочника следует прежде всего обратить внимание на количество неизвестных факторов и наметить методику ее решения. В данной математической модели необходимо определить оптимальные размеры брусьев (4 фактора), а также размеры боковых обрезных досок в количестве 6 штук (12 факторов). Таким образом, в математической модели насчитывается 16 неизвестных, а количество уравнений связей составляет всего лишь 8 штук. Решить такую математическую модель задачи оптимизации раскроя пиловочника не представляется возможным.

Обычно при этом упрощают математическую модель или используют новые методические приемы. Одним из таких методов использования методических решений является метод множителей Лагранжа. Этот метод позволяет раскрыть взаимосвязь факторов и тем самым обеспечивает возможность решить задачу оптимизации классическим методом с большим количеством неизвестных факторов, чем количество уравнений связей.

Решение математической модели. Для решения данной математической модели воспользуемся методом множителей Лагранжа, так как в математической модели неизвестных факторов больше, чем уравнений связи. Решить такие задачи классическим методом не представляется возможным. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
L = {} & cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + \\
& + 2T_6b_6 + \lambda_1(d^2 - \mathrm{c}^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4\mathrm{c}H^2 - 4H^2) + \\
& + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4\mathrm{c}H^2 - 4cHT_1 - 8HT_1) + \\
& + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4H^2 - 4T_1^2 - 4T_2^2 - \\
& - 4\mathrm{c}H^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8T_1T_2) + \\
& + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4\mathrm{c}H^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\
& - 4cHT_3 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 4T_1^2 - \\
& - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 4T_3^2) + \\
& + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - \mathrm{c}^2H^2 - 4\mathrm{c}H^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\
& - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\
& - 8HT_4 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 4T_2^2 - \\
& - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 4T_4^2) + \\
& + \lambda_7(d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\
& - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - 4H^2 - 8HT_1 - \\
& - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_5 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\
& - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - \\
& - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\
& - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 4T_5^2) + \\
& + \lambda_8(d^2 - b_6^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\
& - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - 4cHT_6 - 4H^2 - \\
& - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 8HT_5 - \\
& - 8HT_6 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - \\
& - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\
& - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - \\
& - 8T_3T_6 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 4T_5^2 - 8T_5T_6 - 4T_6^2).
\end{aligned}
\tag{4.139}
$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю. Решая эту математическую модель по аналогии с предыдущей задачей, можно написать следующие формулы для определения размеров брусьев и боковых обрезных досок.

Ширина пласти центрального бруса:

$$A_1 = \sqrt{d^2 - c^2H^2}. \tag{4.140}$$

Ширина наружной пласти бокового бруса:

$$A_2 = \sqrt{d^2 - (cH+2H)^2}. \tag{4.141}$$

Ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$b_1 = \frac{c(d^2 - 2\mathrm{c}^2H^2)}{(c+2)\sqrt{d^2 - c^2H^2}} + \frac{2(d^2 - 2H^2(c+2)^2)}{(c+2)\sqrt{d^2 - (cH+2H)^2}}. \tag{4.142}$$

Толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$T_1 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_1^2} - (cH + 2H)). \quad (4.143)$$

Ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$b_2 = b_1 - \frac{2T_1(cH + 2H + 2T_1)}{b_1}. \quad (4.144)$$

Толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$T_2 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_2^2} - (cH + 2H + 2T_1)). \quad (4.145)$$

Ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$b_3 = b_2 - \frac{2T_2(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)}{b_2}. \quad (4.146)$$

Толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$T_3 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_3^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2)). \quad (4.147)$$

Ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$b_4 = b_3 - \frac{2T_3(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)}{b_3}. \quad (4.148)$$

Толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$T_4 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_4^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3)). \quad (4.149)$$

Ширина пятой пары боковых обрезных досок:

$$b_5 = b_4 - \frac{2T_4(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)}{b_4}. \quad (4.150)$$

Толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$T_5 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_5^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4)). \quad (4.151)$$

Ширина шестой пары боковых обрезных досок:

$$b_6 = b_5 - \frac{2T_5(cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)}{b_5}. \quad (4.152)$$

Толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$T_6 = 0{,}5(\sqrt{d^2 - b_6^2} - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5)). \quad (4.153)$$

Площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cH\text{A}_1 + 2H\text{A}_2. \quad (4.154)$$

Площадь поперечных сечений всех шести пар боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + 2T_6b_6. \quad (4.155)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (4.156)$$

В представленных выше формулах размеры брусьев и боковых обрезных досок взаимосвязаны и зависят от диаметра пиловочника в вершинном торце. Это затрудняет отыскание оптимальных размеров брусьев и досок. В связи с этим алгоритм решения задачи оптимизации данной схемы раскроя пиловочника представляем в относительных единицах, принимая диаметр пиловочника равным единице.

Алгоритм решения задачи. Для решения задачи воспользуемся численным методом. Задаемся величиной коэффициента *c*, а затем, задаваясь толщиной боковых брусьев в определенном диапазоне, определяем все остальные размеры брусьев и досок, а также величину целевой функции. В этом диапазоне изменения толщины брусьев отыскиваем максимальное значение целевой функции. Этот результат и будет оптимальным. Для упрощения расчетов и анализа результатов представляем формулы в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$. Алгоритм решения задачи оптимизации в относительных единицах приводится ниже.

Относительная ширина пласти центрального бруса:

$$m_{A1} = \frac{A_1}{d} = \sqrt{1 - c^2m_H^2}. \quad (4.157)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A2} = \frac{A_2}{d} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H)^2}. \quad (4.158)$$

Относительная ширина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b1} = \frac{c(1-2c^2 m_H^2)}{m_{A1}(c+2)} + \frac{2(1-2m_H^2(c+2)^2)}{m_{A2}(c+2)}. \quad (4.159)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T1} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b1}^2} - m_H(c+2)). \quad (4.160)$$

Относительная ширина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b2} = m_{b1} - \frac{2m_{T1}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1})}{m_{b1}}. \quad (4.161)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T2} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1})). \quad (4.162)$$

Относительная ширина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b3} = m_{b2} - \frac{2m_{T2}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2})}{m_{b2}}. \quad (4.163)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T3} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b3}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2})). \quad (4.164)$$

Относительная ширина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b4} = m_{b3} - \frac{2m_{T3}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3})}{m_{b3}}. \quad (4.165)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T4} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3})). \quad (4.166)$$

Относительная ширина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b5} = m_{b4} - \frac{2m_{T4}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3} + 2m_{T4})}{m_{b4}}. \quad (4.167)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T5} = 0{,}5(\sqrt{1-m_{b5}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3} + 2m_{T4})). \quad (4.168)$$

Относительная ширина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b6} = m_{b5} - \frac{2m_{T5}(cm_H + 2m_H + 2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3} + 2m_{T4} + 2m_{T5})}{m_{b5}}. \quad (4.169)$$

Относительная толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T6} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b6}^2} - (cm_H + 2m_H + \\ +2m_{T1} + 2m_{T2} + 2m_{T3} + 2m_{T4} + 2m_{T5})). \quad (4.170)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{A1} + 2m_H m_{A2}. \quad (4.171)$$

Относительная площадь поперечных сечений всех шести пар боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2m_{T1}m_{b1} + 2m_{T2}m_{b2} + 2m_{T3}m_{b3} + \\ +2m_{T4}m_{b4} + 2m_{T5}m_{b5} + 2m_{T6}m_{b6}. \quad (4.172)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (4.173)$$

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок, а также величина целевой функции при изменении параметров c и $m_н$ представлены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок, а также величина целевой функции для различных параметров c и $m_н$

C	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}
0,5	0,122	0,998138	0,952352	0,88262	0,082543	0,794695	0,068461	0,69011	0,058348
0,6	0,121	0,997361	0,949224	0,878908	0,081196	0,790776	0,067557	0,68619	0,057658
0,8	0,118	0,995534	0,943841	0,873439	0,078267	0,786173	0,065536	0,683138	0,056142
1	0,116	0,993249	0,937495	0,865445	0,076502	0,776871	0,064328	0,672594	0,055176
1,2	0,112	0,990927	0,933568	0,862248	0,074043	0,775261	0,062577	0,673292	0,053868
1,4	0,109	0,988288	0,928793	0,856604	0,072687	0,769037	0,061615	0,666612	0,0531
1,5	0,107	0,987036	0,927227	0,855241	0,071865	0,768148	0,061021	0,666424	0,052651
1,6	0,105	0,985787	0,925806	0,853998	0,071138	0,767319	0,060494	0,666206	0,052251
1,8	0,102	0,983001	0,921828	0,848785	0,070569	0,760866	0,060086	0,658377	0,05189
2	0,098	0,980604	0,919965	0,84718	0,069653	0,759816	0,059417	0,658136	0,05138
2,2	0,094	0,978383	0,918767	0,846314	0,068943	0,759526	0,058896	0,658646	0,050988
2,5	0,089	0,974933	0,916297	0,84286	0,068816	0,754988	0,058803	0,652842	0,050878
2,8	0,083	0,97262	0,917212	0,845037	0,068154	0,758787	0,058316	0,658671	0,050546
3	0,08	0,970773	0,916515	0,84364	0,068455	0,756507	0,058538	0,655298	0,050693
3,2	0,077	0,969168	0,91634	0,843008	0,06875	0,755273	0,058755	0,6533	0,050844
3,5	0,072	0,967727	0,918251	0,845876	0,06869	0,759248	0,05871	0,6586	0,050846
3,8	0,068	0,966038	0,918939	0,846143	0,069278	0,758871	0,059142	0,657363	0,051167
4	0,065	0,965609	0,920815	0,848946	0,06924	0,76274	0,059113	0,6625	0,051178

Окончание табл. 4.4

c	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$Z_{\text{бр}}$	$Z_{\text{д}}$	Z
0,5	0,5677	0,0498	0,4234	0,0414	0,2465	0,0316	0,2932604	0,4421539	0,7354143
0,6	0,5639	0,0492	0,4199	0,0409	0,2431	0,0312	0,3021207	0,4336951	0,7358158
0,8	0,5631	0,0480	0,4221	0,0401	0,2499	0,0309	0,3167249	0,4198470	0,7365719
1	0,5512	0,0472	0,4083	0,0392	0,2329	0,0298	0,3327156	0,4045340	0,7372496
1,2	0,5550	0,0462	0,4164	0,0387	0,2475	0,0298	0,3422999	0,3955533	0,7378531
1,4	0,5479	0,0456	0,4086	0,0381	0,2386	0,0292	0,3532895	0,3850845	0,7383740
1,5	0,5486	0,0453	0,4107	0,0378	0,2426	0,0292	0,3568458	0,3817413	0,7385871
1,6	0,5492	0,0450	0,4124	0,0377	0,2461	0,0291	0,3600314	0,3787389	0,7387703
1,8	0,5397	0,0446	0,4007	0,0372	0,2306	0,0284	0,3685318	0,3705803	0,7391121
2	0,5406	0,0442	0,4030	0,0370	0,2352	0,0284	0,3725115	0,3668538	0,7393654
2,2	0,5421	0,0439	0,4060	0,0368	0,2404	0,0284	0,3750579	0,3644755	0,7395333
2,5	0,5348	0,0438	0,3965	0,0365	0,2274	0,0279	0,3800233	0,3596613	0,7396847
2,8	0,5432	0,0436	0,4084	0,0366	0,2449	0,0284	0,3782941	0,3614135	0,7397076
3	0,5384	0,0436	0,4018	0,0365	0,2353	0,0281	0,3796279	0,3600905	0,7397184
3,2	0,5355	0,0437	0,3975	0,0365	0,2289	0,0279	0,3799195	0,3597490	0,7396685
3,5	0,5424	0,0438	0,4067	0,0367	0,2417	0,0284	0,3760953	0,3634561	0,7395515
3,8	0,5401	0,0440	0,4028	0,0368	0,2355	0,0283	0,3745999	0,3648218	0,7394217
4	0,5468	0,0441	0,4117	0,0370	0,2478	0,0287	0,3707642	0,3685126	0,7392768

Анализ результатов расчетов. С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает до коэффициента *c* = 2,5, а затем незначительно уменьшается. При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок возрастает до коэффициента *c* = 3,0, а затем незначительно уменьшается (см. рис. 4.11). Расчеты показали, что имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором оптимальная относительная площадь поперечного сечения становится максимальной. Это наблюдается при значении коэффициента *c* равном 3,0.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* оптимальная относительная толщина боковых брусьев уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает (см. рис. 4.12). Суммарное значение оптимальных относительных толщин брусьев возрастает до коэффициента *c* = 2,5, а затем незначительно уменьшается. Оптимальные относительные ширины пластей брусьев с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* незначительно уменьшаются. Последняя зависимость объясняется тем, что при одном значении гипотенузы (диаметра пиловочника) с увеличением длины одного катета (радиуса бруса) прямоугольного треугольника величина другого катета (ширина пласти бруса) уменьшается.

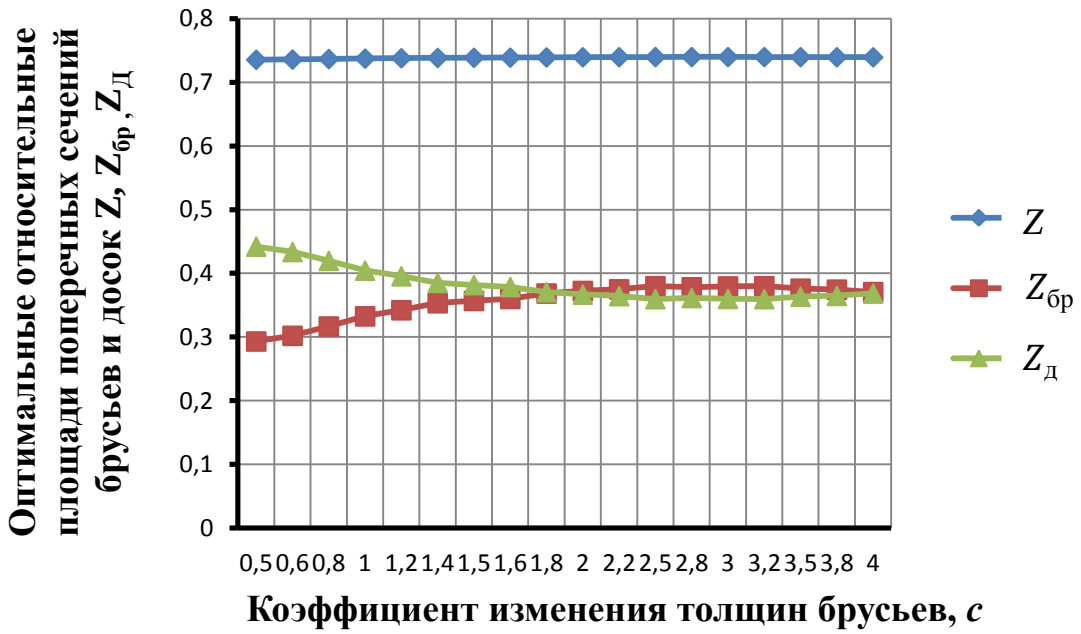


Рис. 4.11. Влияние коэффициента *c* на оптимальную относительную площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок

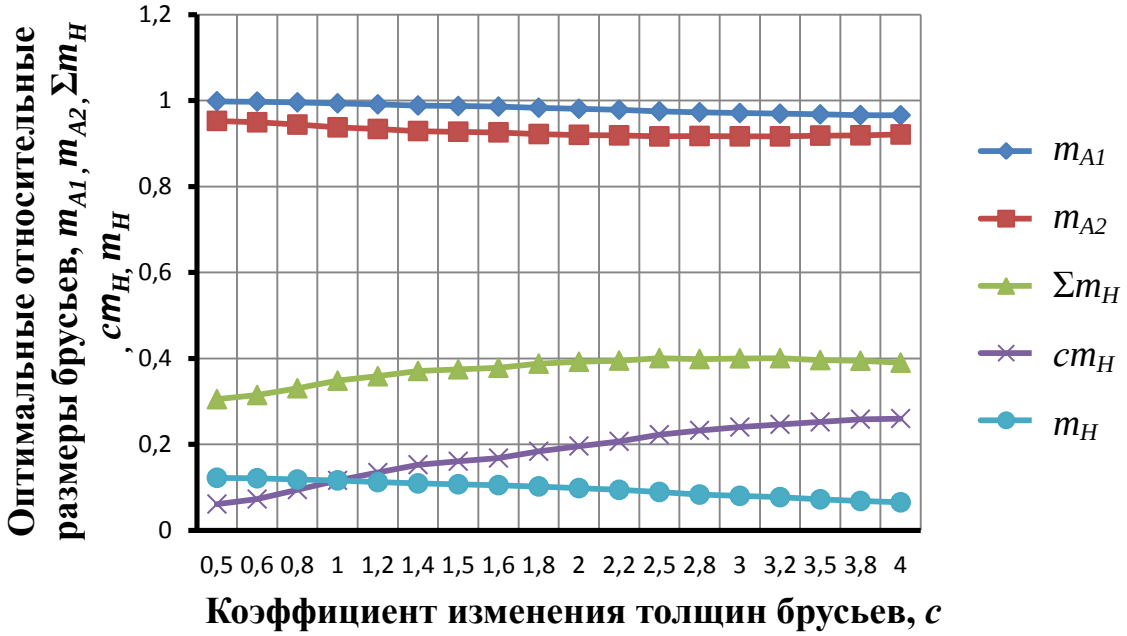


Рис. 4.12. Влияние коэффициента *c* на оптимальную относительную толщину бруса и оптимальную относительную ширину пласти центрального и боковых брусьев

С увеличением коэффициента *c* оптимальная относительная толщина боковых обрезных досок уменьшается до коэффициента $c = 2{,}8$, а затем незначительно возрастает. Уменьшение относитель-

ных толщин боковых обрезных досок при изменении относительной толщины бруса происходит вначале по экспоненте, а затем возрастает (см. рис. 4.13).

Оптимальная относительная толщина первой пары боковой обрезной доски с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев *c* уменьшается в большей степени, чем оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски.

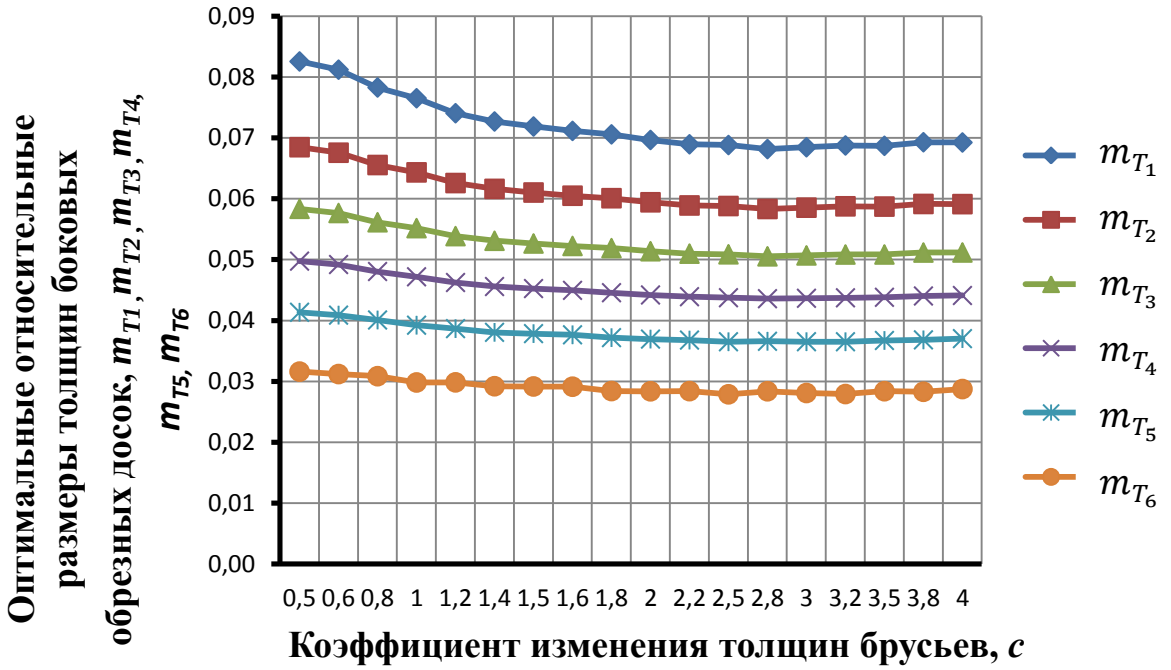


Рис. 4.13. Влияние коэффициента *c*
на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок

В этом случае можно также отметить, что минимальное значение оптимальной относительной толщины боковых обрезных досок отмечено при коэффициенте $c = 2{,}8\ldots3{,}0$.

С увеличением коэффициента *c* оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются до коэффициента $c = 2{,}5$, а затем незначительно возрастают (рис. 4.14).

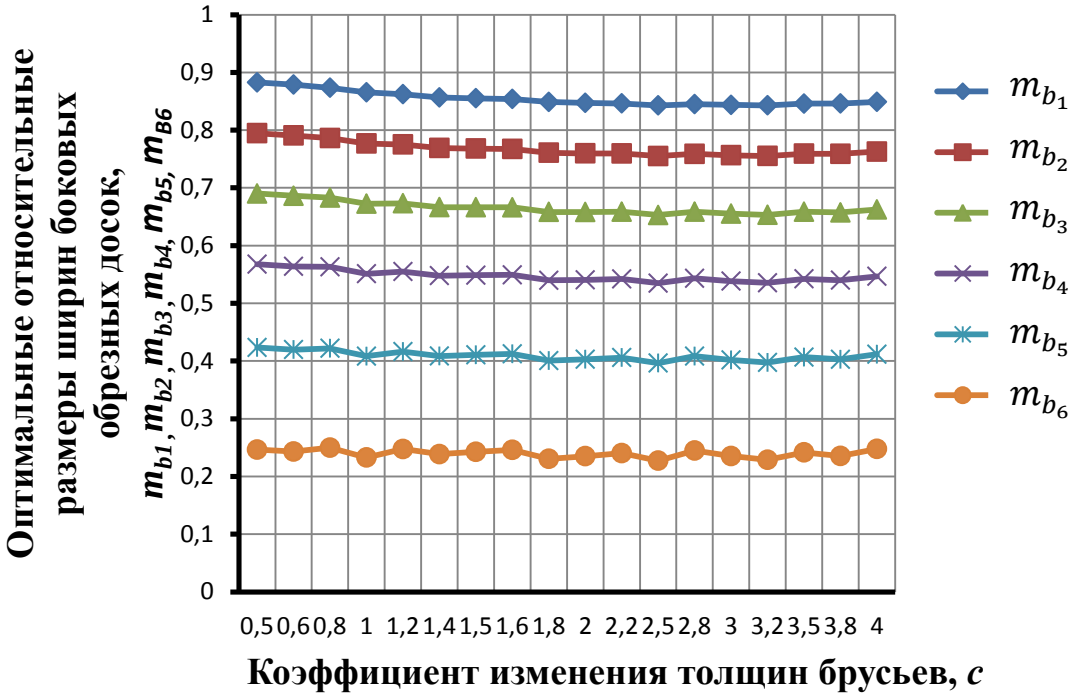


Рис. 4.14. Влияние коэффициента c
на оптимальную относительную ширину боковых обрезных досок

Соотношения оптимальных относительных ширин боковых обрезных досок отличаются между собой. Так, при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 отношение $m_{b1}/m_{b2} = 1{,}11$, отношение $m_{b3}/m_{b4} = 1{,}21$, отношение $m_{b5}/m_{b6} = 1{,}71$.

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 отношение $m_{b1}/m_{b2} = 1{,}11$, отношение $m_{b3}/m_{b4} = 1{,}21$, отношение $m_{b5}/m_{b6} = 1{,}7$.

При изменении коэффициента c соотношения оптимальных относительных ширин боковых обрезных досок практически мало отличаются.

Следует отметить, что оптимальная относительная суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок при изменении коэффициента c изменяется плавно и незначительно, хотя при этом размеры брусьев и боковых обрезных досок изменяются более существенно. Таким образом, определено глобальное оптимальное значение коэффициента изменения толщин брусьев c, при котором наблюдается максимальная суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок. Это значение коэффициента изменения толщин брусьев c = 3,0.

Следует также обратить внимание, что целевая функция в диапазоне изменения коэффициента c = 2,0...3,8 отличается от максимального значения целевой функции всего лишь на 0,1%. Однако при этом не столь существенно изменяются слагаемые целевой функции $Z_{\text{бр}}$ и $Z_{\text{д}}$.

4.4. Раскрой пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с учетом ширины пропила

Постановка и математическая модель задачи. Ранее определение оптимальных относительных размеров брусьев и боковых досок для данного варианта раскроя пиловочника было выполнено без учета ширины пропила. Рассмотрим влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок [43, 44]. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев разной толщины и с учетом ширины пропила представлена на рис. 4.15.

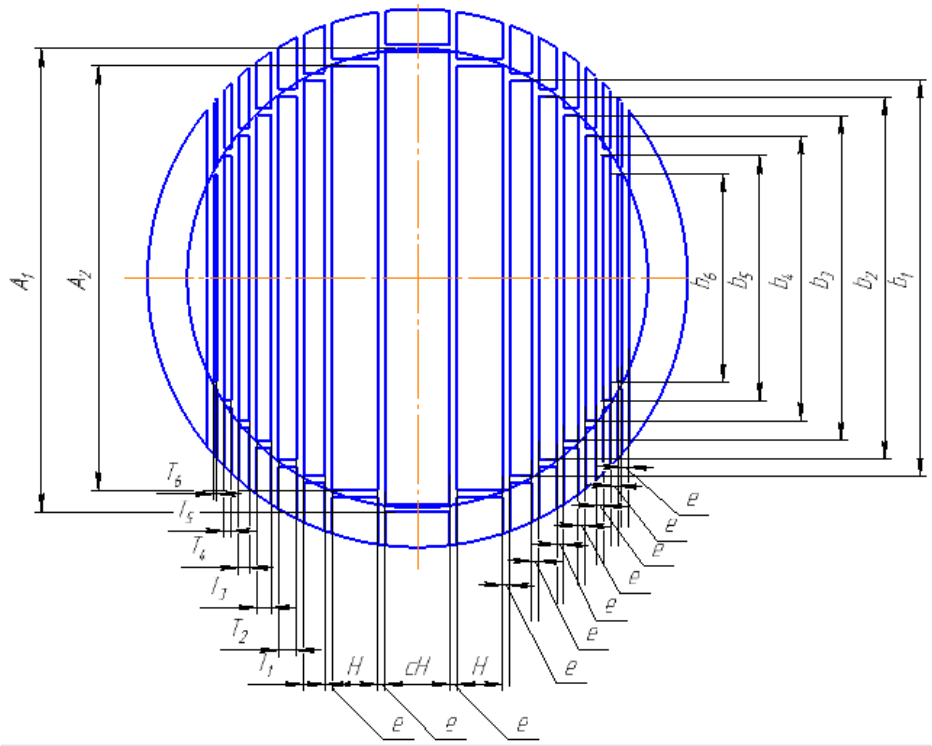


Рис. 4.15. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трёх брусьев разной толщины и шести пар боковых досок с учетом ширины пропила

Целевую функцию для данной схемы раскроя пиловочника представляем в виде суммы площадей поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок, так как рассматривается пифагорическая зона, в которой длина получаемых брусьев и боковых обрезных досок равна длине бревна [44].

$$Z = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 + 2T_5b_5 + 2T_6b_6. \quad (4.174)$$

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника будут иметь следующий вид [44].

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \quad (4.175)$$

Для боковых брусьев:

$$\begin{gathered} d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0, \\ d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - 8eH - 4e^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.176}$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \\ d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 - \\ -8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.177}$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \\ d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - \\ -4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 24eT_1 - \\ -4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.178}$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e)^2 = 0. \\ d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - \\ -16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 32eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - \\ -4T_3^2 - 32eT_3 - 64e^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.179}$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \\ d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - \\ -20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 40eH - 4T_1^2 - \\ -8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 40eT_2 - \\ -4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.180}$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$\begin{gathered} d^2 - b_5^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 12e)^2 = 0, \\ d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - \\ -4cHT_5 - 24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -8HT_4 - 8HT_5 - 48eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - \\ -8T_1T_5 - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - \\ -48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 48eT_3 - 4T_4^2 - \\ -8T_4T_5 - 48eT_4 - 4T_5^2 - 48eT_5 - 144e^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.181}$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_6^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 2T_6 + 14e)^2 = 0,$$
$$d^2 - b_6^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 -$$
$$-4cHT_5 - 4cHT_6 - 28ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 -$$
$$-8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_6 - 56eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 -$$
$$-8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 56eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 -$$
$$-56eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - 56eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 -$$
$$-8T_4T_6 - 56eT_4 - 4T_5^2 - 8T_5T_6 - 56eT_5 - 4T_6^2 - 56eT_6 - 196e^2 = 0. \quad (4.182)$$

Полагаем, что математическая модель задачи оптимизации для данной схемы раскроя пиловочника составлена. В этих формулах размеры брусьев и боковых обрезных досок взаимосвязаны и зависят от диаметра пиловочника в вершинном торце.

Решение математической модели. Для решения данной математической модели раскроя пиловочника воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$L = cHA_1 + 2HA_2 + 2T_1b_1 + 2T_2b_2 + 2T_3b_3 + 2T_4b_4 +$$
$$+\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH -$$
$$-4H^2 - 8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 -$$
$$-8ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) +$$
$$+\lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 -$$
$$-4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH -$$
$$-4T_1^2 - 8T_1T_2 - 24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 -$$
$$-c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16ecH - 4H^2 -$$
$$-8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 -$$
$$-4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 - 32eT_3 - 64e^2) +$$
$$+\lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 -$$
$$-4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 -$$
$$-8HT_3 - 8HT_4 - 40eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 -$$
$$-4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - \quad (4.183)$$
$$-40eT_4 - 100e^2) + \lambda_7(d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 -$$
$$-4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 -$$
$$-4cHT_5 - 24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 -$$
$$-8HT_4 - 8HT_5 - 48eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 -$$
$$-8T_1T_5 - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 -$$
$$-48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 48eT_3 - 4T_4^2 -$$
$$-8T_4T_5 - 48eT_4 - 4T_5^2 - 48eT_5 - 144e^2) +$$
$$+\lambda_8(d^2 - b_6^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 -$$
$$-4cHT_5 - 4cHT_6 - 28ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 -$$
$$-8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_6 - 56eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 -$$
$$-8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 56eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 -$$
$$-56eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - 56eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 -$$
$$-8T_4T_6 - 56eT_4 - 4T_5^2 - 8T_5T_6 - 56eT_5 - 4T_6^2 - 56eT_6 - 196e^2.$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю. По аналогии с решением предыдущих математических моделей находим алгоритм решения задачи.

Алгоритм решения задачи [82]. В этих формулах, полученных с учетом ширины пропила, все размеры брусьев и досок взаимосвязаны, и непосредственно определить оптимальные размеры не представляется возможным. В связи с этим предлагается использовать численный метод. Для этого составляем алгоритм решения задачи. Для упрощения выполнения расчетов и анализа результатов алгоритм решения задачи представляем в относительных единицах, полагая $m_e = e/d, m_H = H/d$.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (4.184)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (4.185)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + 2\frac{(1 - ((cm_H + 2m_H + 2m_e)^2 + m_H^2(c+2)^2 + 2m_e m_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (4.186)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H + 4m_e)\right). \quad (4.187)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + 2\frac{(m_{A_2}^2 - m_H^2(c+2)^2 - 2m_H m_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (4.188)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 4m_e\right). \quad (4.189)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 6m_e)). \quad (4.190)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 6m_e)}{m_{b_2}}. \quad (4.191)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e)). \quad (4.192)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 8m_e)}{m_{b_3}}. \quad (4.193)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e)). \quad (4.194)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 10m_e)}{m_{b_4}}. \quad (4.195)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)). \quad (4.196)$$

Относительная ширина наружной пласти шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_6} = m_{b_5} - \frac{2m_{T_4}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 12m_e)}{m_{b_5}}. \quad (4.197)$$

Относительная толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_6} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_6}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + \\ +2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e)). \quad (4.198)$$

Относительная площадь поперечных сечений брусьев:

$$Z_{бр} = cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}. \quad (4.199)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{д} = 2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{T_2} m_{b_2} + 2m_{T_3} m_{b_3} + \\ +2m_{T_4} m_{b_4} + 2m_{T_5} m_{b_5} + 2m_{T_6} m_{b_6}. \quad (4.200)$$

Суммарная площадь поперечных сечений брусьев и досок:

$$Z = Z_{бр} + Z_{д}. \quad (4.201)$$

Выполнение расчетов. Расчеты выполняются в такой последовательности. Вначале задаемся величиной коэффициента изменения толщины брусьев c, затем выбираем относительную ширину пропила m_e. Для этого варианта производим расчеты по алгоритму, задаваясь относительной толщиной бруса m_H в определенных пределах. По результатам расчетов отыскиваем вариант, при котором целевая функция принимает максимальное значение. Этот вариант расчета и заносим в табл. 4.5…4.11.

Таблица 4.5

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 1,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}	m_{T3}
1	0	0,116	0,9932	0,9374	0,8654	0,0765	0,7768	0,0643	0,6725	0,0551
1	0,002	0,123	0,9924	0,9278	0,8475	0,0768	0,7511	0,0626	0,6410	0,0516
1	0,004	0,13	0,9915	0,9173	0,8281	0,0772	0,7236	0,0608	0,6075	0,0480
1	0,006	0,138	0,9904	0,9047	0,8043	0,0781	0,6888	0,0593	0,5640	0,0444
1	0,008	0,147	0,9891	0,8894	0,7750	0,0794	0,6454	0,0579	0,5083	0,0406
1	0,01	0,157	0,9875	0,8711	0,7392	0,0812	0,5912	0,0565	0,4371	0,0364

Продолжение табл. 4.5

m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$Z_{бр}$	$Z_{д}$	Z
0,551182	0,047187	0,408318	0,039227	0,232924	0,029828	0,332716	0,404534	0,737249649
0,517331	0,04216	0,377845	0,033042	0,215915	0,025272	0,350313	0,370238	0,720550431
0,481904	0,036969	0,347468	0,026734	0,203177	0,020725	0,367417	0,337022	0,704438861

Окончание табл. 4.5

m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,433909	0,031601	0,302677	0,020068	0,176291	0,015622	0,386383	0,302599	0,68898176
0,370461	0,025837	0,240901	0,012851	0,137354	0,009986	0,406906	0,267405	0,67431100
0,287008	0,019258	0,158456	0,004719	0,099647	0,003828	0,428597	0,23211	0,66070735

Таблица 4.6

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 1,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
1,5	0	0,107	0,987036	0,927227	0,855241	0,071865	0,768148	0,061021	0,666424
1,5	0,002	0,114	0,985271	0,9152	0,834112	0,072298	0,738491	0,059334	0,630143
1,5	0,004	0,121	0,983391	0,902113	0,811148	0,07267	0,706358	0,057507	0,591099
1,5	0,006	0,128	0,981395	0,887919	0,786223	0,072972	0,671517	0,055523	0,548982
1,5	0,008	0,137	0,978657	0,868608	0,751153	0,074314	0,620535	0,054025	0,483991
1,5	0,01	0,148	0,975047	0,842945	0,703161	0,076516	0,548417	0,052587	0,388051

Окончание табл. 4.6

m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$Z_{д}$	Z
0,05265	0,54861	0,04525	0,41069	0,03784	0,2426	0,0291	0,3568	0,3817	0,7385870
0,04910	0,50912	0,04010	0,37351	0,03146	0,2172	0,0242	0,3771	0,3450	0,7221602
0,04537	0,46727	0,03475	0,33574	0,02492	0,1959	0,0193	0,3967	0,3095	0,7063607
0,04142	0,42285	0,02918	0,29776	0,01821	0,1809	0,0144	0,4157	0,2755	0,6912798
0,03744	0,34857	0,02310	0,22433	0,01061	0,1321	0,0083	0,4391	0,2380	0,6771315
0,03271	0,23264	0,01546	0,10337	0,00104	0,0833	0,0009	0,4659	0,1982	0,6642138

Таблица 4.7

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 2,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
2	0	0,098	0,980604	0,919965	0,84718	0,069653	0,759816	0,059417	0,658136
2	0,002	0,104	0,978129	0,907524	0,826287	0,069625	0,731365	0,057368	0,624376
2	0,004	0,111	0,975047	0,892018	0,799769	0,070154	0,694453	0,055615	0,579205
2	0,006	0,118	0,971753	0,875068	0,770735	0,070578	0,654044	0,05365	0,529942
2	0,008	0,126	0,967727	0,854166	0,734239	0,071446	0,602119	0,051758	0,464858
2	0,01	0,135	0,96286	0,828493	0,688477	0,072629	0,535458	0,049652	0,37883

Окончание табл. 4.7

m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,05138	0,54057	0,04419	0,40301	0,03695	0,23519	0,02837	0,37251	0,36685	0,7393653
0,04756	0,50535	0,03889	0,37252	0,03055	0,22029	0,02370	0,39221	0,33089	0,7231120
0,04382	0,45585	0,03343	0,32528	0,02378	0,18702	0,01837	0,41448	0,29304	0,7075364
0,03978	0,40259	0,02767	0,27676	0,01678	0,16024	0,01307	0,43585	0,25690	0,6927524
0,03548	0,32967	0,02135	0,20735	0,00908	0,12163	0,00715	0,45911	0,21982	0,6789455
0,03045	0,23004	0,01385	0,11279	0,00021	0,0789	0,00021	0,48366	0,18272	0,6663891

Таблица 4.8

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 2,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
2,5	0	0,089	0,974933	0,916297	0,84286	0,068816	0,754988	0,058803	0,652842
2,5	0,002	0,094	0,971995	0,904252	0,823214	0,068366	0,728916	0,056436	0,622906
2,5	0,004	0,1	0,968246	0,888952	0,797716	0,068516	0,694126	0,05441	0,581273
2,5	0,006	0,107	0,963558	0,869746	0,765123	0,069192	0,648668	0,052594	0,525252
2,5	0,008	0,114	0,958528	0,848622	0,729141	0,069682	0,598335	0,050441	0,463242
2,5	0,01	0,122	0,952352	0,822338	0,683448	0,0705	0,532844	0,048107	0,380046

Окончание табл. 4.8

m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,05087	0,53477	0,04375	0,39651	0,03651	0,22742	0,02788	0,38002	0,35966	0,7396846
0,04684	0,50523	0,03834	0,37425	0,03017	0,22474	0,02354	0,39841	0,32510	0,7235254
0,04292	0,46108	0,03282	0,33475	0,02347	0,20258	0,01847	0,41985	0,28822	0,7080787
0,03893	0,39909	0,02698	0,27510	0,01625	0,16151	0,01272	0,44387	0,24960	0,6934840
0,03449	0,33126	0,02065	0,21361	0,00869	0,13412	0,00702	0,46666	0,21321	0,6798803
0,02937	0,23704	0,01326	0,12831	0,00011	0,08652	0,00011	0,49111	0,17631	0,6674285

Таблица 4.9

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 3,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
3	0	0,08	0,970773	0,916515	0,84364	0,068455	0,75650	0,05853	0,65529
3	0,002	0,085	0,966941	0,903304	0,82191	0,068309	0,72722	0,05638	0,62078
3	0,004	0,091	0,962014	0,886358	0,793499	0,068786	0,68798	0,05457	0,57285
3	0,006	0,097	0,956723	0,867751	0,762313	0,069104	0,64497	0,05249	0,52056
3	0,008	0,103	0,951062	0,847372	0,728101	0,069235	0,59773	0,05011	0,46332
3	0,01	0,11	0,943981	0,821645	0,684016	0,069734	0,53528	0,04760	0,38504

Окончание табл. 4.9

m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,05069	0,53843	0,04365	0,40180	0,03652	0,23530	0,02809	0,37962	0,36009	0,7397183
0,04679	0,50259	0,03827	0,37093	0,03006	0,22037	0,02337	0,40013	0,32347	0,7236107
0,04296	0,44988	0,03271	0,32001	0,02316	0,18285	0,01786	0,42394	0,28427	0,7082260
0,03880	0,39326	0,02680	0,26793	0,01600	0,15283	0,01240	0,44675	0,24693	0,6936827
0,03425	0,33230	0,02049	0,21598	0,00861	0,13811	0,00700	0,46843	0,21173	0,6801750
0,02911	0,24549	0,01325	0,14084	0,00031	0,09639	0,00031	0,49227	0,17545	0,6677343

Таблица 4.10

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 3,5

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
3,5	0	0,072	0,967727	0,918251	0,845876	0,06869	0,759248	0,05871	0,6586
3,5	0,002	0,077	0,963	0,904015	0,822097	0,068924	0,72663	0,056841	0,619145
3,5	0,004	0,082	0,957931	0,888436	0,796179	0,06903	0,691259	0,054773	0,576745
3,5	0,006	0,087	0,952512	0,871441	0,767971	0,068992	0,652892	0,052483	0,531116
3,5	0,008	0,094	0,94433	0,846115	0,724411	0,070184	0,590833	0,050713	0,452334
3,5	0,01	0,099	0,93805	0,825433	0,689924	0,069691	0,543681	0,047705	0,396394

Окончание табл. 4.10

m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,05084	0,54240	0,04381	0,40669	0,03672	0,24170	0,02839	0,37609	0,363	0,7395514
0,04712	0,49960	0,03848	0,36614	0,03015	0,21287	0,02326	0,39874	0,324	0,7234697
0,04315	0,45448	0,03291	0,32545	0,02340	0,18948	0,01816	0,42063	0,287	0,7080929
0,03892	0,40692	0,02708	0,28533	0,01648	0,17461	0,01310	0,44167	0,251	0,6935400
0,03452	0,31618	0,02042	0,19361	0,00819	0,11061	0,00639	0,46975	0,210	0,6801014
0,02939	0,26023	0,01373	0,15833	0,00092	0,10685	0,00088	0,48847	0,179	0,6675079

Таблица 4.11

Оптимальные относительные размеры брусьев и досок,
а также величина целевой функции с учетом ширины пропила для c = 4,0

c	m_e	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
4	0	0,065	0,965609	0,920815	0,848946	0,06924	0,76274	0,059113	0,6625
4	0,002	0,07	0,96	0,905662	0,823139	0,06992	0,726672	0,057573	0,617815
4	0,004	0,074	0,955188	0,892018	0,800653	0,069564	0,696543	0,055193	0,582833
4	0,006	0,079	0,948759	0,873959	0,770164	0,069923	0,654344	0,053176	0,531438
4	0,008	0,085	0,940425	0,850485	0,729803	0,070829	0,597102	0,051254	0,459391
4	0,01	0,09	0,932952	0,828493	0,692627	0,070648	0,545483	0,048413	0,396713

Окончание табл. 4.11

m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$z_{бр}$	$z_{д}$	Z
0,05117	0,54677	0,04411	0,41167	0,03702	0,24775	0,02874	0,37076	0,36851	0,7392767
0,04766	0,49647	0,03886	0,36056	0,03034	0,20359	0,02316	0,39559	0,32758	0,7231753
0,04353	0,46142	0,03329	0,33340	0,02380	0,19879	0,01862	0,41475	0,29303	0,7077913
0,03945	0,40567	0,02746	0,28193	0,01670	0,16821	0,01315	0,43789	0,25535	0,6932462
0,03503	0,32391	0,02092	0,20166	0,00868	0,11731	0,00682	0,46432	0,21543	0,6797650
0,02991	0,25829	0,01406	0,15310	0,00107	0,09927	0,00102	0,48499	0,18229	0,6672825

Анализ результатов. Некоторые результаты расчетов представлены на рисунках. При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается (рис. 4.16). При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

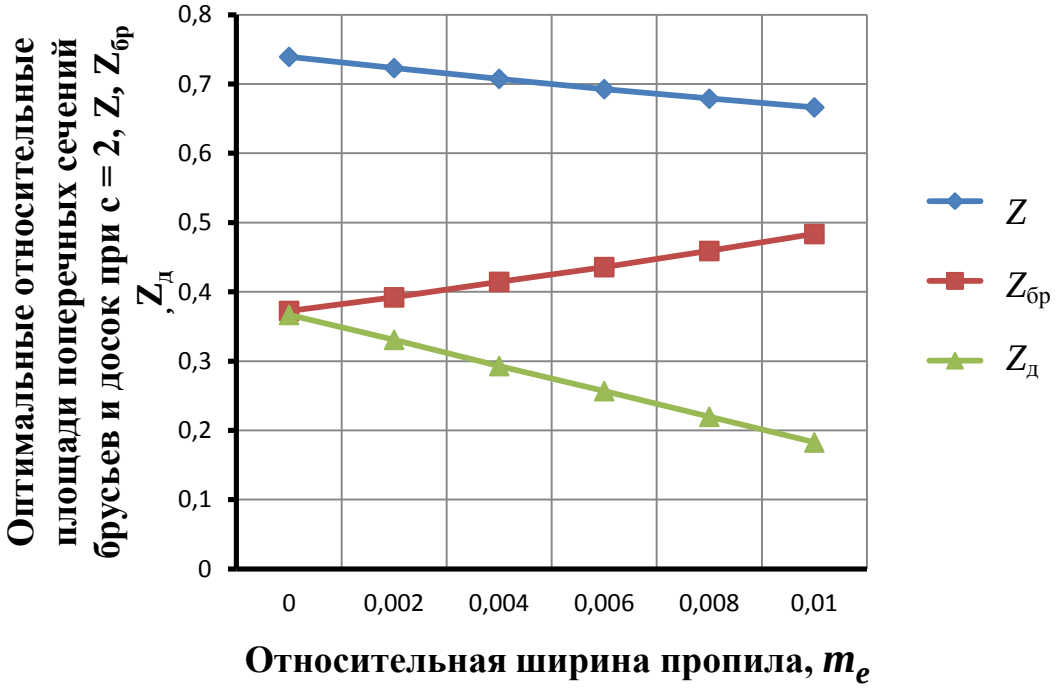


Рис. 4.16. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и досок при коэффициенте c = 2,0

Следовательно, с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок изменяются неравнозначно. Оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила уменьшаются более интенсивно, чем при этом возрастают оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев. В результате суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

На рис. 4.16 наблюдается прямо пропорциональное изменение площадей поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок. В итоге суммарное значение целевой функции с увеличением относительной ширины пропила уменьшается также прямо пропорционально.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.17). При этом оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски приближается к величине ширины предпоследней боковой обрезной доски и при $m_e = 0{,}01$ принимает практически равное значение ширины пятой боковой обрезной доски.

Следовательно, оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок зависят не только от величины относительной ширины пропила, но и от расположения этих досок в пиловочнике. Анализируя этот график, можно рекомендовать рациональный диапазон относительной ширины пропила в пределах 0,004…0,006. На практике иногда относительная ширина пропила находится в пределах 0,008…0,01 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Следовательно, при составлении поставов необходимо ширину пропила учитывать дифференцированно.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок незначительно возрастает, а оптимальные относительные толщины остальных боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.18). При этом оптимальная относительная толщина трех крайних боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила уменьшается более интенсивно. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ толщина крайней (шестой пары) боковой обрезной доски принимает практически равное значение толщины пятой боковой обрезной доски. Оптимальная относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок при $m_e = 0{,}01$ приближается к нулевому значению.

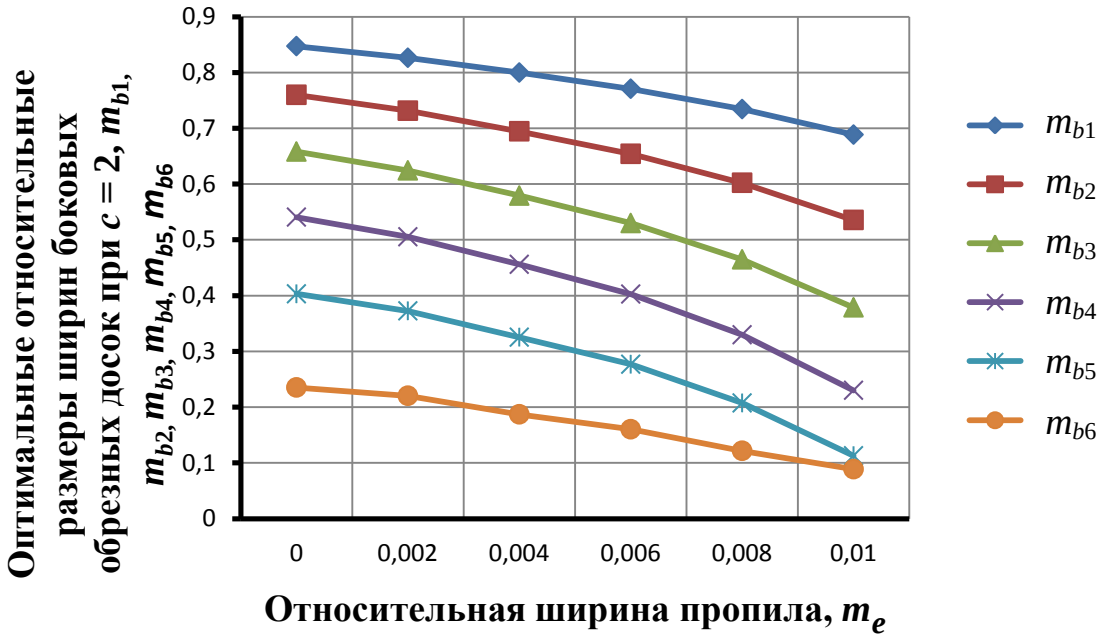


Рис. 4.17. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

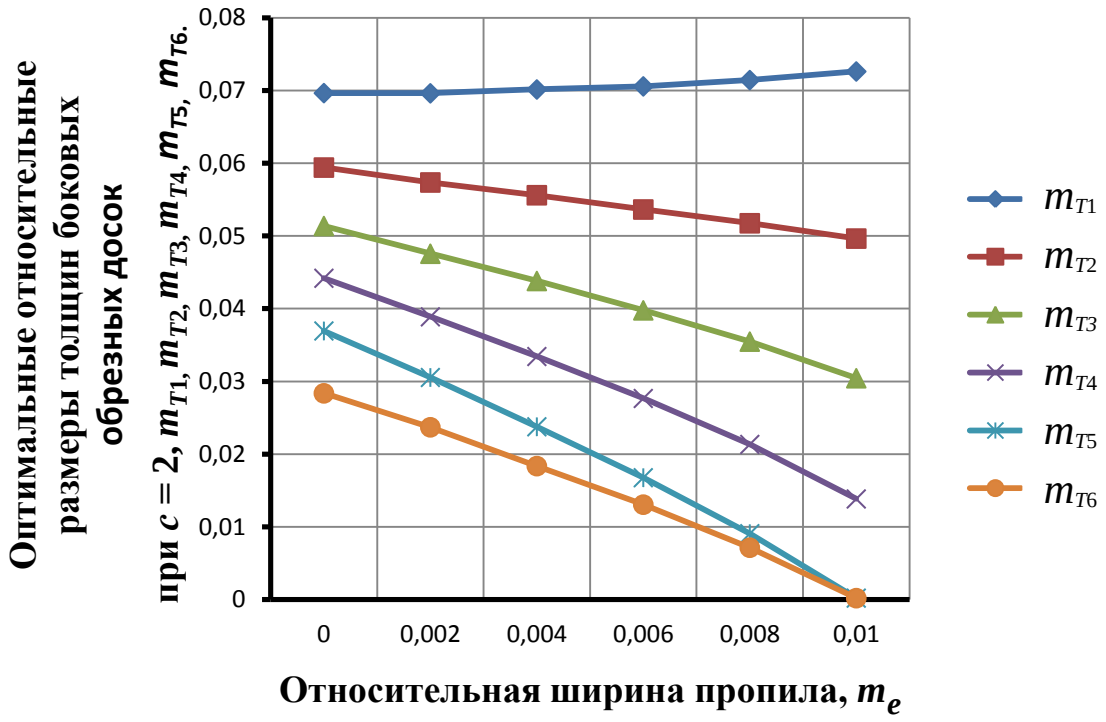


Рис.4.18. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 2,0

Таким образом, относительная ширина пропила оказывает существенное влияние прежде всего на размеры боковых обрезных досок, причем эти размеры досок зависят не только от относительной ширины пропила, но также от места расположения их в пиловочнике.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 2,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (рис. 4.19). Оптимальная относительная толщина центрального бруса с увеличением относительной ширины пропила возрастает, и сумма толщины брусьев при этом увеличивается. При этом относительные ширины пластей центрального бруса немного уменьшаются, а относительные ширины боковых брусьев уменьшаются в большей степени.

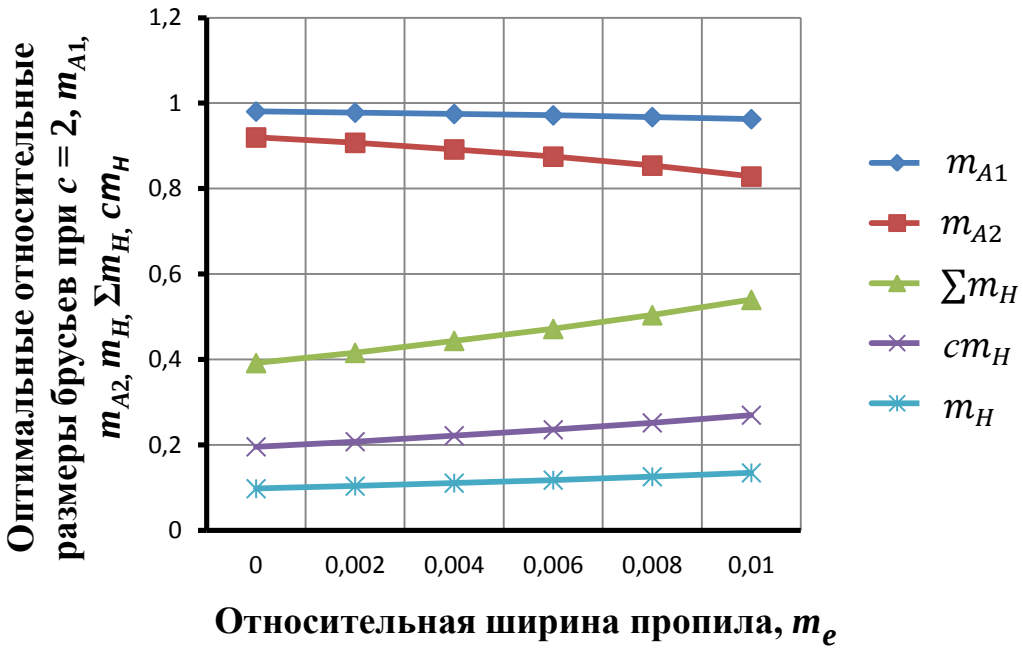


Рис. 4.19. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры брусьев при коэффициенте c = 2,0

Следовательно, с увеличением относительной величины пропила оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок существенно изменяются. При этом относительные размеры брусьев возрастают, а оптимальные относительные размеры боковых обрезных досок существенно уменьшаются.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев увеличивается, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок уменьшается (см. рис. 4.20). При этом суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок уменьшается.

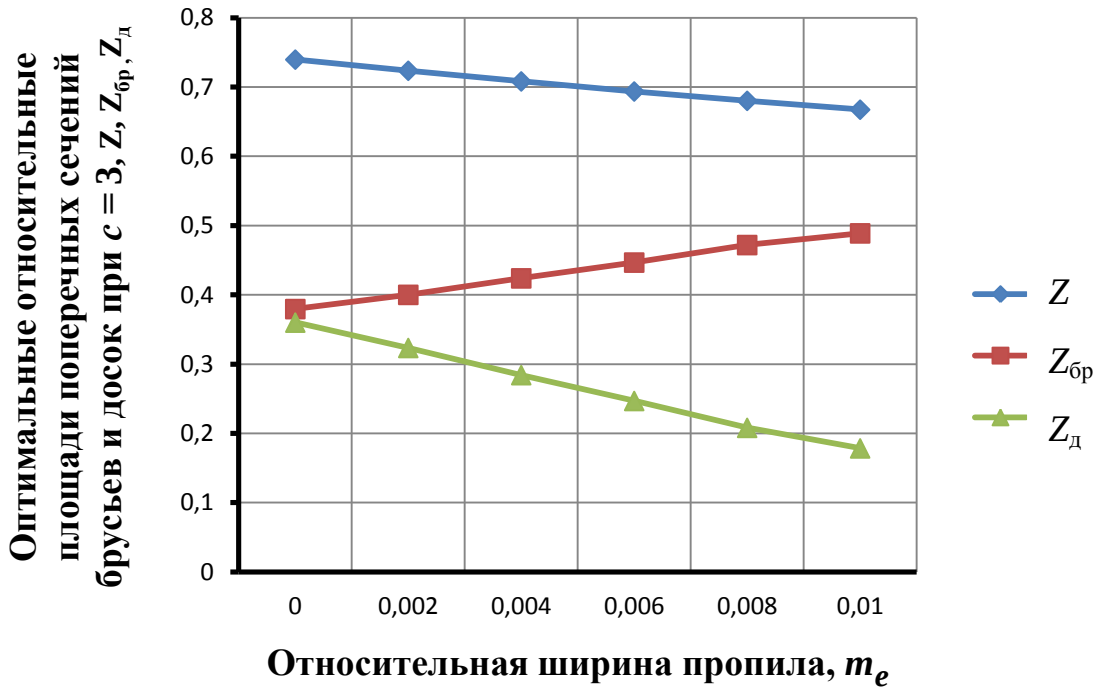


Рис. 4.20. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 3,0

Если сравнить рис. 4.20 с рис. 4.16, то можно отметить, что целевая функция отличается незначительно, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок при c = 3,0 принимает немного меньшее значение, чем при c = 2,0. Относительная площадь поперечного сечения брусьев при c = 3,0 (рис. 4.20) принимает большее значение по сравнению с вариантом, когда c = 2,0 (см. рис. 4.16). В итоге суммарная площадь поперечного сечения брусьев и досок при c = 3,0 немного больше, чем при c = 2,0.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.21). Оптимальная относительная ширина крайней боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила приближается к величине относительной ширины предпоследней боковой обрезной доски. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ оптимальная относительная ширина пятой пары боковых обрезных досок приближается к относительной ширине шестой пары боковой доски и принимает значение равное 0,10613.

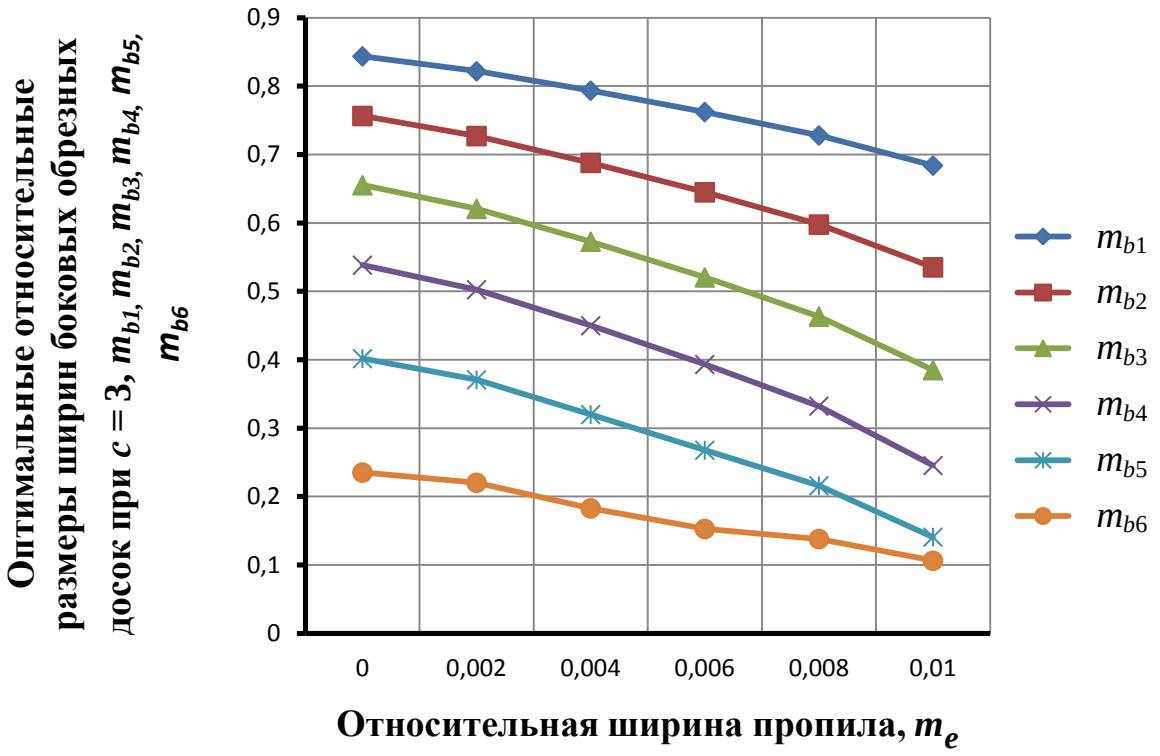


Рис. 4.21. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

В этом случае следует также отметить, что предельная относительная ширина пропила не должна превышать величины 0,008 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Наиболее приемлемая для практики относительная ширина пропила, как правило, находится в пределах 0,004…0,006. Тогда диапазон изменения размеров боковых обрезных досок и брусьев не очень значителен.

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок незначительно возрастает, а оптимальные относительные толщины остальных боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.22). При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ оптимальная относительная толщина пятой и шестой пар боковых обрезных досок принимает величину близкую к нулевому значению.

Этот график также показывает, что относительная ширина пропила не должна превышать размера 0,006 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Сравнивая между собой рис. 4.21 и рис. 4.22, следует отметить, что относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются в большей степени по сравнению с относительными ширинами этих боковых обрезных досок.

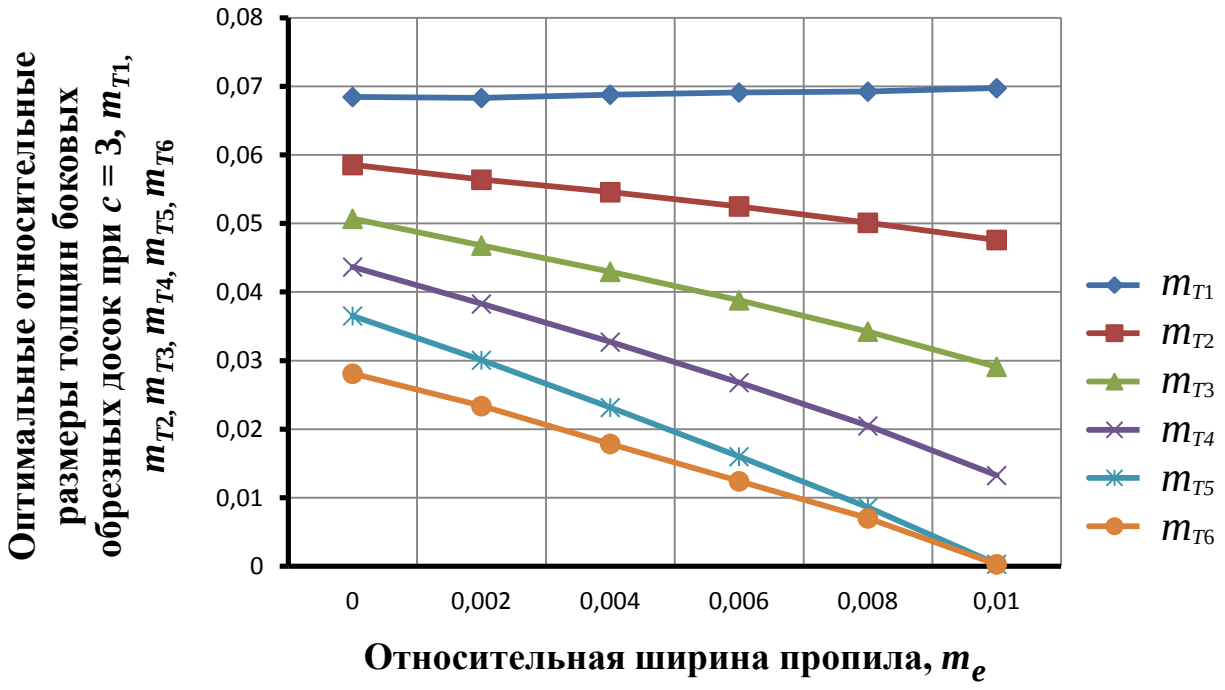


Рис. 4.22. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 с увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина бокового бруса увеличивается (см. рис. 4.23).

С увеличением относительной ширины пропила оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает и сумма относительных толщин брусьев увеличивается.

При этом оптимальные относительные ширины центрального и боковых брусьев уменьшаются.

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается (см. рис. 4.24). При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок с увеличением коэффициента c вначале уменьшается и при c = 3,0 становится минимальной, а далее увеличивается.

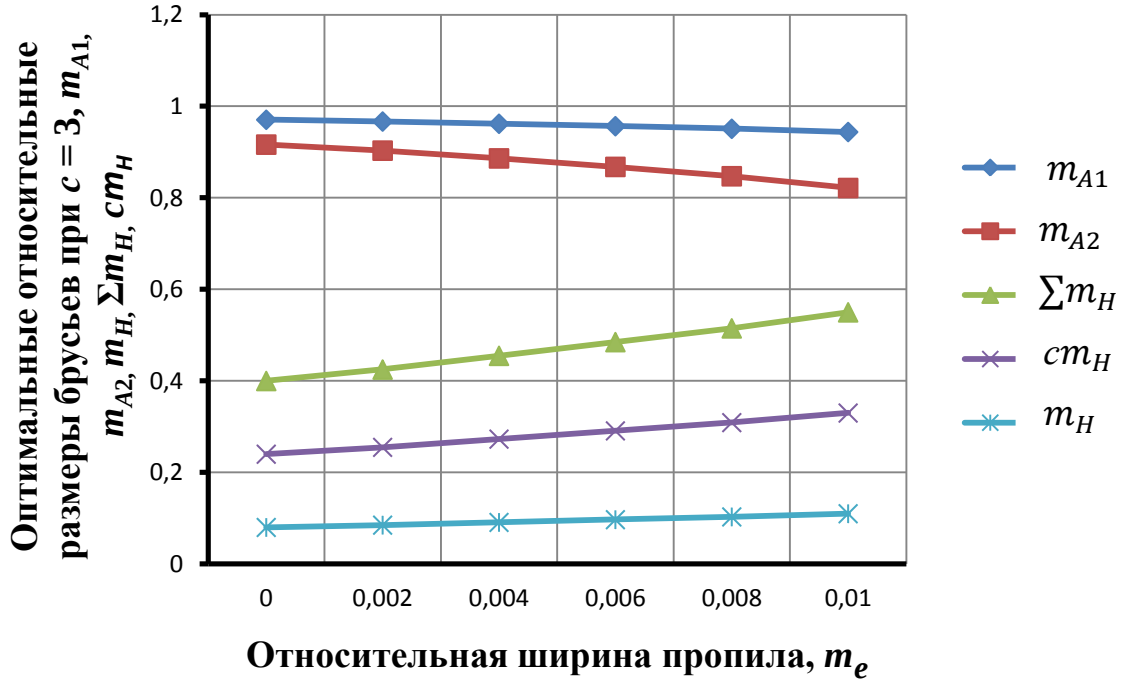


Рис. 4.23. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины и толщины брусьев при коэффициенте c = 3,0

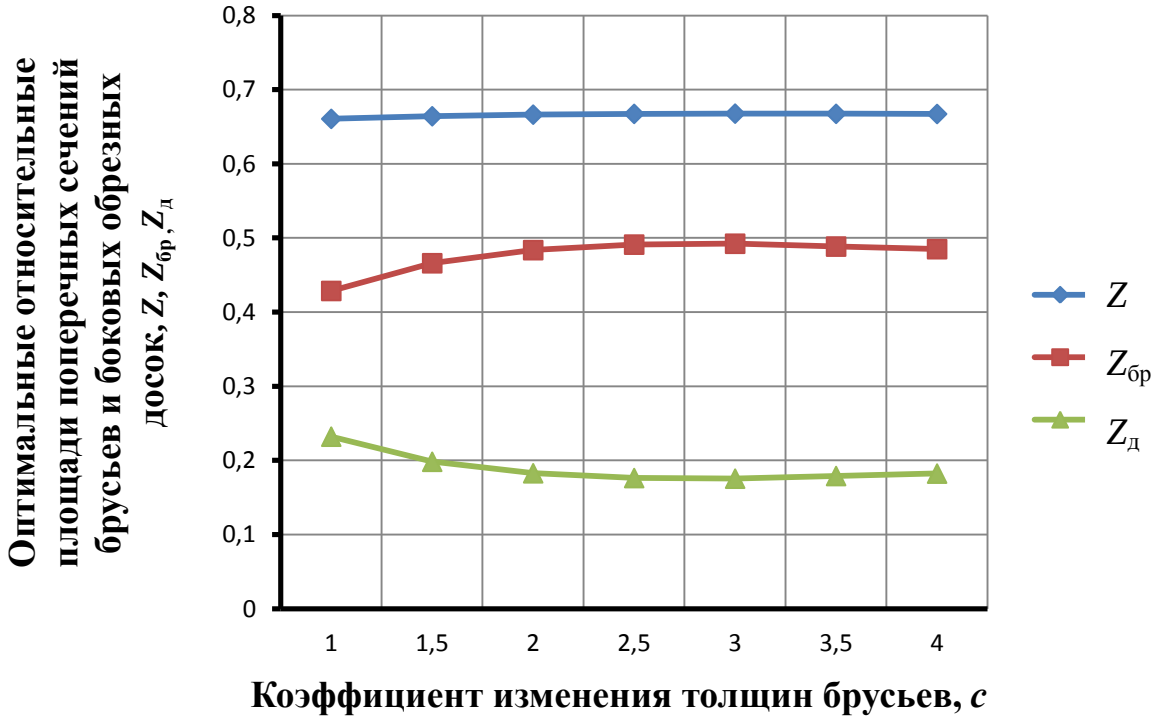


Рис. 4.24. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

Целевая функция с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c вначале возрастает и при c = 3,0 принимает максимальное значение, а затем с увеличением коэффициента c незначи-

тельно уменьшается. Следует обратить внимание, что целевая функция при изменении коэффициента соотношения толщин брусьев c изменяется не столь значительно, хотя составляющие этой целевой функции $Z_{бр}$ и $Z_д$ изменяются существенно. Но следует отметить, что в диапазоне c = 2,5…3,5 это изменение не столь значительное.

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина центрального бруса увеличивается, а оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается (рис. 4.25). Сумма оптимальных относительных толщин брусьев при этом возрастает и принимает максимальное значение при c = 3,0, достигая значения $\Sigma m_н$ = 0,55, а затем незначительно уменьшается. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c относительная ширина пласти центрального бруса незначительно уменьшается. При этом оптимальная относительная ширина наружной пласти бокового бруса также уменьшается, особенно до величины c = 2,5, а затем практически мало изменяется.

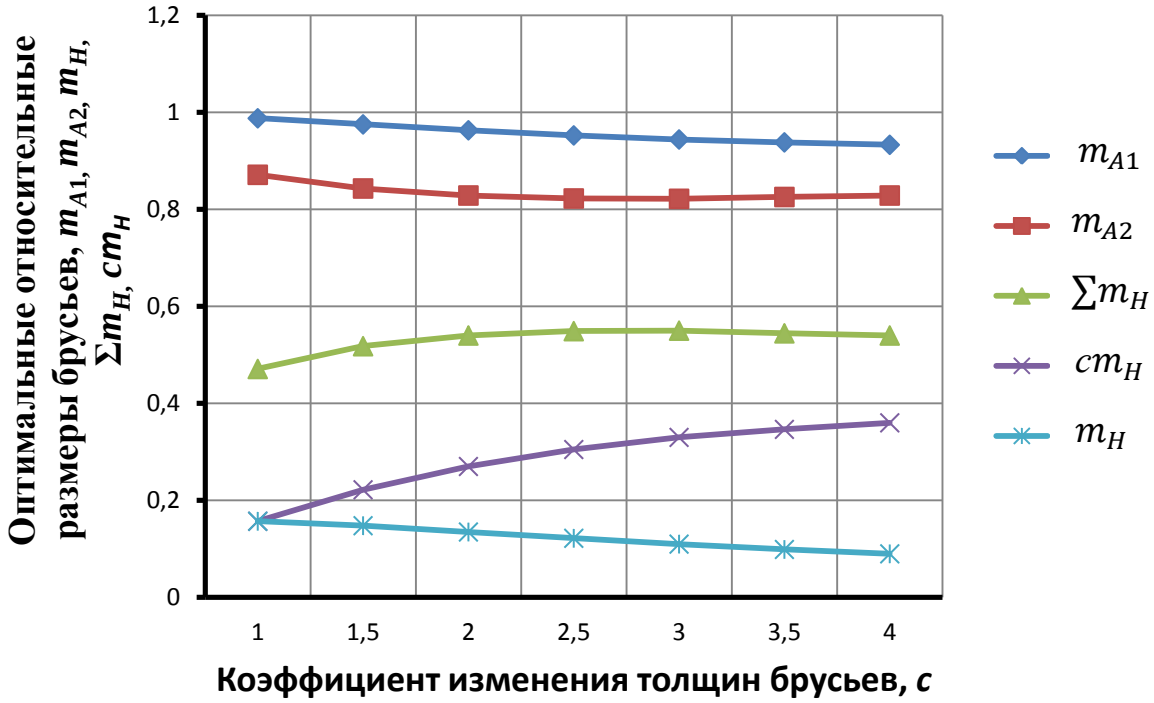


Рис. 4.25. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок вначале уменьшаются до $c = 3$, а затем незначительно увеличиваются (рис. 4.26). Оптимальные относительные толщины крайней боковой обрезной доски в этом варианте раскроя пиловочника принимают небольшие размеры, и практически доски такой толщины выпиливать невозможно, так как при $c = 1{,}5$ и более толщины этих досок принимают практически нулевое значение.

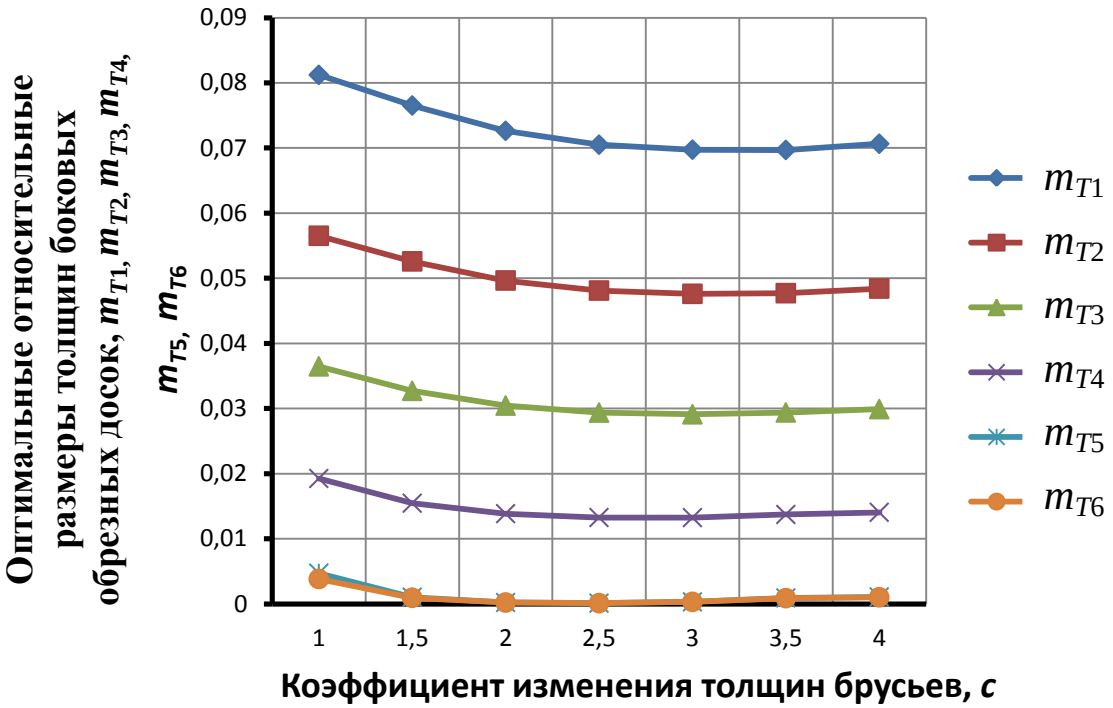


Рис. 4.26. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок вначале уменьшаются до $c = 2{,}0$, а затем незначительно изменяются (см. рис. 4.27). Оптимальные относительные ширины двух крайних боковых пар обрезных досок в этом варианте раскроя пиловочника при $c = 1{,}5$ принимают наименьшее значение, а затем с увеличением коэффициента c возрастают.

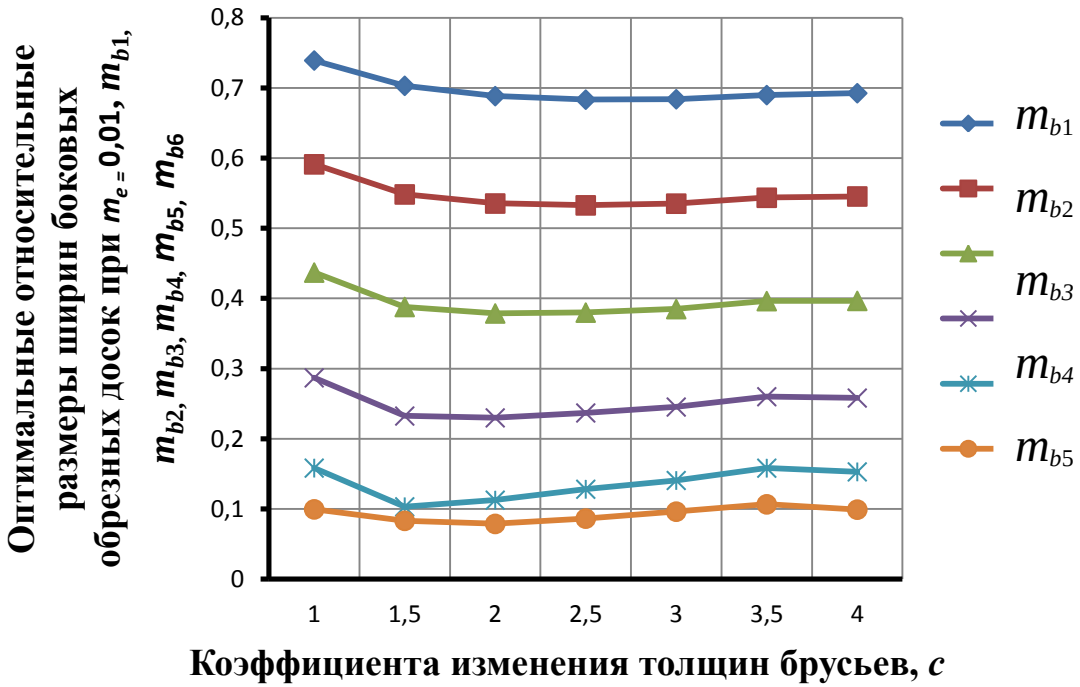


Рис. 4.27. Влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$

Таким образом, ширина пропила оказывает существенное влияние на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок. Исследованиями установлена главная закономерность: с увеличением ширины пропила оптимальная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. Этот важный аспект необходимо учитывать при расчете и составлении поставов.

Следует также учитывать и влияние коэффициента изменения толщин брусьев c на выбор размеров брусьев и боковых обрезных досок. Так, при увеличении коэффициента изменения толщин брусьев в пределах c = 1,0…2,0 оптимальные относительные размеры (толщина и ширина) боковых обрезных досок существенно уменьшаются. При этом оптимальная относительная толщина центрального бруса возрастает, а оптимальная относительная толщина бокового бруса уменьшается. Наиболее благоприятным вариантом раскроя пиловочника является диапазон изменения коэффициента c = 2,5…3,5.

4.5. Раскрой пиловочника с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски

Постановка задачи. При последующей распиловке брусьев на обрезные доски объем пиломатериалов в виде обрезных досок уменьшается, так как часть древесины превращается в опилки. В связи с этим изменится величина целевой функции [85]. Это, вероятно, повлияет на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок [91]. Важно знать, каким образом изменятся оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок при последующей распиловке брусьев на обрезные доски (рис. 4.28).

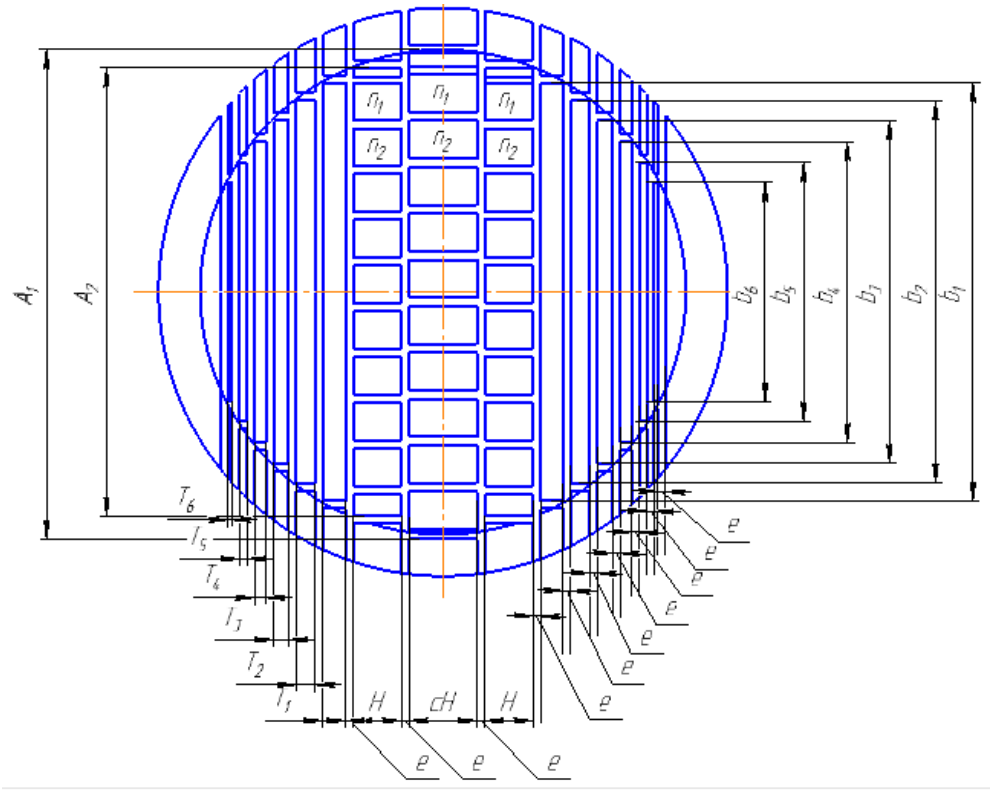


Рис. 4.28. Схема раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины с их последующей распиловкой на обрезные доски с учетом ширины пропила

Алгоритм решения задачи. По аналогии с методиками решения ранее приведенных задач оптимизации алгоритм решения для такой задачи раскроя пиловочника можно написать в следующем виде.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \qquad (4.202)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \qquad (4.203)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \\ + \frac{2(1-((cm_H+2m_H+2m_e)^2+m_H^2(c+2)^2+2m_em_H(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (4.204)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-m_{b_1}^2}-(cm_H+2m_H+4m_e)\right). \quad (4.205)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b_1} = \frac{c(1-2c^2m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \\ + \frac{2(m_{A_2}^2-m_H^2(c+2)^2-2m_Hm_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (4.206)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+4m_e\right). \quad (4.207)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-m_{b_2}^2}-(cm_H+2m_H+6m_e)\right). \quad (4.208)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}\left(cm_H+2m_H+2m_{T_1}+2m_{T_2}+6m_e\right). \quad (4.209)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = \frac{1}{2}(\sqrt{1-m_{b_3}^2}- \quad (4.210)$$

$$-\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e\right)).$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 8m_e\right). \quad (4.211)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e)) . \quad (4.212)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = m_{b_4} - \frac{2m_{T_4}}{m_{b_4}}(cm_H + 2m_H + \\ +2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 10m_e). \quad (4.213)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + \\ +2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)). \quad (4.214)$$

Относительная ширина наружной пласти шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_6} = m_{b_5} - \frac{2m_{T_5}}{m_{b_5}}(cm_H + 2m_H + \\ +2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 12m_e). \quad (4.215)$$

Относительная толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_6} = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - m_{b_6}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + \\ +2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e)). \quad (4.216)$$

Относительная площадь поперечных сечений обрезных брусьев:

$$Z_{\text{бр}} = m_H(cm_{A1} + 2m_{A1}). \quad (4.217)$$

Относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок:

$$Z_{\text{д}} = 2(m_{T1}m_{b1} + m_{T2}m_{b2} + m_{T3}m_{b3} + m_{T3}m_{b4} + m_{T5}m_{b5} + m_{T6}m_{b6}). \quad (4.218)$$

Суммарная относительная площадь поперечных сечений брусьев и обрезных досок:

$$Z = Z_{\text{бр}} + Z_{\text{д}}. \quad (4.219)$$

Суммарная площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев с учетом ширины пропила, определится по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = Z_{\text{ц}} + Z_{\text{б}} = cH\left(A_1 - \left(n_{\text{ц}} + 1\right)e\right) + 2H(A_2 - (n_{\text{б}} + 1)e). \quad (4.220)$$

В относительных единицах площадь поперечного сечения пиломатериалов, получаемых из брусьев, определится по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H\left(m_{A_1} - \left(n_{\text{ц}} + 1\right)m_e\right) + 2m_H(m_{A_2} - (n_{\text{б}} + 1)m_e). \quad (4.221)$$

Поэтому при определении оптимальных размеров брусьев и досок с учетом ширины пропила необходимо в алгоритме решения задачи вместо формулы (4.217) использовать формулы (4.220) и (4.221). При этом число досок, выпиливаемых из центрального бруса, можно определить по формуле:

$$n_{\text{ц}} = \frac{A_1}{T_{\text{ц}} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{\text{ц}}} + m_e}. \quad (4.222)$$

Число досок, получаемых из бокового бруса, можно по определить по формуле:

$$n_{\text{б}} = \frac{A_2}{T_{\text{б}} + e} = \frac{m_{A_1}}{m_{T_{\text{б}}} + m_e}. \quad (4.223)$$

Для дальнейших расчетов количество досок, получаемых из брусьев, принимается целое число.

На практике возможен вариант, когда необходимые толщины обрезных досок известны. Тогда по формулам (4.222) и (4.223) определяем количество выпиливаемых досок такого размера из централь-

ного и бокового брусьев. Затем площадь поперечного сечения этих досок определяем по формуле:

$$Z_{\text{бр}} = cm_H m_{T_{\text{ц}}} n_{\text{ц}} + 2m_H m_{T_{\text{б}}} n_{\text{б}}. \quad (4.224)$$

Далее по алгоритму решения задачи определяем оптимальные размеры брусьев и досок.

Выполнение расчетов. Расчеты производятся в такой последовательности. Задаемся значением величины коэффициента c и изменяем относительную толщину бокового бруса m_H, а затем определяем относительные ширины этих брусьев m_{A1} и m_{A2}. Далее по формулам (4.222) и (4.223) определяем число выпиливаемых досок из этих брусьев с учетом относительной ширины пропила m_e. Затем по алгоритму определяем все относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, а также относительные площади поперечных сечений брусьев и досок. Анализируем результаты расчетов для различных вариантов толщин брусьев m_H и находим наилучший (оптимальный) вариант, который и записывается в таблицу. Результаты расчетов представлены в приложении 4.1.

Анализ результатов. По результатам расчетов построены графики изменения влияния количества выпиливаемых досок из брусьев и коэффициента c на оптимальные относительные размеры и площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок для различных вариантов распиловки брусьев на обрезные доски.

Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и при коэффициенте изменения толщин c = 1,0 представлено на рис. 4.29. С увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_{\text{ц}}$ оптимальная относительная толщина центрального бруса незначительно уменьшается и, следовательно, оптимальные относительные толщины боковых брусьев также уменьшаются незначительно. В итоге оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев незначительно возрастают.

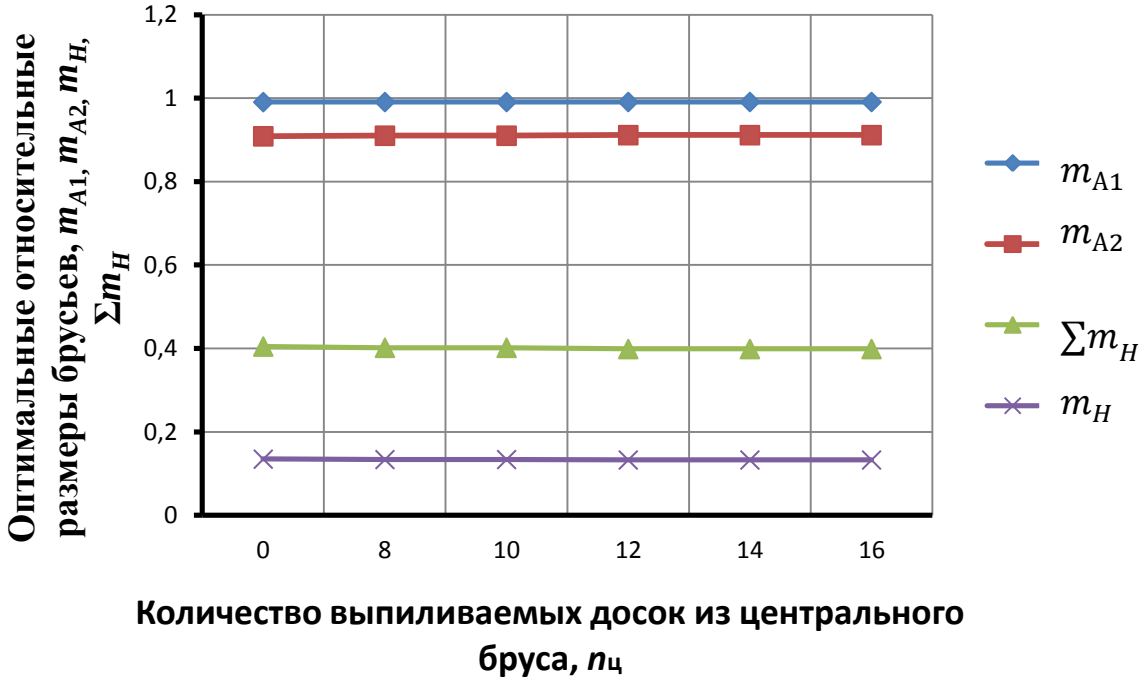


Рис. 4.29. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщин брусьев c = 1,0

Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 представлено на рис. 4.30. С увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H незначительно уменьшается и, следовательно, оптимальные относительные толщины боковых брусьев также уменьшаются незначительно. В итоге оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев незначительно возрастают. Такое изменение толщин и ширин брусьев объясняется взаимосвязью этих размеров по теореме Пифагора, где диаметр пиловочника является гипотенузой, а толщина и ширина брусьев – катетами прямоугольного треугольника.

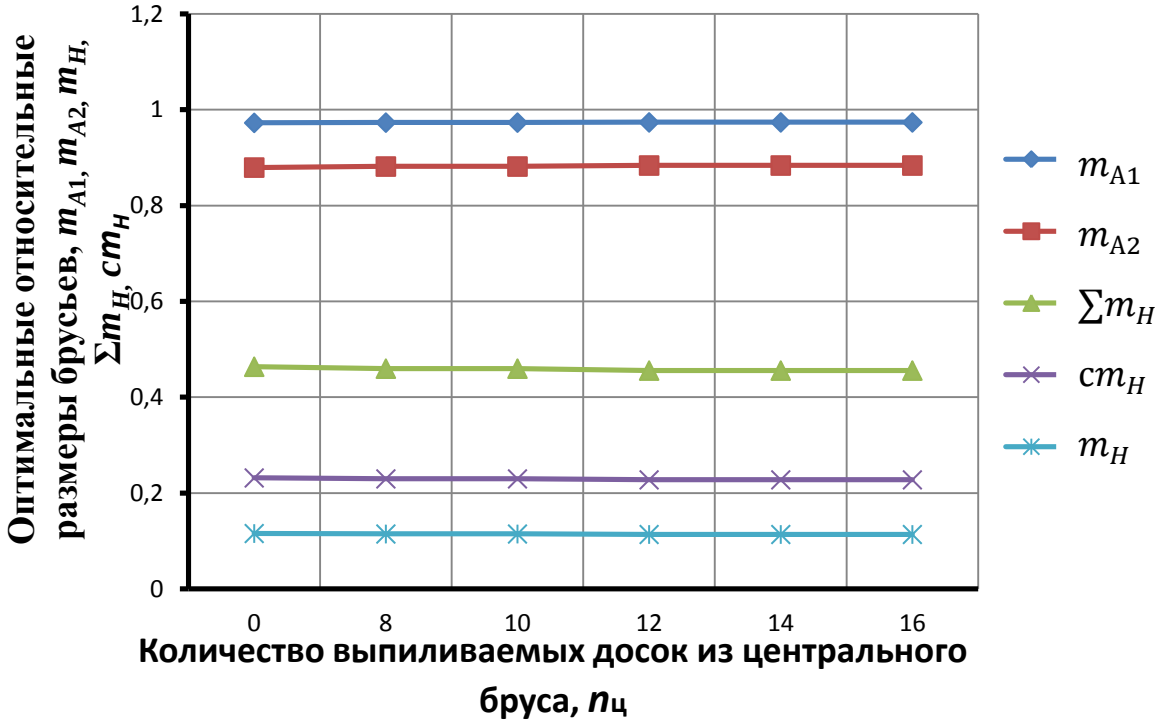


Рис. 4.30. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0

Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ на относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 представлено на рис. 4.31. С увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H незначительно уменьшается и, следовательно, оптимальные относительные толщины боковых брусьев также уменьшаются незначительно. В итоге оптимальные относительные ширины пластей центрального и боковых брусьев незначительно возрастают.

Сравнивая между собой эти два рисунка – 4.30 и 4.31, следует отметить, что с изменением коэффициента c оптимальные относительные размеры брусьев изменились. С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина бокового бруса m_H уменьшилась, а оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H увеличилась. Но при этом характер изменения оптимальных относительных размеров этих брусьев с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_ц$ сохраняется.

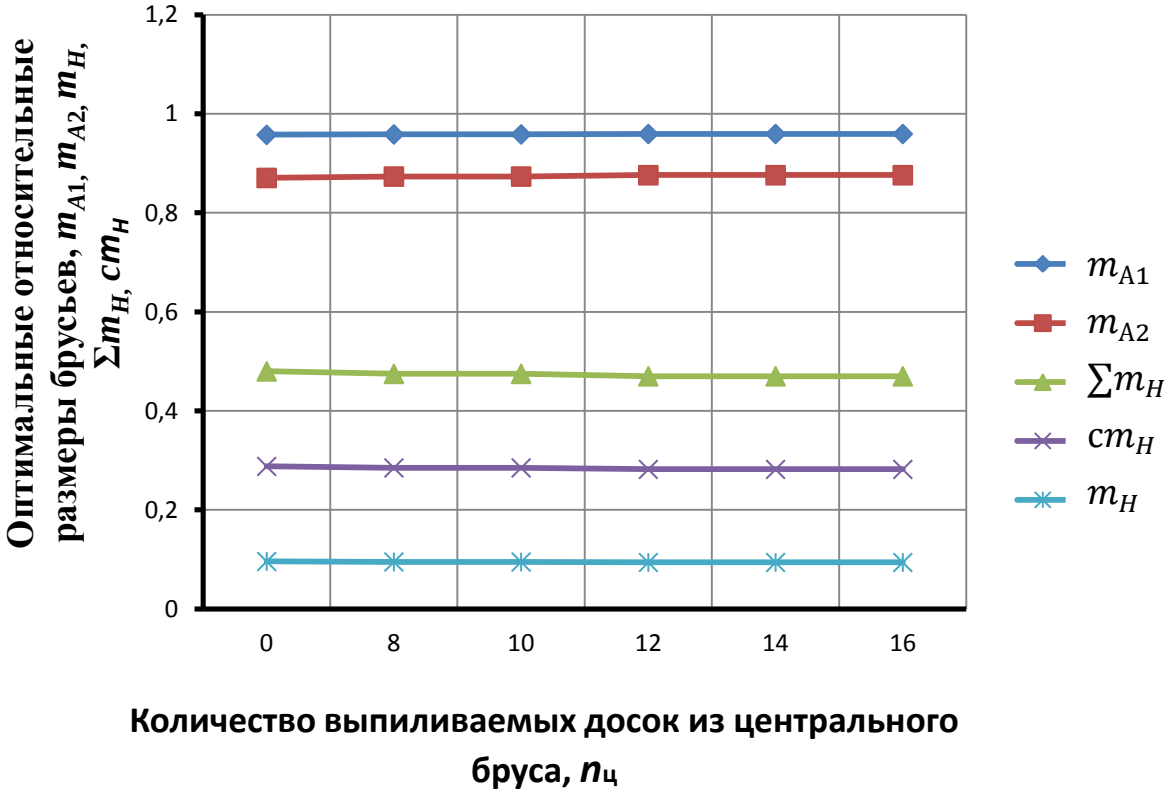


Рис. 4.31. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные размеры брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0

При последующей распиловке брусьев на обрезные доски и выпиливании из центрального бруса по 10 досок, а из боковых брусьев 8 досок с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается, оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из центрального бруса, возрастает, а из боковых брусьев уменьшается (см. рис. 4.32). Суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев, увеличивается до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается.

Целевая функция при этих условиях раскроя пиловочника с увеличением коэффициента c изменяется незначительно, принимая минимальное значение при c = 3,5.

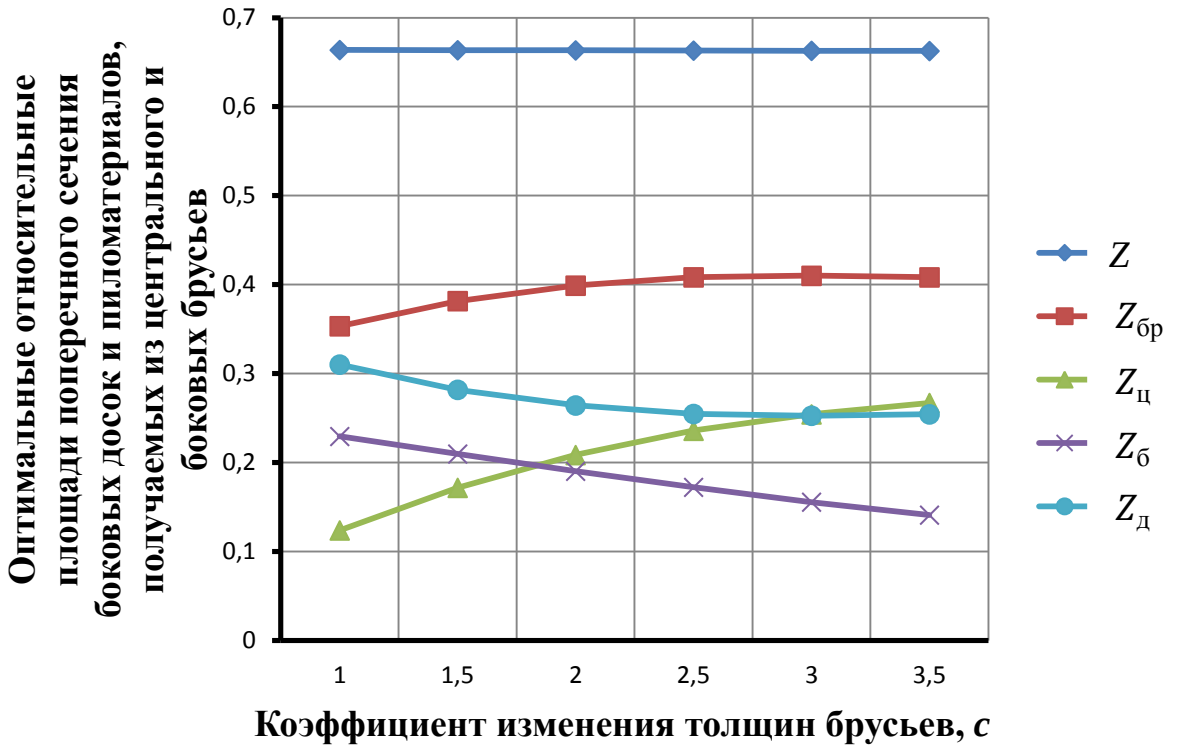


Рис. 4.32. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых досок $Z_д$ с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски при m_e = 0,006 и выпиливании $n_ц$ = 10 и $n_б$ = 8 досок

При выпиливании из центрального бруса $n_ц$ = 12 обрезных досок, а из каждого бокового бруса по $n_б$ = 10 обрезных досок с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 4.33). При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. Оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок $Z_д$ при этом уменьшается незначительно, принимая минимальное значение при c = 3,0, а затем незначительно возрастает.

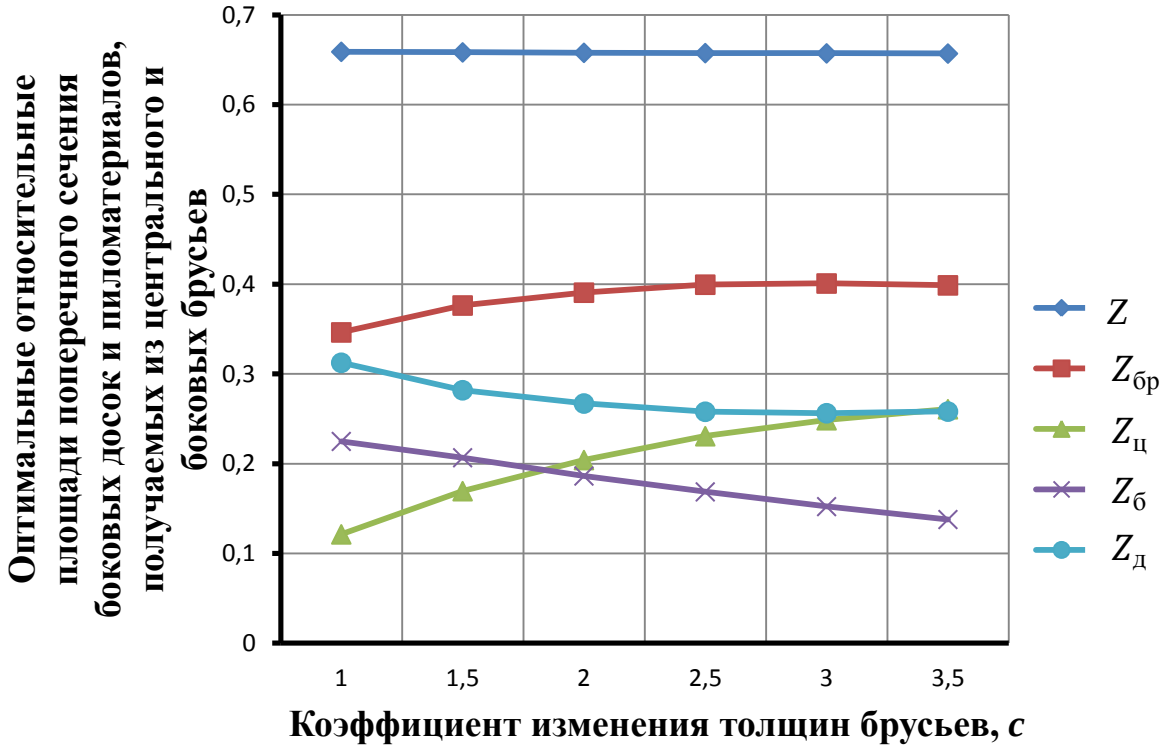


Рис. 4.33. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_{бр}$ брусьев, при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и выпиливании $n_ц$ = 12, $n_б$ = 10 досок

При раскрое центрального бруса с получением $n_ц$ = 14 обрезных досок, а из каждого бокового бруса получают по $n_б$ = 12 обрезных досок, с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 4.34). При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. В сумме оптимальная относительная площадь поперечных сечений обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. В итоге общая сумма всех оптимальных относительных площадей поперечных сечений досок, получаемых из пиловочника Z, уменьшается незначительно и принимает минимальное значение при c = 3,5.

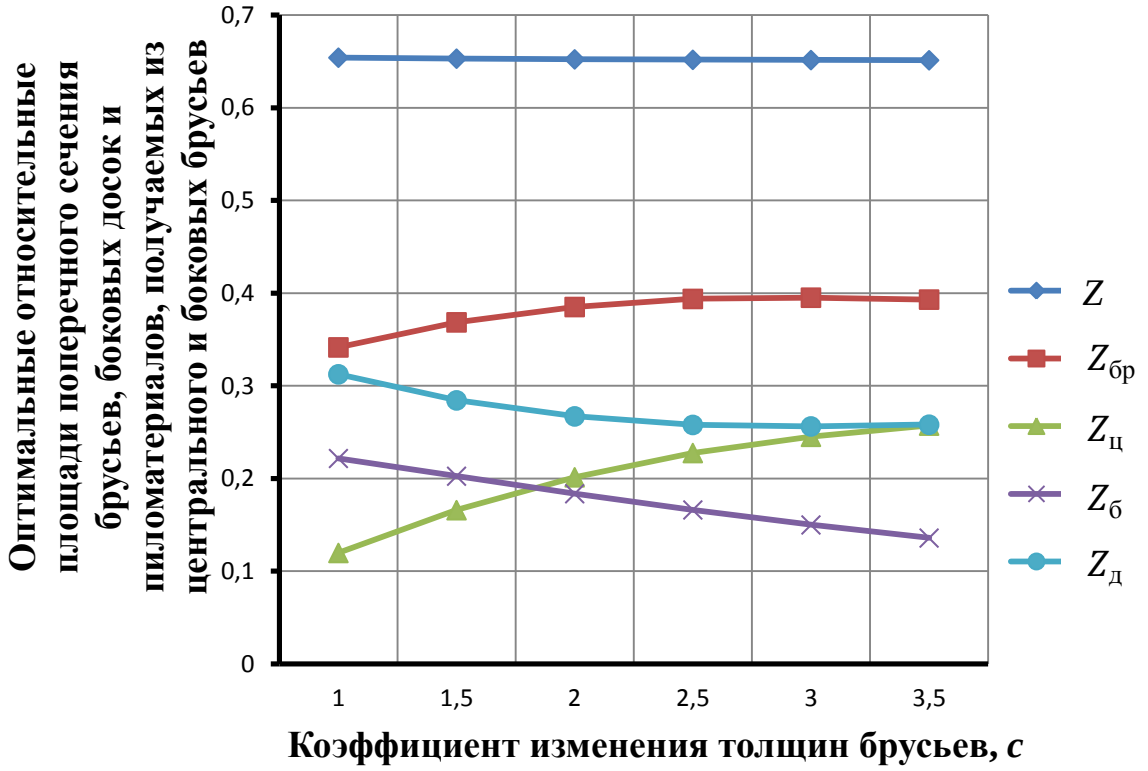


Рис. 4.34. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_б$ брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и выпиливании $n_ц$ = 14, $n_б$ = 12 досок

При распиловке центрального бруса с получением 16 обрезных досок, а каждый боковой брус распиливают на 14 обрезных досок, с увеличением коэффициента c оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из центрального бруса $Z_ц$, возрастает, а площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из боковых брусьев $Z_б$, уменьшается (см. рис. 4.35). При этом оптимальная относительная площадь поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ с увеличением коэффициента c также уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. Оптимальная относительная площадь поперечного сечения обрезных досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, с увеличением коэффициента c возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. В итоге общая сумма всех оптимальных относительных площадей поперечных сечений досок, получаемых из пиловочника Z, уменьшается незначительно.

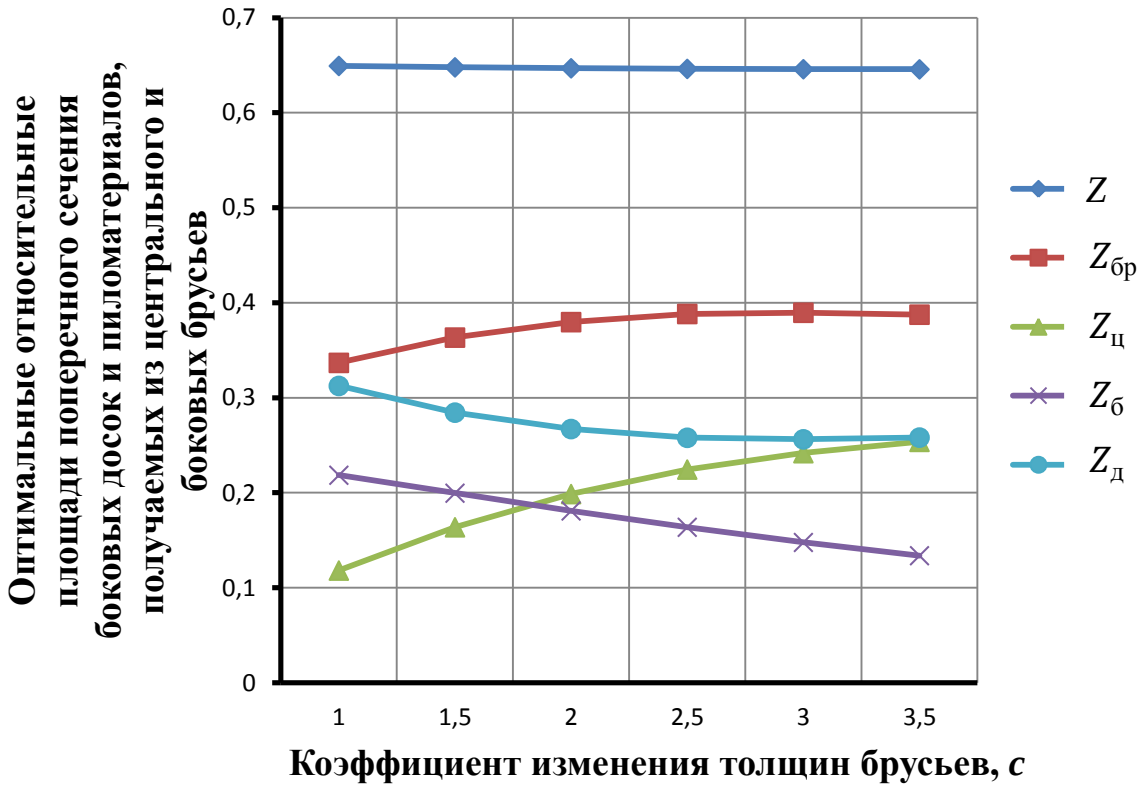


Рис. 4.35. Влияние коэффициента c на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок $Z_д$ и пиломатериалов, выпиливаемых из центрального $Z_ц$ и боковых $Z_б$ брусьев при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и выпиливании $n_ц$ = 16, $n_б$ = 14 досок

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 1,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ возрастает незначительно, а площадь поперечного сечения получаемых досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшается (см. рис. 4.36). В итоге суммарная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и досок, получаемых из брусьев, уменьшается. Это объясняется тем, что потери древесины в опилки при раскрое брусьев с увеличением количества пропилов превышает прирост оптимальных размеров боковых обрезных досок.

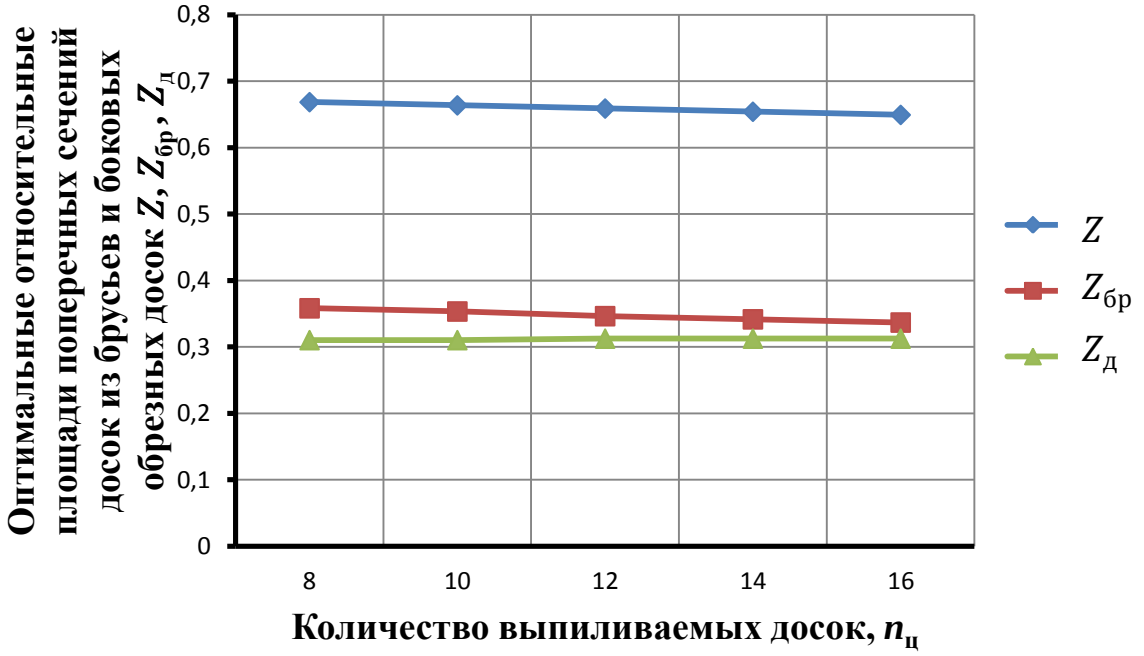


Рис. 4.36. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев площади поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ возрастают незначительно, а площади поперечного сечения получаемых досок из брусьев $Z_{бр}$ уменьшаются (см. рис. 4.37). В результате суммарная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок и досок, получаемых из брусьев, уменьшается.

Сравнивая между собой результаты на рис. 4.36 и 4.37, следует отметить, что характер изменения показателей идентичный, но при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев, больше, чем при коэффициенте c = 1,0. При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 2,0 меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

При оптимальном значении коэффициента изменения толщин брусьев c = 3,0 с увеличением количества выпиливаемых досок из брусьев оптимальные относительные площади поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_д$ незначительно возрастают, а оптимальные относительные площади поперечных сечений досок, получаемых из брусьев $Z_{бр}$, уменьшаются (см. рис. 4.38). Следовательно, умень-

шение выхода обрезных пиломатериалов происходит за счет потерь древесины в опилки при раскрое брусьев на обрезные доски.

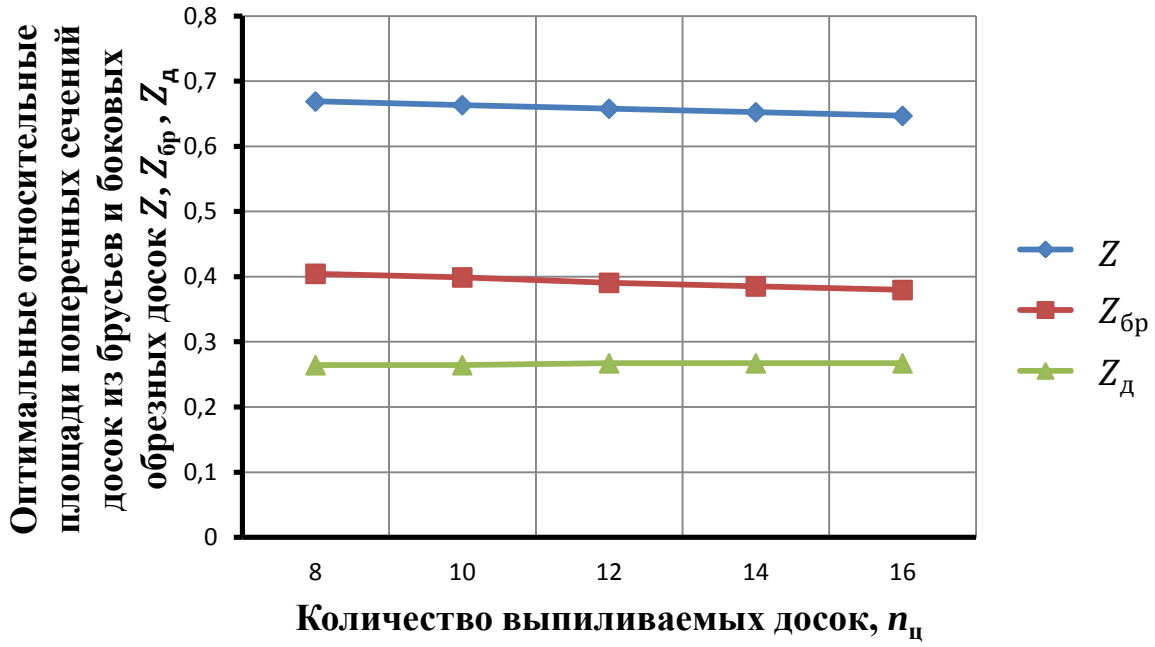


Рис. 4.37. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 2,0

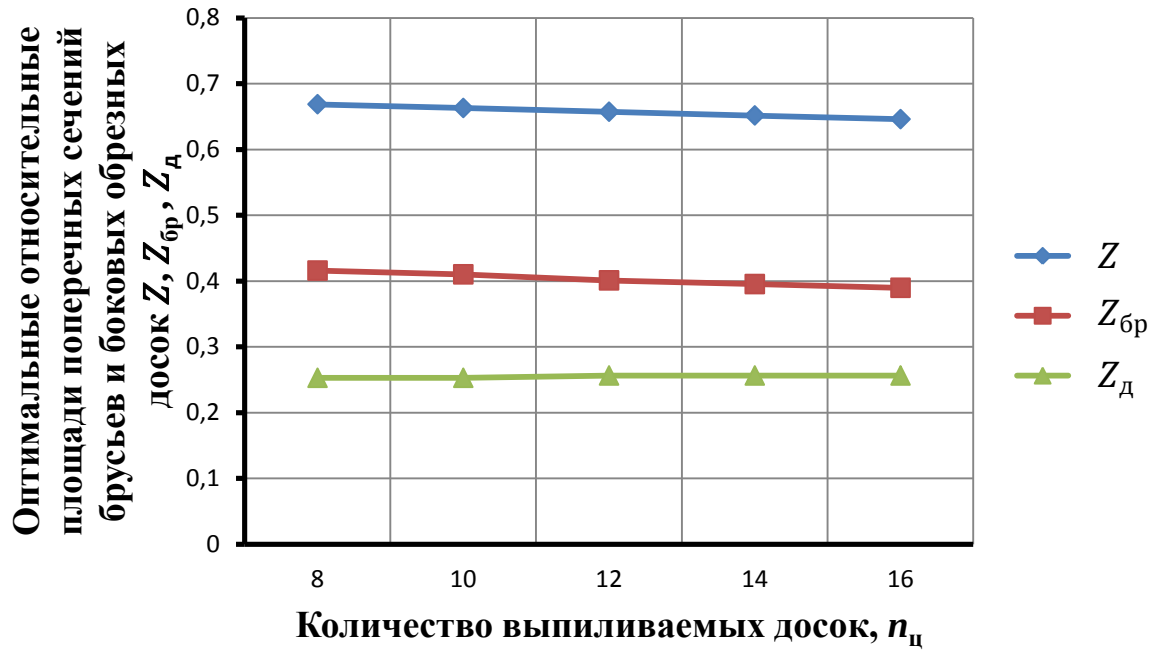


Рис. 4.38. Влияние количества выпиливаемых досок из центрального бруса на оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{бр}$ и боковых обрезных досок $Z_д$ при коэффициенте c = 3,0

Сравнивая между собой рис. 4.37 и 4.38, следует отметить, что при коэффициенте c = 3,0 оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок меньше, чем при коэффициенте c = 2,0, а оптимальная относительная площадь поперечных сечений досок, получаемых из брусьев $Z_{\text{бр}}$, больше. В итоге суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок при коэффициенте c = 3,0 немного больше, чем при коэффициенте c = 2,0.

Расчеты показали сложный характер изменения размерных параметров получаемых брусьев и боковых обрезных досок при последующей распиловке брусьев на обрезные доски.

С увеличением количества выпиливаемых обрезных досок из центрального бруса $n_{\text{ц}}$ оптимальные относительные площади поперечных сечений досок из брусьев $Z_{\text{бр}}$ уменьшаются, как при c = 1,0 (см. рис. 4.36), так и при c = 3,0 (см. рис. 4.38). При этом площади поперечных сечений боковых обрезных досок $Z_{\text{д}}$ возрастают для любых значений коэффициента c. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечных сечений досок, получаемых из брусьев, и оптимальные относительные площади поперечного сечения боковых обрезных досок с увеличением количества выпиливаемых досок из центрального бруса $n_{\text{ц}}$ уменьшаются. Такая закономерность справедлива для любого значения коэффициента c. При этом наблюдается разное сочетание $Z_{\text{д}}$ и $Z_{\text{бр}}$ для различных значений коэффициента c.

Сравнивая графики на рис. 4.30…4.32, следует отметить, что оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок $Z_{\text{д}}$ с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. При этом с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев $Z_{\text{бр}}$, возрастает. Суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения досок, получаемых из брусьев, и боковых обрезных досок с увеличением коэффициента c уменьшается незначительно.

Сравнивая эти закономерности, можно отметить, что при увеличении количества выпиливаемых обрезных досок как из центрального бруса, так и из боковых брусьев выход обрезных пиломатериалов несколько уменьшается. Это объясняется тем, что потери древесины в опилки при выпиливании из брусьев большего количества обрезных досок увеличиваются.

Таким образом, впервые было установлено влияние последующего раскроя брусьев на обрезные доски на оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок.

4.6. Раскрой пиловочника с учетом сбеговой зоны и ширины пропила

Постановка и математическая модель задачи. С целью повышения выхода пиломатериалов при раскрое пиловочника расматривается, как правило, использование не только пифагорической, но и параболической (сбеговой) зон [89, 90]. С учетом сбеговой зоны схема раскроя пиловочника представлена на рис. 4.39 и 4.40.

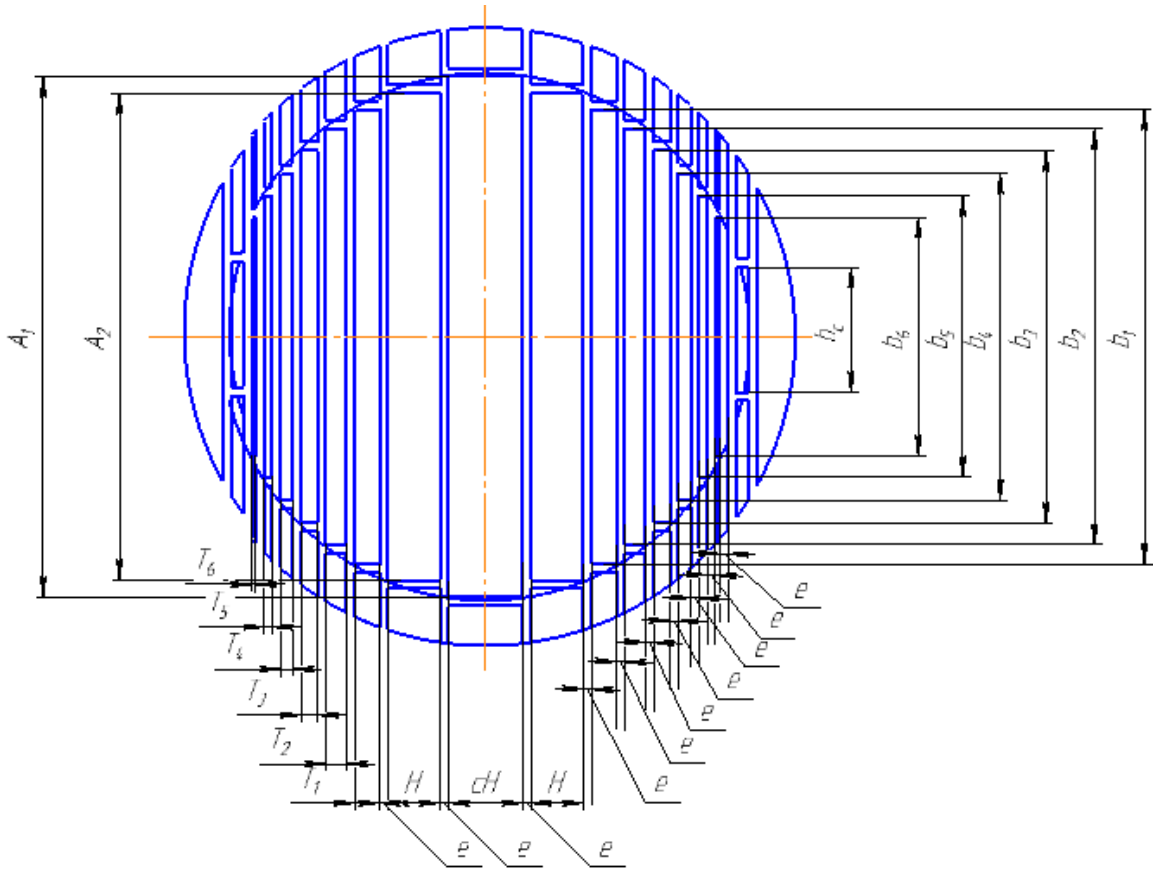


Рис. 4.39. Схема раскроя пиловочника в поперечном сечении с выпиливанием трех брусьев разной толщины и шести пар боковых обрезных досок с учетом сбега бревна и ширины пропила

Из сбеговой зоны получаются обрезные доски длиной менее длины бревна, то есть они обрезаются не только по ширине, но и по длине. В теории максимальных поставов [99, 103] было установлено, что оптимальная длина доски, получаемой из сбеговой зоны, равна 2/3 от длины наружной параболы $l_{\text{п}}$, которая образует наружную пласть этой доски (см. рис. 4.40).

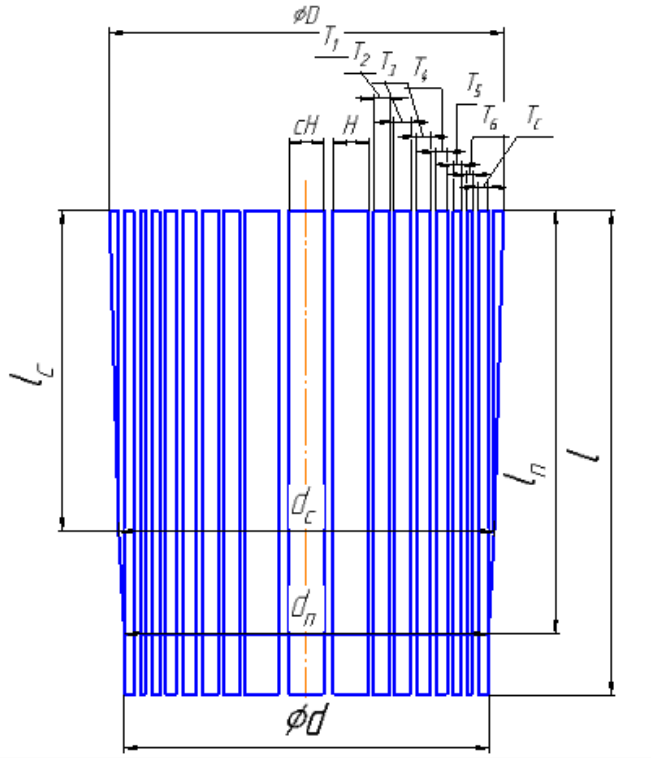


Рис. 4.40. Схема раскроя пиловочника в продольном сечении с выпиливанием трех брусьев разной толщины и шести пар боковых обрезных досок с учетом сбега бревна и ширины пропила

Для решения задачи оптимизации составляем уравнение целевой функции [89]. В качестве критерия оптимальности выбираем объем получаемых пиломатериалов. Целевая функция записывается в виде суммарного объема пиломатериалов V, получаемых из пифагорической зоны $V_{\text{П}}$, и объема обрезных досок $V_{\text{с}}$, получаемых из сбеговой зоны [90, 92]:

$$V = V_{\text{П}} + V_{\text{с}}. \tag{4.225}$$

Объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$V_{\text{П}} = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + \\ +2b_3T_3 + 2b_4T_4 + 2b_5T_5 + 2b_6T_6). \tag{4.226}$$

Объем обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны, можно записать в следующем виде:

$$V_{\text{с}} = 2b_{\text{с}}T_{\text{с}}l_{\text{с}}. \tag{4.227}$$

Диаметр бревна в нижнем торце D можно выразить в следующем виде:

$$D = d + K_{\text{с}}dl = d(1 + K_{\text{с}}l). \tag{4.228}$$

Диаметр пиловочника, при котором начинается выпиливание сбеговой доски по длине оптимального размера, определится по уравнению:

$$d_c = d\left(1 + K_c(l - l_c)\right). \quad (4.229)$$

Целевая функция составлена с учетом следующего предположения. При увеличении пифагорической зоны объем получаемых пиломатериалов из этой зоны возрастает, а объем досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшается, и наоборот. Очевидно, имеется такое соотношение этих объемов, при которых целевая функция принимает максимальное значение.

Уравнения связи для данной схемы раскроя пиловочника с учетом теоремы Пифагора имеют следующий вид.

В пифагорической зоне

Для центрального бруса:

$$d^2 - c^2H^2 - A_1^2 = 0. \quad (4.230)$$

Для боковых брусьев:

$$d^2 - A_2^2 - (cH + 2H + 2e)^2 = 0. \quad (4.231)$$

Для первой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_1^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 4e)^2 = 0. \quad (4.232)$$

Для второй пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_2^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 6e)^2 = 0. \quad (4.233)$$

Для третьей пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_3^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 8e) = 0. \quad (4.234)$$

Для четвертой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_4^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 10e)^2 = 0. \quad (4.235)$$

Для пятой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_5^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 12e)^2 = 0. \quad (4.236)$$

Для шестой пары боковых обрезных досок:

$$d^2 - b_6^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 2T_4 + 2T_5 + 2T_6 + 14e)^2 = 0. \quad (4.237)$$

В сбеговой зоне

Уравнение связи для обрезных досок:

$$d_c^2 - b_c^2 - (cH + 2H + 2T_1 + 2T_2 + 2T_3 + \\ +2T_4 + 2T_5 + 2T_6 + 2T_c + 16e)^2 = 0. \quad (4.238)$$

В уравнении связи (4.238) диаметр пиловочника d_c^2 определяется по формуле:

$$d_c^2 = d^2 + d^2 K_c^2 l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c. \quad (4.239)$$

В развернутом виде это уравнение связи (4.239) имеет вид:

$$d^2 + d^2 K_c^2 l^2 - 2d^2 K_c{}^2 l l_c + d^2 K_c{}^2 l_c{}^2 + 2d^2 K_c l - 2d^2 K_c l_c - \\ -b_c^2 - c^2 H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - \\ -4cHT_6 - 4cHT_c - 32ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\ -8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_6 - 8HT_c - 64eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\ -8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 8T_1T_c - 64eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\ -8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 8T_2T_c - 64eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - 8T_3T_c - \\ 64eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 8T_4T_c - 64eT_4 - 4T_5^2 - 8T_5T_6 - \\ 8T_5T_c - 64eT_5 - 4T_6^2 - 8T_6T_c - 64eT_6 - 4T_c^2 - 64eT_c - 256e^2 = 0.$$

Полагаем, что математическая модель данной задачи оптимизации с учетом пифагорической и сбеговой зон пиловочника составлена.

Анализируя математическую модель этой задачи оптимизации раскроя пиловочника, следует отметить, что неизвестных факторов (размеры брусьев и боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, и размеры обрезной доски, получаемой из параболической зоны) составляет 19 наименований. Количество уравнений связей всего лишь девять. Такую математическую модель задачи оптимизации решить классическим методом не представляется возможным. В этом случае, как правило, упрощают задачу оптимизации путем исключения некоторых факторов. В результате сокращения факторов получается другая математическая модель, в которой раскрываются другие частные особенности. Поэтому целесообразно решить данную математическую модель в общем виде.

Решение математической модели. Для решения данной модели воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функцию Лагранжа записываем в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
L = l(cHA_1 + 2HA_2 + 2b_1T_1 + 2b_2T_2 + \\
+2b_3T_3 + 2b_4T_4 + 2b_5T_5 + 2b_6T_6) + 2b_cT_cl_c + \\
+\lambda_1(d^2 - c^2H^2 - A_1^2) + \lambda_2(d^2 - A_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4ecH - 4H^2 - \\
-8eH - 4e^2) + \lambda_3(d^2 - b_1^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 8ecH - 4H^2 - \\
-8HT_1 - 16eH - 4T_1^2 - 16eT_1 - 16e^2) + \lambda_4(d^2 - b_2^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\
-4cHT_1 - 4cHT_2 - 12ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 24eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - \\
-24eT_1 - 4T_2^2 - 24eT_2 - 36e^2) + \lambda_5(d^2 - b_3^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - \\
-4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 16ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\
-32eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 32eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 32eT_2 - 4T_3^2 - \\
-32eT_3 - 64e^2) + \lambda_6(d^2 - b_4^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - \\
-4cHT_3 - 4cHT_4 - 20ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - 40eH - \\
-4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 40eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - \\
-40eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 40eT_3 - 4T_4^2 - 40eT_4 - 100e^2) + \\
+\lambda_7(d^2 - b_5^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - \\
-4cHT_4 - 4cHT_5 - 24ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\
-8HT_4 - 8HT_5 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - \\
-8T_1T_5 - 48eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - \\
-48eT_2 - 4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 48eT_3 - 4T_4^2 - \\
-8T_4T_5 - 48eT_4 - 4T_5^2 - 48eT_5 - 144e^2) + \\
+\lambda_8(d^2 - b_6^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - \\
-4cHT_5 - 4cHT_6 - 28ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - 8HT_4 - \\
-8HT_5 - 8HT_6 - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - 8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - \\
-56eT_1 - 4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 56eT_2 - 4T_3^2 - \\
-8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - 56eT_3 - 4T_4^2 - 8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 56eT_4 - \\
-4T_5^2 - 8T_5T_6 - 56eT_5 - 4T_6^2 - 56eT_6 - 196e^2) + \\
+\lambda_9(d^2 + d^2K_c^2l^2 - 2d^2K_c{}^2ll_c + d^2K_c{}^2l_c{}^2 + 2d^2K_cl - 2d^2K_cl_c - \\
-b_c^2 - c^2H^2 - 4cH^2 - 4cHT_1 - 4cHT_2 - 4cHT_3 - 4cHT_4 - 4cHT_5 - \\
-4cHT_6 - 4cHT_c - 32ecH - 4H^2 - 8HT_1 - 8HT_2 - 8HT_3 - \\
-8HT_4 - 8HT_5 - 8HT_6 - 8HT_c - 64eH - 4T_1^2 - 8T_1T_2 - 8T_1T_3 - \\
-8T_1T_4 - 8T_1T_5 - 8T_1T_6 - 8T_1T_c - 64eT_1 - \\
-4T_2^2 - 8T_2T_3 - 8T_2T_4 - 8T_2T_5 - 8T_2T_6 - 8T_2T_c - 64eT_2 - \\
-4T_3^2 - 8T_3T_4 - 8T_3T_5 - 8T_3T_6 - 8T_3T_c - 64eT_3 - 4T_4^2 - \\
-8T_4T_5 - 8T_4T_6 - 8T_4T_c - 64eT_4 - \\
-4T_5^2 - 8T_5T_6 - 8T_5T_c - 64eT_5 - 4T_6^2 - 8T_6T_c - \\
-64eT_6 - 4T_c^2 - 64eT_c - 256e^2.
\end{gathered}
\tag{4.240}
$$

Находим частные производные от функции Лагранжа и приравниваем их к нулю. Получаем систему уравнений, в которой размеры брусьев и досок, получаемых из пифагорической и сбеговой зон пиловочника, взаимосвязаны. Кроме того, в этих уравнениях имеются коэффициенты Лагранжа. Решая эту полученную систему уравнений совместно с уравнениями связи, получим новые дополнительные уравнения связи, в которых отсутствуют коэффициенты Лагранжа. Однако и в этом случае определить оптимальные размеры брусьев и досок затруднительно.

Алгоритм решения задачи. Поэтому для решения задачи воспользуемся численным методом. Для определения оптимальных размеров брусьев и досок расчеты производим в относительных единицах, полагая $m_H = H/d$ и $m_e = e/d$.

Учитывая методику решения подобных схем раскроя пиловочника [94, 95], алгоритм решения задачи оптимизации представляем в следующем виде.

Относительная ширина центрального бруса:

$$m_{A_1} = \sqrt{1 - c^2 m_H^2}. \quad (4.241)$$

Относительная ширина наружной пласти бокового бруса:

$$m_{A_2} = \sqrt{1 - (cm_H + 2m_H + 2m_e)^2}. \quad (4.242)$$

Относительная ширина наружной пласти первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \\ + \frac{2(1 - ((cm_H + 2m_H + 2m_e)^2 + m_H^2(c+2)^2 + 2m_e m_H(c+2)))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (4.243)$$

Относительная толщина первой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_1} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_1}^2} - (cm_H + 2m_H + 4m_e)). \quad (4.244)$$

Относительную ширину наружной пласти первой пары боковых обрезных досок можно также определить по формуле:

$$m_{b1} = \frac{c(1 - 2c^2 m_H^2)}{m_{A_1}(c+2)} + \frac{2(m_{A_2}^2 - m_H^2(c+2)^2 - 2m_H m_e(c+2))}{m_{A_2}(c+2)}. \quad (4.245)$$

Относительная ширина наружной пласти второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_2} = m_{b_1} - \frac{2m_{T_1}}{m_{b_1}}\left(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 4m_e\right). \quad (4.246)$$

Относительная толщина второй пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_2} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_2}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 6m_e)). \quad (4.247)$$

Относительная ширина наружной пласти третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_3} = m_{b_2} - \frac{2m_{T_2}}{m_{b_2}}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 6m_e). \quad (4.248)$$

Относительная толщина третьей пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_3} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_3}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 8m_e)). \quad (4.249)$$

Относительная ширина наружной пласти четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_4} = m_{b_3} - \frac{2m_{T_3}}{m_{b_3}}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 8m_e). \quad (4.250)$$

Относительная толщина четвертой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_4} = 0{,}5\left(\sqrt{1 - m_{b_4}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 10m_e)\right). \quad (4.251)$$

Относительная ширина наружной пласти пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_5} = m_{b_4} - \frac{2m_4}{m_{b_4}}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 10m_e). \quad (4.252)$$

Относительная толщина пятой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_5} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_5}^2} - \\ -(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 12m_e)). \quad (4.253)$$

Относительная ширина наружной пласти шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{b_6} = m_{b_5} - \frac{2m_5}{m_{b_5}}(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + \\ +2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 12m_e). \quad (4.254)$$

Относительная толщина шестой пары боковых обрезных досок:

$$m_{T_6} = 0{,}5(\sqrt{1 - m_{b_6}^2} - \\ -(cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 14m_e)). \quad (4.255)$$

Относительная величина пифагорической зоны определяется по формуле:

$$m_E = cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + 2m_{T_2} + \\ +2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 2m_{T_6} + 16m_e. \quad (4.256)$$

Относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны:

$$m_{T_c} = 0{,}5(\sqrt{d_c^2 - m_{b_c}^2} - (cm_H + 2m_H + 2m_{T_1} + \\ +2m_{T_2} + 2m_{T_3} + 2m_{T_4} + 2m_{T_5} + 2m_{T_6} + 16m_e)). \quad (4.257)$$

Относительная ширина наружной пласти сбеговой доски:

$$m_{b_C} = \sqrt{2m_E m_{T_C} + 4m_{T_c}^2}. \quad (4.258)$$

Относительная длина сбеговой доски:

$$m_{l_C} = \frac{m_D - \sqrt{8m_{T_c}^2 + 6m_E m_{T_C} + m_E^2}}{K_{\text{с}}}. \quad (4.259)$$

Решая равенства 4.228 и 4.229, можно написать:

$$m_{d_C} = m_D - K_c m_{lc}. \quad (4.260)$$

Используя равенство (4.260), относительную толщину доски, получаемой из сбеговой зоны, можно определить по формуле:

$$m_{T_c} = \frac{\sqrt{16m_D^2 + 9m_E^2} - 5m_E^2}{16}. \quad (4.261)$$

Критерием оптимальности при раскрое пиловочника выбираем общий относительный выход пиломатериалов V, получаемых из пифагорической $V_{\text{П}}$ и сбеговой $V_{\text{С}}$ зон, относительно общего объема пиловочника $V_{\text{ОП}}$, который определяется по формуле:

$$m_V = \frac{V}{V_{\text{ОП}}}. \quad (4.262)$$

Объем пиловочника (бревна) определяется по формуле:

$$V_{\text{ОП}} = \frac{\pi(d+D)^2}{16} l. \quad (4.263)$$

Относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_{\text{с}}} = 2m_{T_{\text{с}}} m_{b_{\text{с}}} m_{l_{\text{с}}}. \quad (4.264)$$

Относительный объем брусьев, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_{\text{бр}}} = \left(cm_H m_{A_1} + 2m_H m_{A_2}\right) l. \quad (4.265)$$

Относительный объем боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$\begin{aligned} m_{V_{\text{д}}} = (&2m_{T_1} m_{b_1} + 2m_{T_2} m_{b_2} + 2m_{T_3} m_{b_3} + \\ &+2m_{T_4} m_{b_4} + 2m_{T_5} m_{b_5} + 2m_{T_6} m_{b_6}) l. \end{aligned} \quad (4.266)$$

Суммарный относительный объем брусьев и досок, получаемый из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$m_{V_{\text{П}}} = m_{V_{\text{бр}}} + m_{V_{\text{д}}}. \quad (4.267)$$

Общий относительный объем пиломатериалов, получаемых из пифагорической и сбеговой зон, определяется по формуле:

$$m_V = m_{V_{\text{П}}} + m_{V_{\text{с}}}. \quad (4.268)$$

Объем пиломатериалов V, получаемых из пиловочника, определяется по алгоритму в относительных единицах m_V. На практике также определяют выход пиломатериалов из одного бревна. Следовательно, для сравнения и анализа результатов общий объем пиловочника необходимо представлять в относительных единицах.

Объем пиловочника в относительных единицах определяется по формуле:

$$m_{V_{\text{ОП}}} = \frac{\pi(1+m_D)^2}{16} l. \quad (4.269)$$

Относительный диаметр пиловочника в нижнем торце определяется по формуле:

$$m_D = 1 + Kcl. \quad (4.270)$$

Подставив равенство 4.270 в формулу 4.269, получим:

$$m_{V_{\text{ОП}}} = \frac{\pi(2 + K_c l)^2}{16} l. \quad (4.271)$$

Тогда общий относительный выход пиломатериалов, получаемых при раскрое пиловочника, определяется по формуле:

$$\Pi_{\text{v}} = \frac{V}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_V}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (4.272)$$

Относительный выход досок, получаемых из сбеговой зоны, определяется по формуле:

$$\Pi_{V_{\text{c}}} = \frac{V_c}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_{V_c}}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (4.273)$$

Относительный выход брусьев, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, определяется по формуле:

$$\Pi_{V_{\text{бр}}} = \frac{V_{\text{бр}}}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_{V_{\text{бр}}}}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (4.274)$$

Относительный выход боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$\Pi_{V_{\text{д}}} = \frac{V_{\text{д}}}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_{V_{\text{д}}}}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (4.275)$$

Относительный выход брусьев и боковых обрезных досок, получаемых из пифагорической зоны, определяется по формуле:

$$\Pi_{V_{\text{П}}} = \frac{V_{\text{П}}}{V_{\text{ОП}}} = \frac{m_{V_{\text{П}}}}{m_{V_{\text{ОП}}}}. \quad (4.276)$$

Полагаем, что алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника с учетом сбеговой зоны в относительных единицах составлен.

Результаты расчетов. Расчеты выполняются в такой последовательности. Вначале задаемся длиной бревна *l* и коэффициентом из-

менения толщины брусьев с. Далее задаемся относительным сбегом бревна по диаметру $Кс$ и относительной шириной пропила m_e. Для этих параметров по алгоритму определяем все размеры брусьев, досок и величину целевой функции для определенного диапазона относительной толщины брусьев m_H. По результатам расчетов находим оптимальное (максимальное) значение целевой функции. Оптимальные результаты расчетов представлены в приложении 4.2.

Основные зависимости оптимальных относительных размеров брусьев и досок, а также их оптимальных относительных объемов представлены на последующих рисунках.

При распиловке пиловочника с учетом сбеговой зоны с увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины бруса c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальная относительная толщина бокового бруса возрастает и пифагорическая зона также увеличивается (см. рис. 4.41). При этом возрастает также и оптимальная относительная толщина центрального бруса.

При увеличении относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника m_{Vc}, уменьшается, оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ возрастает, а оптимальный относительный объем боковых обрезных досок $m_{V\text{д}}$ уменьшается (см. рис. 4.42). В результате суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, уменьшается. Следует обратить внимание на оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны пиловочника, который при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ сокращается почти в два раза по сравнению с вариантом, когда относительная ширина пропила $m_e = 0$. При этом относительный выход пиломатериалов, получаемых из сбеговой зоны пиловочника, составляет всего лишь около m_{Vc} = 0,5% от всего объема пиломатериалов, получаемых из бревна. Таким образом, при использовании сбеговой зоны пиловочника с четырех сторон выход прибавляется за счет сбеговой зоны всего лишь на 1%.

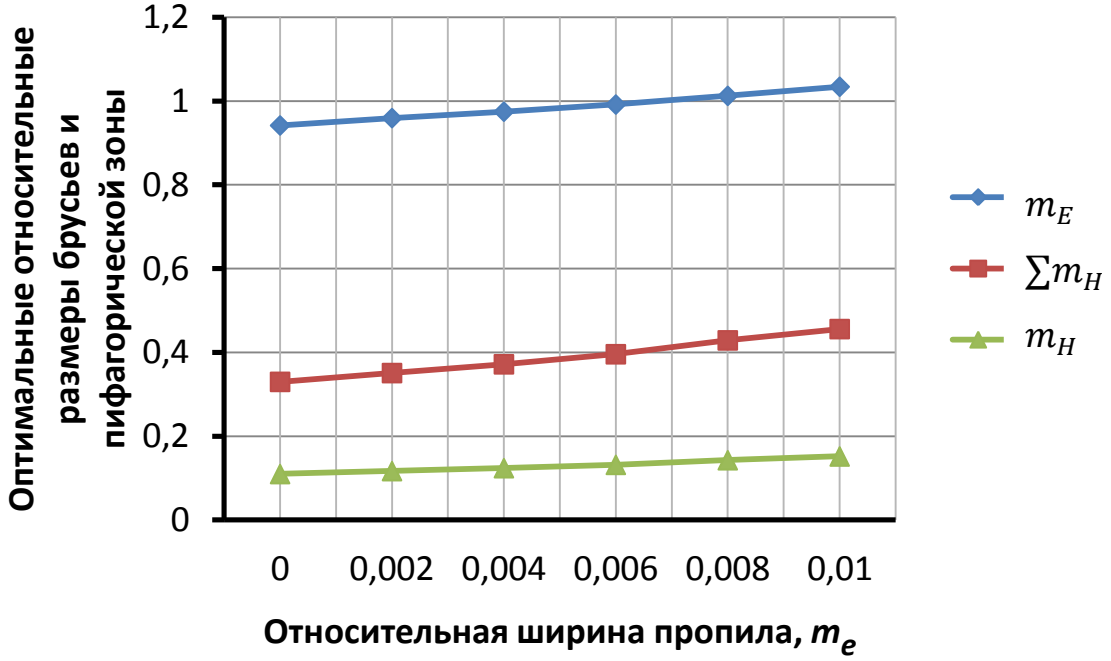


Рис. 4.41. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_H, m_E, $\sum m_H$ при коэффициенте с = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила оптимальные относительные размеры досок, получаемых из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 4.43). При этом оптимальная относительная длина доски уменьшается в большой мере. Следовательно, относительная ширина пропила наибольшее влияние оказывает на оптимальную длину доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника. Так, например, для данных условий пиления (c = 1,0 и l = 3,0 м) при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ относительная длина доски равна $m_{lc} = 0{,}42$ от длины пиловочника, а относительная ширина этой доски будет равна $m_{bc} = 0{,}2$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. При этом относительная толщина этой доски будет составлять $m_{Tc} = 0{,}019$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом варианте раскроя пиловочника получаются доски из сбеговой зоны сравнительно малых размеров.

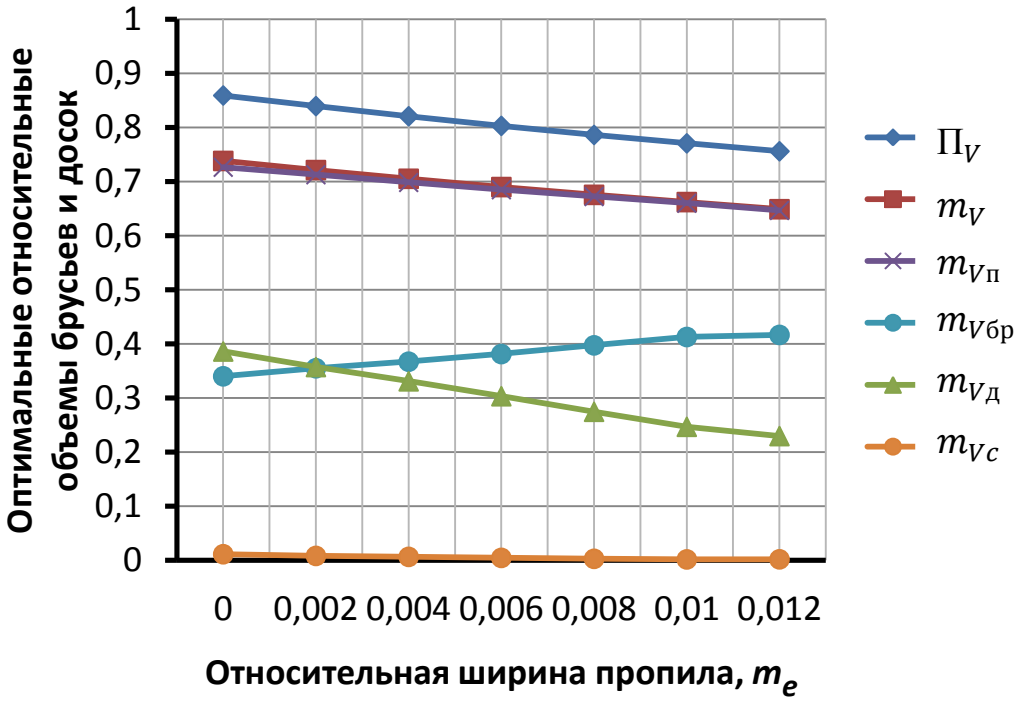


Рис. 4.42. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$,m_{Vc} и выход пиломатериалов $П_V$ при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

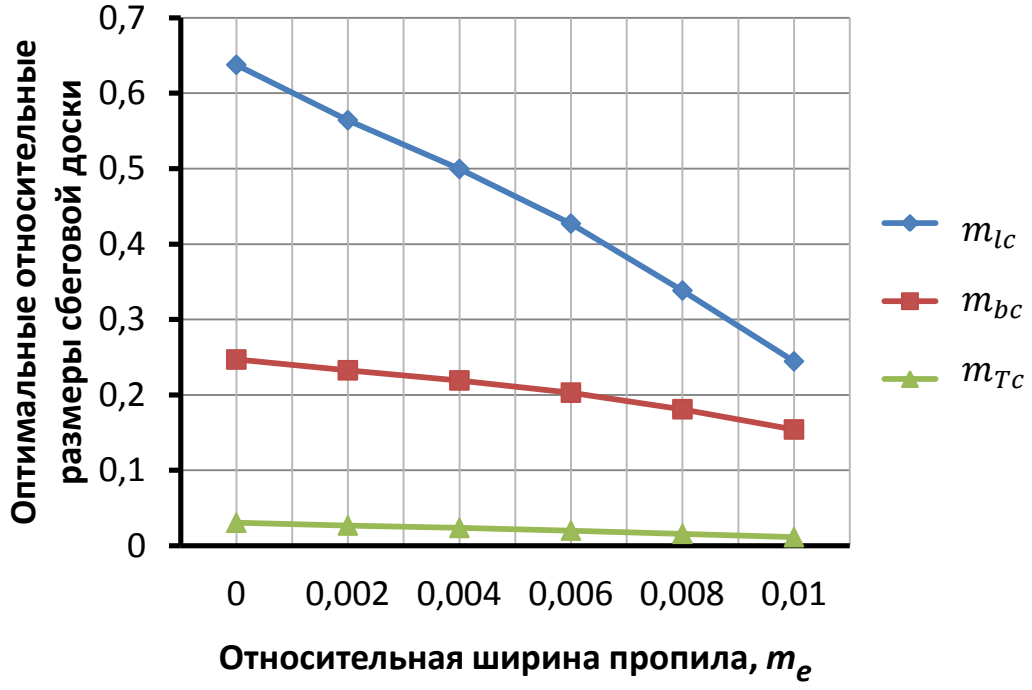


Рис. 4.43. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc} при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника

l = 3,0 м оптимальная относительная толщина первой пары боковых обрезных досок возрастает, а оптимальные относительные толщины следующих пар обрезных досок уменьшаются, причем уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (рис. 4.44). Так, например, толщина последней (шестой) пары боковых обрезных досок уменьшилась почти до нуля при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}008$.

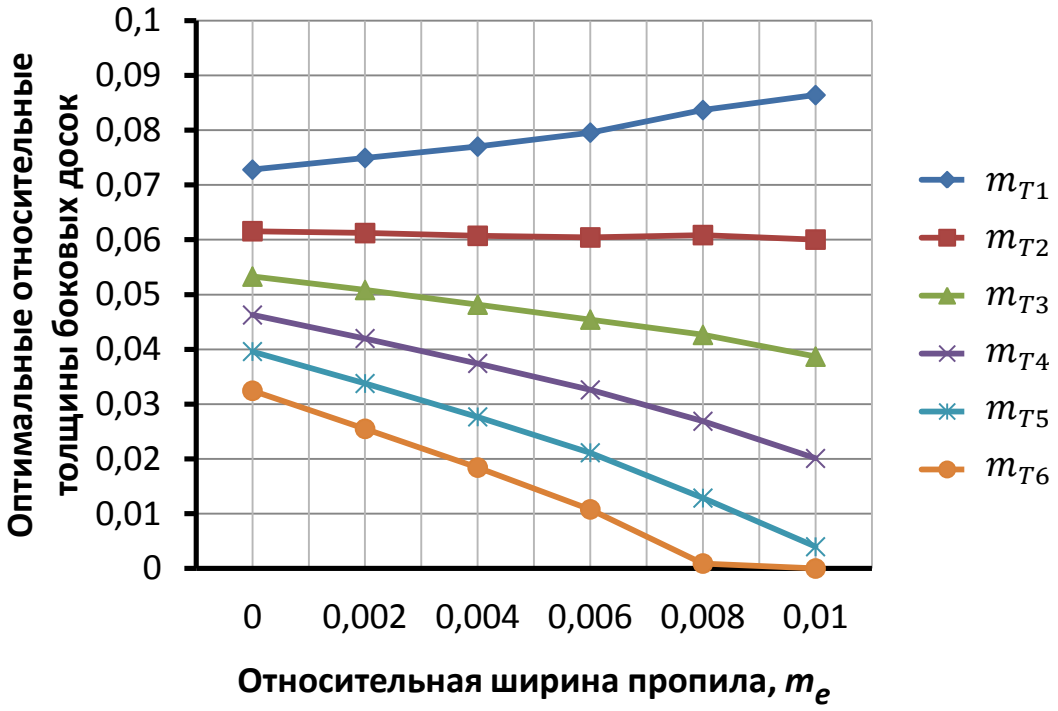


Рис. 4.44. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Данные расчеты показывают, что даже при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ относительная толщина шестой (крайней) пары боковых обрезных досок составляет всего лишь 0,01 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При распиливании пиловочника диаметром 60 см оптимальная толщина крайней боковой обрезной доски составит всего лишь $m_{T6} = 6$ мм. Такая толщина досок в стандарте на пиломатериалы не предусмотрена.

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.45) с небольшим ускорением. Ширина крайней (шестой) боковой обрезной доски при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ принимает нулевое значение.

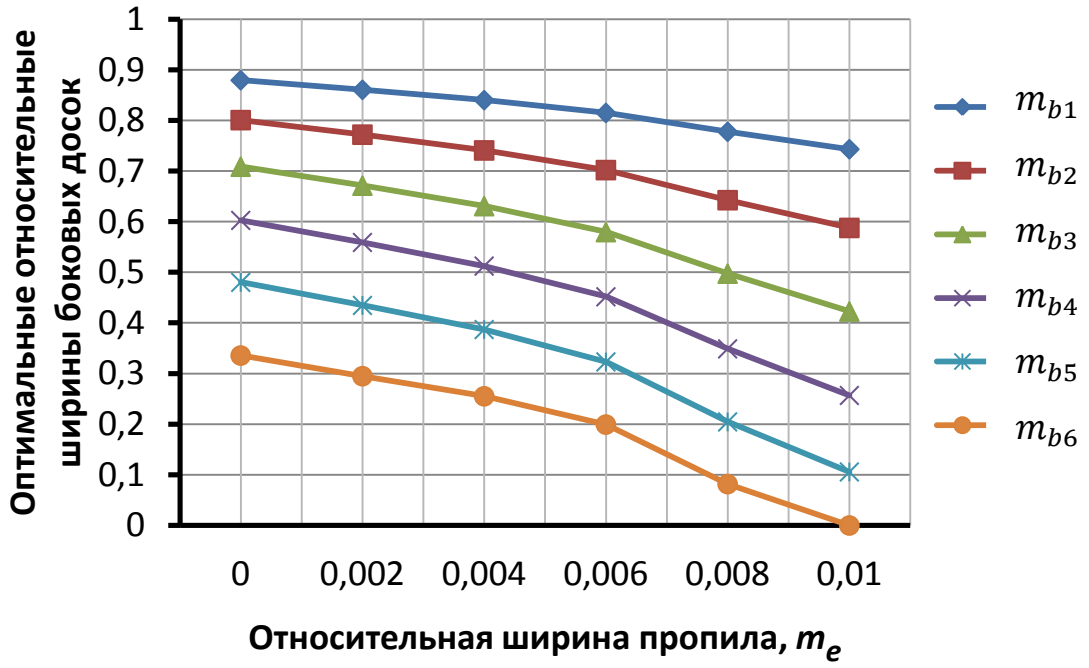


Рис. 4.45. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых досок при коэффициенте c = 1,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Следует обратить внимание, что при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ величина относительной ширины шестой пары боковой обрезной доски составляет 0,199 от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае при распиловке пиловочника диаметром 60 см оптимальная ширина крайней боковой обрезной доски составит $b_6 = 119$ мм. В стандарте на пиломатериалы предусмотрены доски шириной 100, 125 и 150 мм. Следовательно, уменьшая ширину доски и увеличивая ее толщину, можно выпиливать крайние боковые доски стандартных размеров.

Аналогичная закономерность изменения размеров оптимальных относительных брусьев, досок и их объемов наблюдается при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 (см. рис. 4.46 и 4.41). Различие наблюдается в том, что относительная величина центрального бруса и сумма относительных толщин этих брусьев имеют другие соотношения.

Сравнивая рис. 4.41 и 4.46, следует отметить, что суммарная оптимальная толщина брусьев $\sum m_H$ больше при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0, чем при коэффициенте c = 1,0.

Следовательно, можно, изменяя величину коэффициента изменения толщин брусьев c, выбрать толщины этих брусьев стандартных размеров с учетом ширины пропила.

Таким образом получена основная закономерность, в которой с увеличением относительной ширины пропила относительная толщина брусьев возрастает, а относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются. Ранее полагали, что с увеличением относительной ширины пропила относительную толщину брусьев следует уменьшать [100].

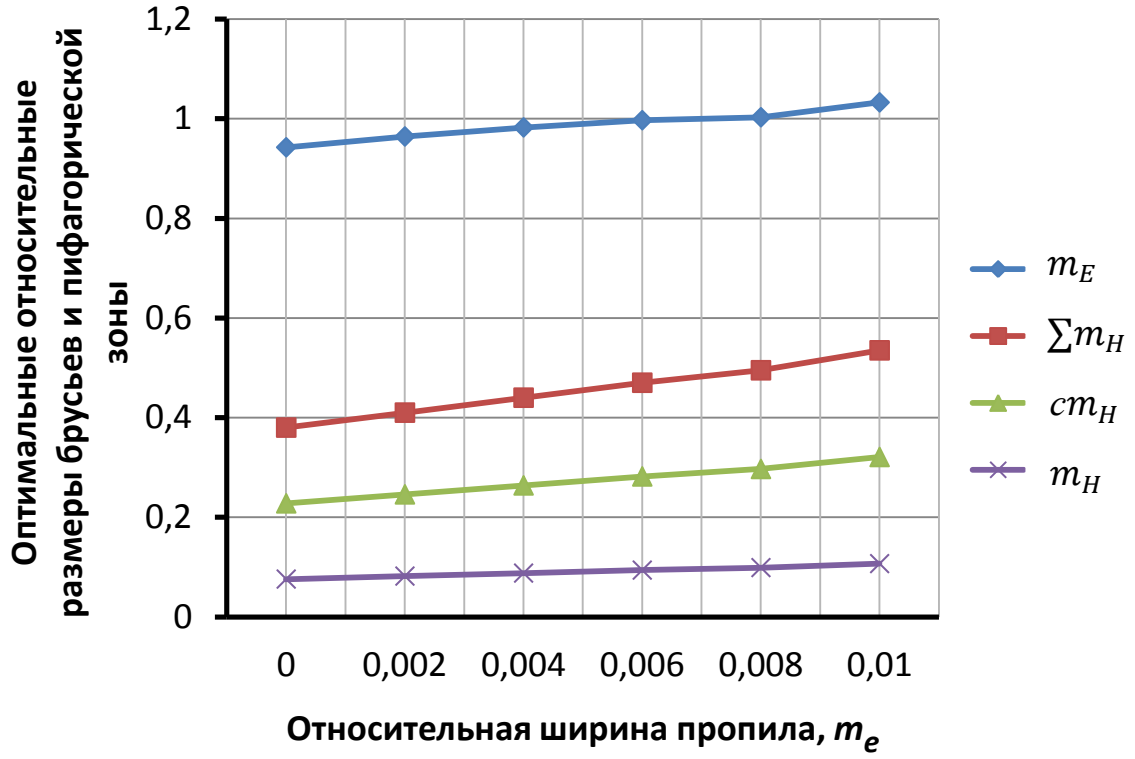


Рис. 4.46. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры m_E, $\sum m_H$, m_H при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}, и оптимальный относительный объем досок, получаемых из пифагорической зоны $m_{Vд}$, уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев $m_{Vбр}$ возрастает (см. рис. 4.47). Суммарный относительный объем пиломатериалов $m_{Vп}$, получаемых из пифагорической зоны пиловочника, с увеличением относительной ширины пропила уменьшается. Такие закономерности получены при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м. Сравнивая графики на рис. 4.42 и 4.47, стоит отметить следующее отличие: при коэффициенте c = 3,0 оптимальный относительный объем боковых обрезных досок $m_{Vд}$ меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

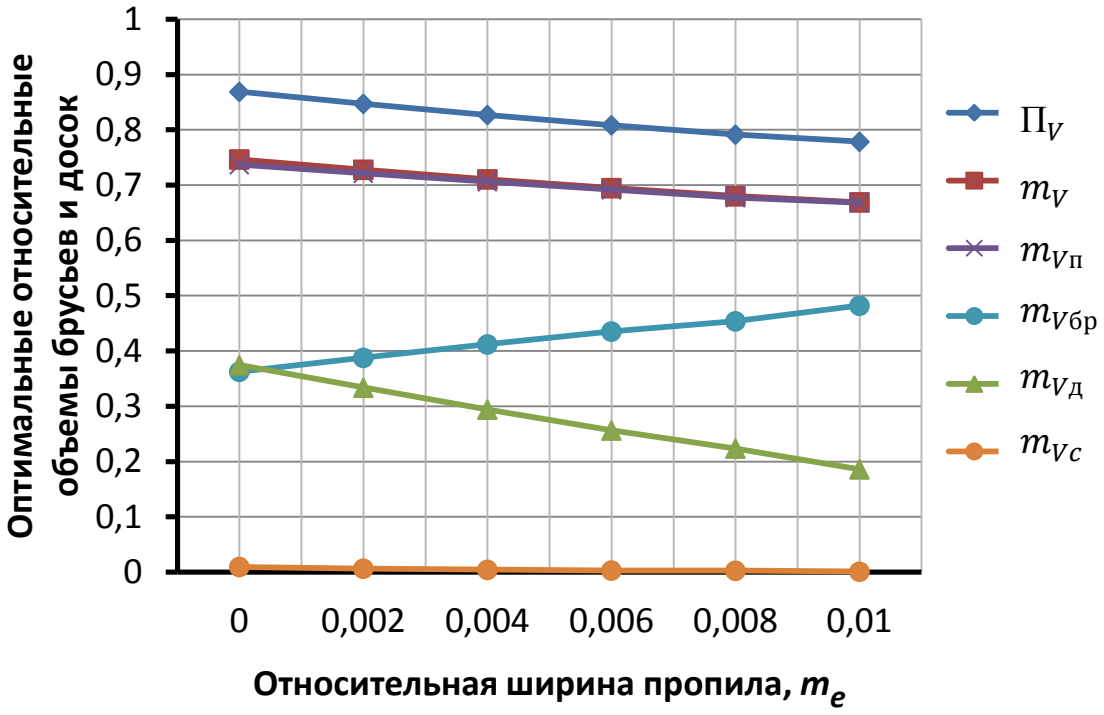


Рис.4.47. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$, m_{Vc} и выход пиломатериалов $П_V$ при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м.

Анализируя результаты расчетов, представленные на рис. 4.47 следует отметить, что общая закономерность влияния относительной ширины пропила на оптимальные относительные обьемы пиломатериалов, получаемых из пифагорической зоны, сохраняются (см. рис. 4.20). Следовательно, сбеговая зона оказывает влияние на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок незначительно.

С увеличением относительной ширины пропила m_e относительные размеры боковой обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны, уменьшаются (см. рис. 4.48). При этом относительная длина сбеговой доски m_{lc} уменьшается в большой мере, чем относительная ширина сбеговой доски m_{bc} и относительная толщина этой сбеговой ки m_{Tc}. Этот график получен при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м.

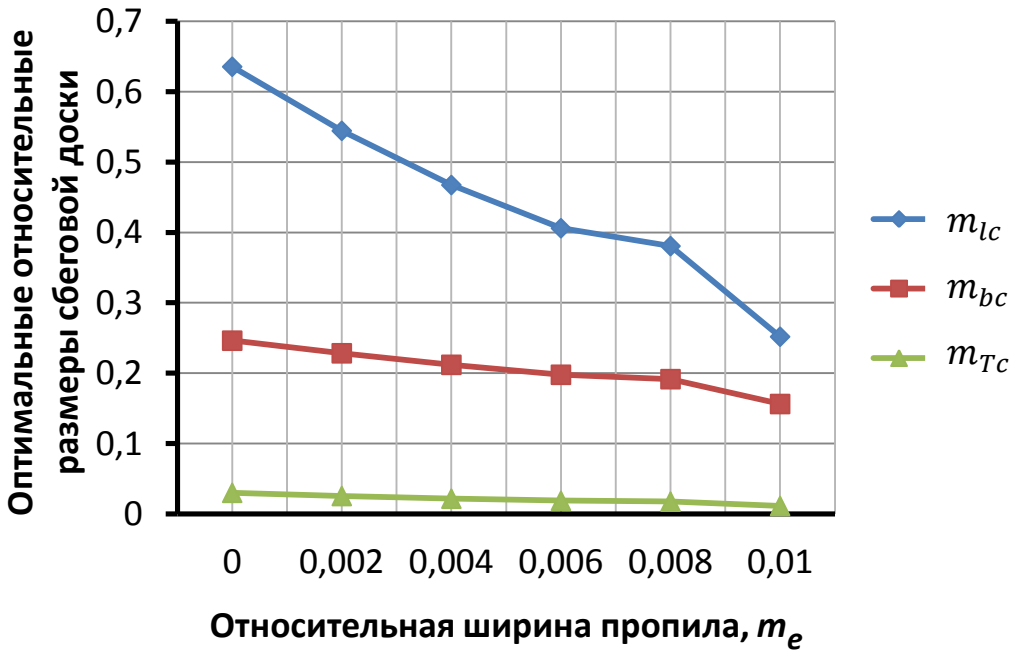


Рис. 4.48. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны (m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}), при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

Сравнивая между собой результаты на рис. 4.43 и 4.48, следует отметить, что оптимальные относительные размеры обрезной доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника, также при увеличении относительной ширины пропила уменьшаются. При коэффициенте c = 3,0 оптимальные относительные размеры этой доски (длина, ширина и толщина) уменьшаются в большей степени, чем при коэффициенте c = 1,0.

Следовательно, для выпиливания досок стандартных размеров можно рассматривать окончательный выбор величины коэффициента толщин брусьев c.

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются, кроме первой боковой обрезной доски, величина которой при этом возрастает. При этом уменьшение относительных размеров крайних боковых обрезных досок происходит в большей степени (см. рис. 4.49). Увеличение оптимальной относительной толщины первой пары боковой обрезной доски с увеличением относительной ширины пропила происходит не столь значительно. Оптимальная относительная толщина второй пары боковых обрезных досок с увеличением относительной ширины пропила уменьшается. Толщина пятой боковой обрезной доски при m_e = 0,01 приближается

к нулевому значению. При относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ оптимальная относительная толщина крайней боковой обрезной доски составляет всего лишь $m_{T6} = 0{,}0074$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае при распиловке пиловочника диаметром 60 см получается доска толщиной 4,4 мм. Крайняя (шестая) пара боковых обрезных досок при относительной ширине пропила 0,008 принимает значение близкое к нулевому.

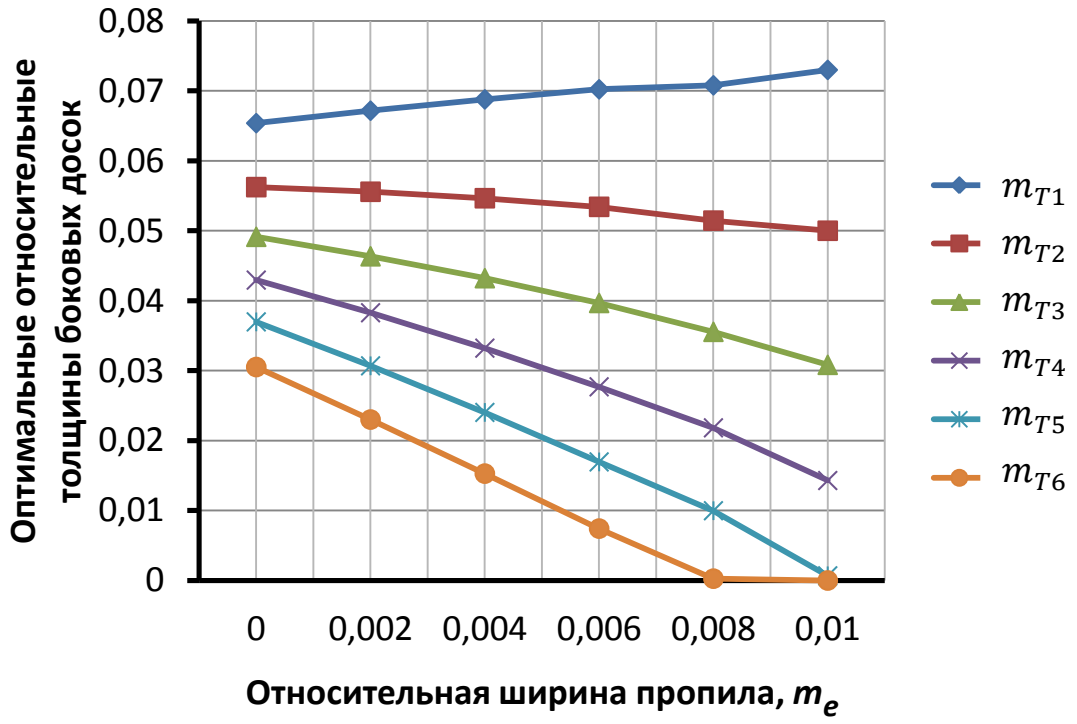


Рис. 4.49. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением относительной ширины пропила при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются (см. рис. 4.50) с небольшим ускорением. Ширина крайней боковой обрезной доски при относительной ширине пропила m_e = 0,01 принимает нулевое значение.

Следует отметить, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальная ширина шестой пары (крайней) боковой обрезной доски при распиловке пиловочника диаметром в вершинном торце d = 60 см с относительной шириной пропила $m_e = 0{,}006$ получается равной $b_6 = 103$ мм. Такой размер ширины доски вполне допустим и используется на практике.

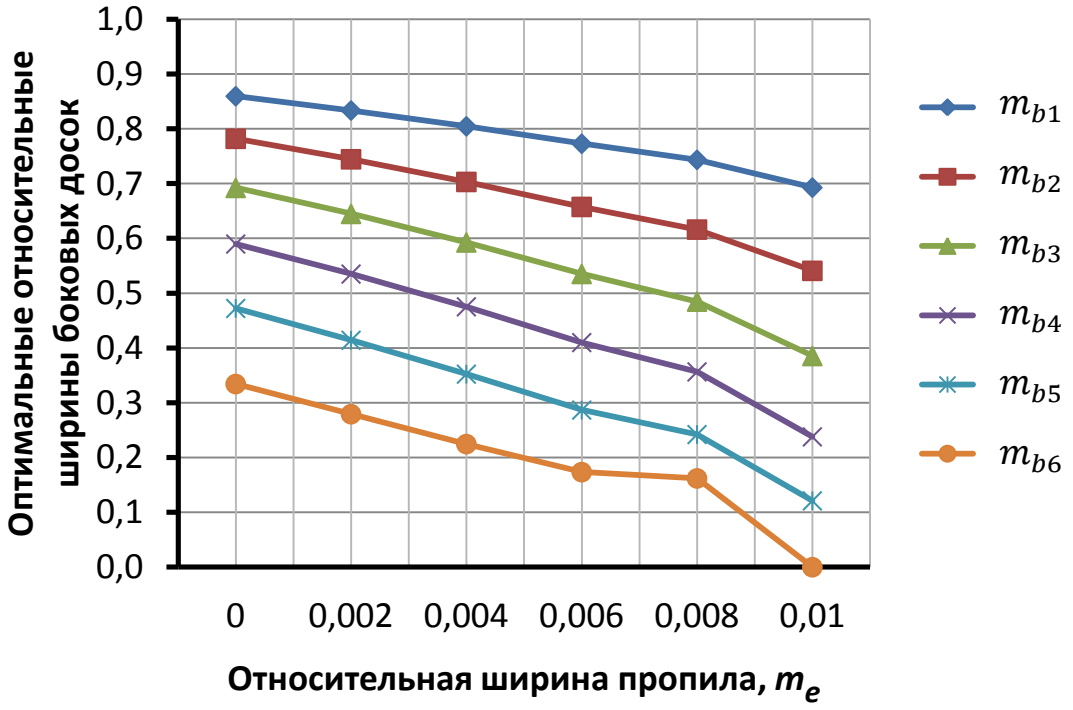


Рис. 4.50. Влияние относительной ширины пропила на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 3,0 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м пифагорическая зона m_e изменяется незначительно, но оптимальная относительная толщина бокового бруса m_H уменьшается, а оптимальная относительная толщина центрального бруса cm_H возрастает. В итоге суммарная оптимальная относительная толщина брусьев возрастает до c = 3,0, а далее изменяется незначительно (см. рис. 4.51). Пифагорическая зона при этом изменяется незначительно, и величина ее превышает 1,0.

Такой размер пифагорической зоны объясняется тем, что в этом случае учитывались дополнительно два пропила. Следует также подчеркнуть, что охват бревна поставом используется в полном размере, и поэтому сбеговая зона начинается за диаметром пиловочника в вершинном торце.

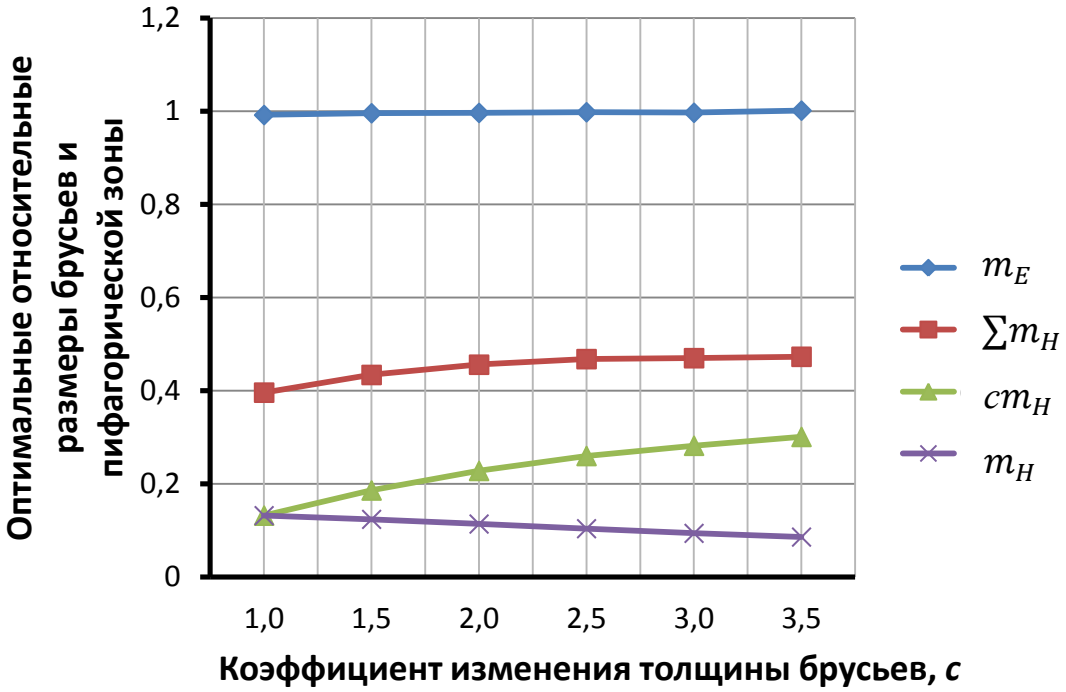


Рис. 4.51. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры $m_E, \sum m_H, cm_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, незначительно уменьшается. При этом оптимальный относительный объем боковых обрезных досок уменьшается, а оптимальный относительный объем брусьев возрастает до c = 3,5. В итоге оптимальный относительный объем получаемых пиломатериалов незначительно увеличивается (см. рис. 4.52). С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c существенно изменяются оптимальные относительные объемы брусьев и боковых обрезных досок, а сумма этих объемов изменяется не столь существенно.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны m_{lc}, практически мало изменяется (см. рис. 4.53). Оптимальная относительная длина доски из сбеговой зоны ml_c изменяется в пределах 0,38...0,42 от длины бревна. При этом оптимальная относительная ширина и оптимальная относительная толщина этой доски изменяются также незначительно. Это объясняется тем, что величина пифагорической зоны при увеличении коэффициента изменения толщины брусьев c изменяется незначительно.

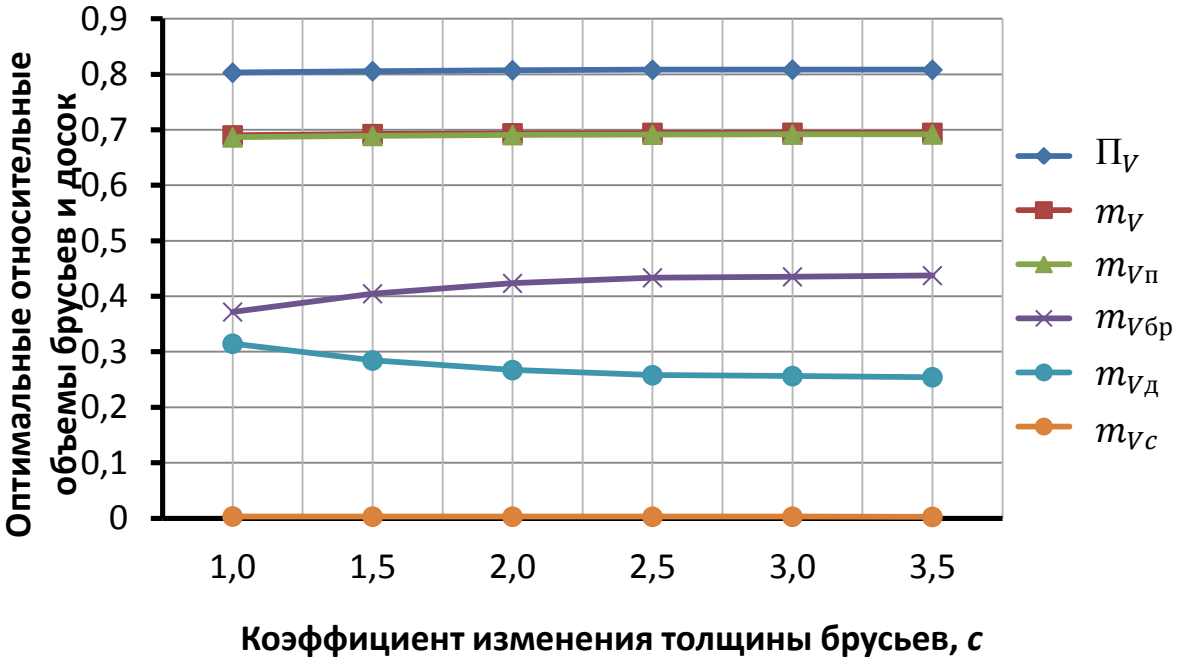


Рис. 4.52. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы, m_V, $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$, m_{Vc} , и выход пиломатериалов $П_V$ при относительной ширине пропила m_e = 0,01 и длине пиловочника l = 3,0 м

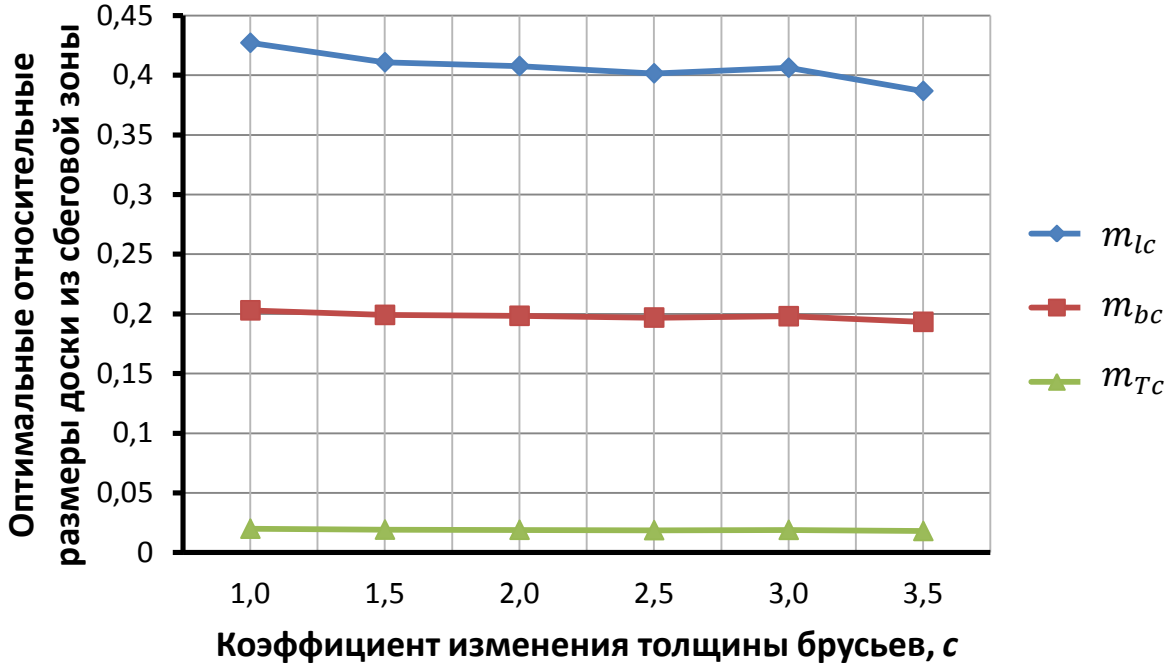


Рис. 4.53. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc} при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м

Следует обратить внимание, что оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны пиловочника длиной 3,0 м и при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$, а также при изменении коэффициента c в пределах от 1,0…3,5, колеблется в диапазоне 0,0199…0,018. В этом случае толщина доски получается очень малых размеров.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением по экспоненте. При этом уменьшение оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок с увеличением коэффициента изменения толщины брусьев в диапазоне c = 2,5…3,5 практически незначительное (рис. 4.54).

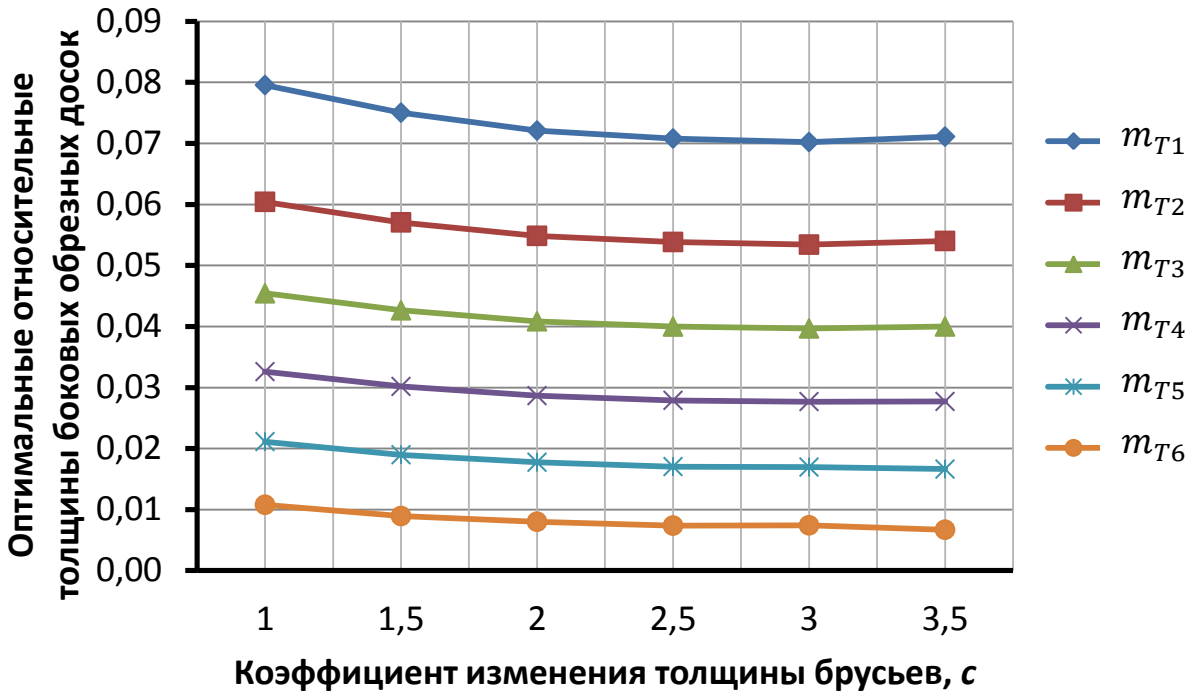


Рис. 4.54. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м

Необходимо отметить, что оптимальная относительная толщина крайней (шестой) пары боковых обрезных досок при длине пиловочника l = 3,0 м и относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ и при изменении коэффициента изменения толщин брусьев в диапазоне c = 2…3,5 составляет всего лишь $m_{T6} = 0{,}0073$ от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае невозможно выпиливать доски стандартных размеров по толщине.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м оптимальные относительные ширины первых трех боковых обрезных досок уменьшаются с замедлением до c = 2,5, а далее практически эти размеры мало изменяются. Оптимальные относительные ширины трех крайних боковых обрезных досок с увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c уменьшаются по экспоненте с замедлением (рис. 4.55). По расчетам оказалось, что оптимальная относительная ширина крайней (шестой) пары боковых обрезных досок при распиловке пиловочника диаметром в вершинном торце 60 см для данных условий раскроя пиловочника получается всего лишь 80…100 мм.

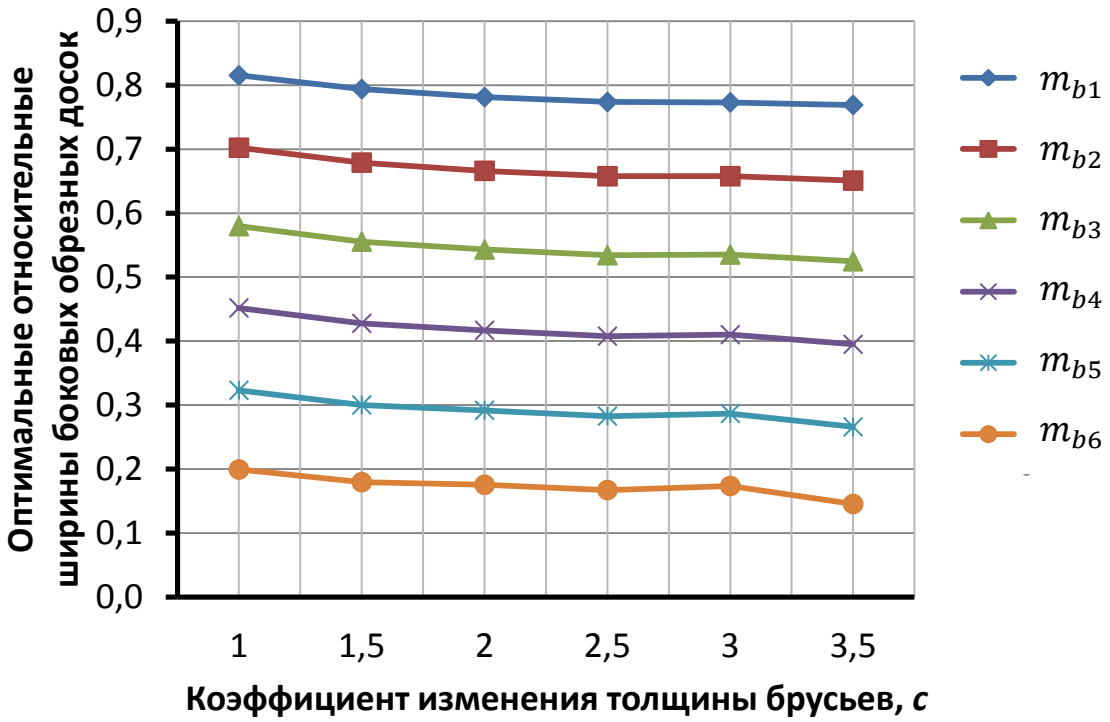


Рис. 4.55. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 3,0 м

Такие же сложные закономерности изменения размеров боковых обрезных досок и брусьев наблюдаются и при длине пиловочника l = 6,0 м (см. рис. 4.56, 4.57 и 4.58). С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c относительная толщина бокового бруса m_H уменьшается, а сумма оптимальных относительных толщин брусьев $\sum m_H$ возрастает до c = 3, а затем с ростом коэффициента c этот параметр уменьшается незначительно. Пифагорическая зона при этом возрастает незначительно.

Сравнивая между собой рис. 4.51 и 4.56, следует отметить, что оптимальная величина пифагорической зоны при длине пиловочника l = 3,0 м при увеличении коэффициента изменения толщины брусьев изменяется в меньшем диапазоне, чем при длине пиловочника l = 6,0 м.

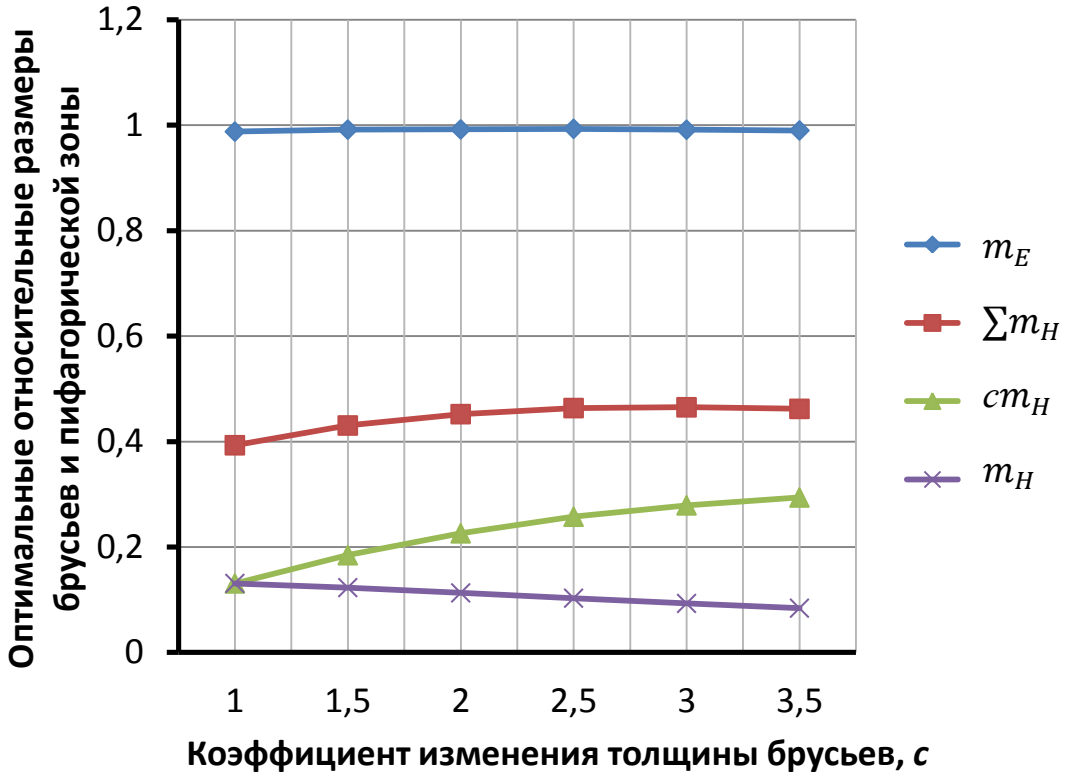


Рис. 4.56. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные m_E, $\sum m_H$, m_H при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м относительный объем обрезных досок, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}, незначительно изменяется. Это объясняется тем, что величина пифагорической зоны m_E возрастает незначительно. При этом относительный объем боковых обрезных досок $m_{Vд}$ уменьшается до c = 3,0, а затем незначительно увеличивается. Оптимальный относительный объем брусьев $m_{Vбр}$ возрастает до c = 3,0, а затем незначительно уменьшается. В итоге суммарный относительный объем пиломатериалов изменяется незначительно и составляет чуть более 70% от объема бревна (см. рис. 4.57).

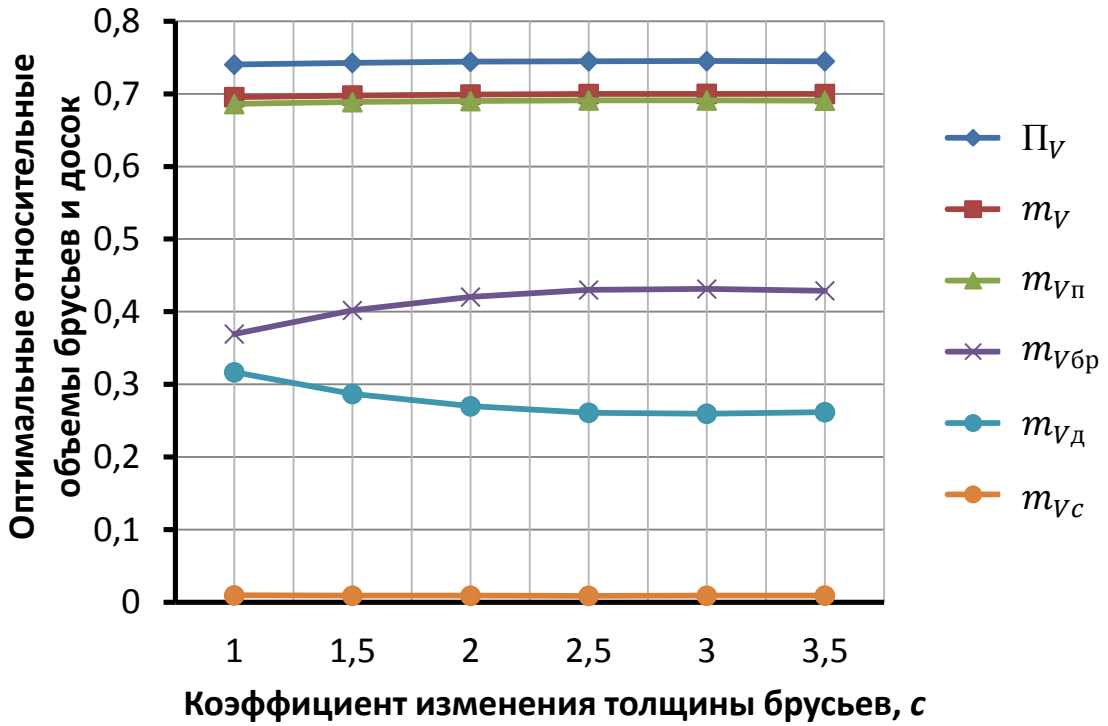


Рис. 4.57. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные объемы m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc} и выход пиломатериала $П_V$ при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м

Сравнивая между собой рис. 4.52 и 4.57, можно отметить следующее. Оптимальный относительный объем брусьев $m_{V\text{бр}}$ при длине пиловочника l = 6,0 м немного меньше, чем при длине пиловочника l = 3,0 м, а суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов m_V при длине пиловочника l = 3,0 м больше, чем при длине пиловочника l = 6,0 м. Это объясняется тем, что при длине пиловочника l = 6,0 м пифагорическая зона немного больше, чем при l = 3,0 м.

Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м представлено на рис. 4.58. С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c оптимальные относительные размеры (длина, ширина и толщина) доски, получаемой из сбеговой зоны, изменяются незначительно. При этом оптимальные относительные размеры (длина и ширина) уменьшаются до c = 2,5, а затем незначительно возрастают. Оптимальная относительная толщина доски из сбеговой зоны практически мало изменяется.

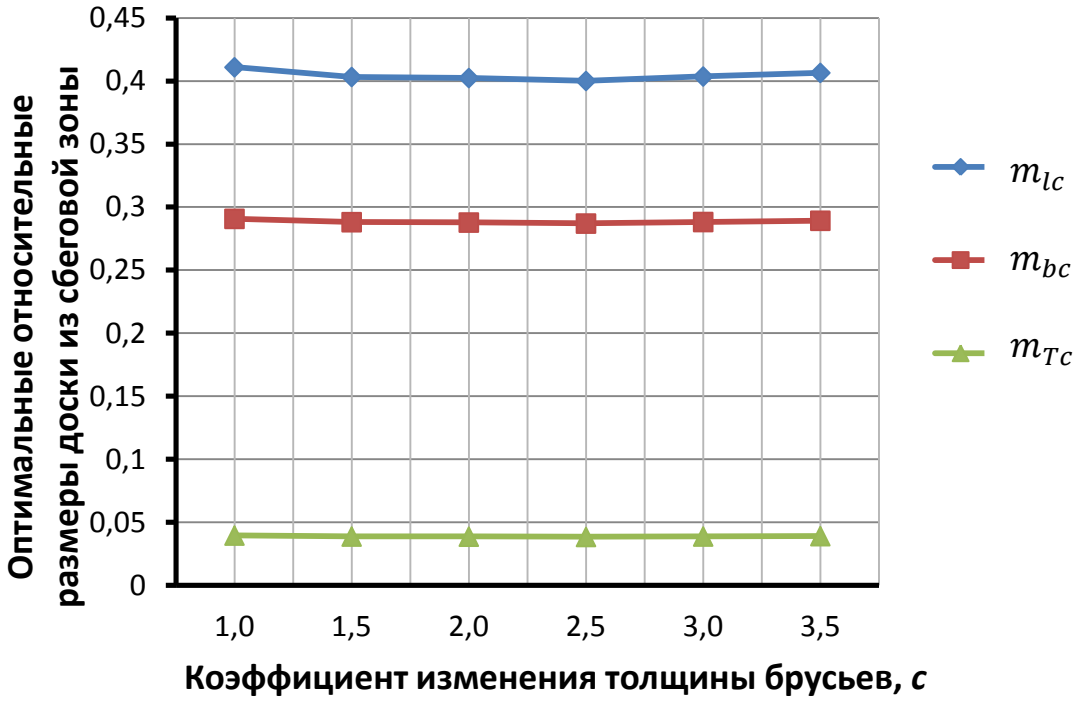


Рис. 4.58. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{lc}, m_{bc}, m_{Tc} при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м.

Сравнивая графики на рис. 4.53 и 4.58, следует обратить внимание, что оптимальные относительные размеры досок, получаемых из сбеговой зоны, отличаются между собой. Оптимальная относительная ширина доски в сбеговой зоне при длине пиловочника l = 3,0 м равна m_{bc} = 0,18, тогда как оптимальная относительная ширина этой доски при l = 6,0 м равна m_{bc} = 0,28 от диаметра пиловочника в вершинном торце.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок уменьшаются, причем уменьшения оптимальных относительных толщин боковых обрезных досок в диапазоне коэффициента изменения толщины брусьев c = 3,0…3,5 практически не происходит (см. рис. 4.59).

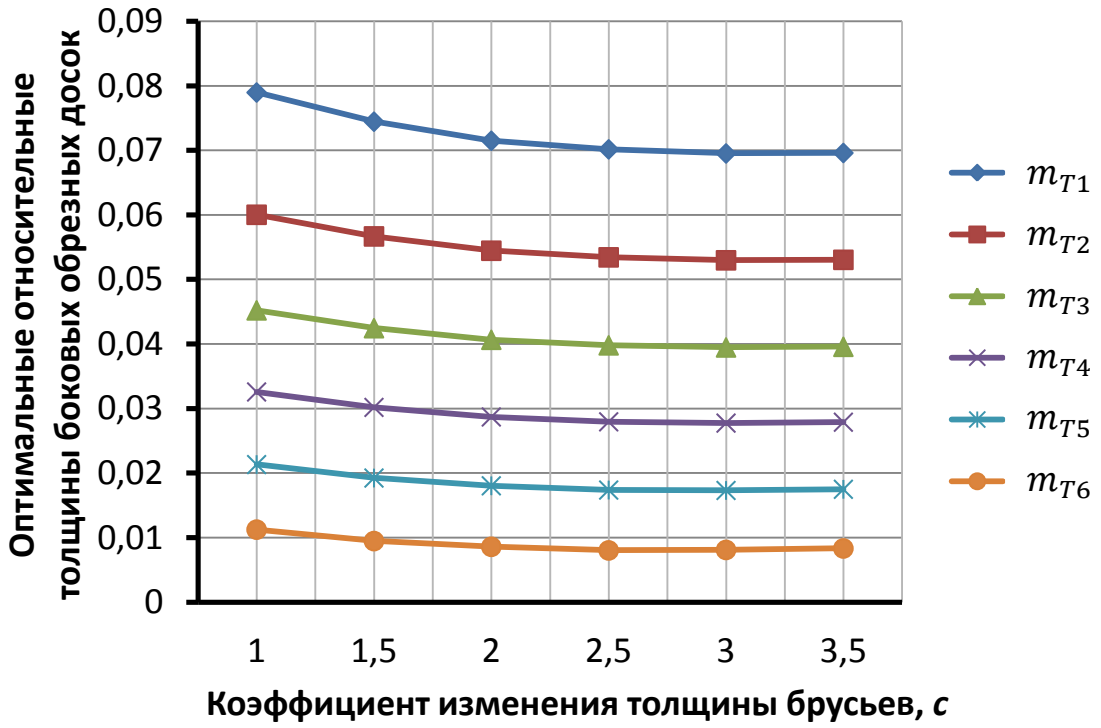


Рис. 4.59. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м

С увеличением коэффициента изменения толщины брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок уменьшаются до коэффициента изменения толщины брусьев c = 2,5, а затем практически мало изменяются (см. рис. 4.60). Такая закономерность практически совпадает с результатом, представленным на рис. 4.55 для длины пиловочника l = 3,0 м.

Сравнивая между собой результаты на рис. 4.55 и 4.60, можно отметить, что отличие их не очень значительное, особенно в диапазоне изменения толщин брусьев c = 2,5…3,5.

С увеличением длины пиловочника оптимальная относительная толщина брусьев и размер пифагорической зоны изменяются (уменьшаются) незначительно (см. рис. 4.61 и 4.62). На рис. 4.61 представлены результаты при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0.

Таким образом, можно сделать вывод, что длина пиловочника для данного варианта раскроя оказывает незначительное влияние на оптимальные относительные размеры брусьев.

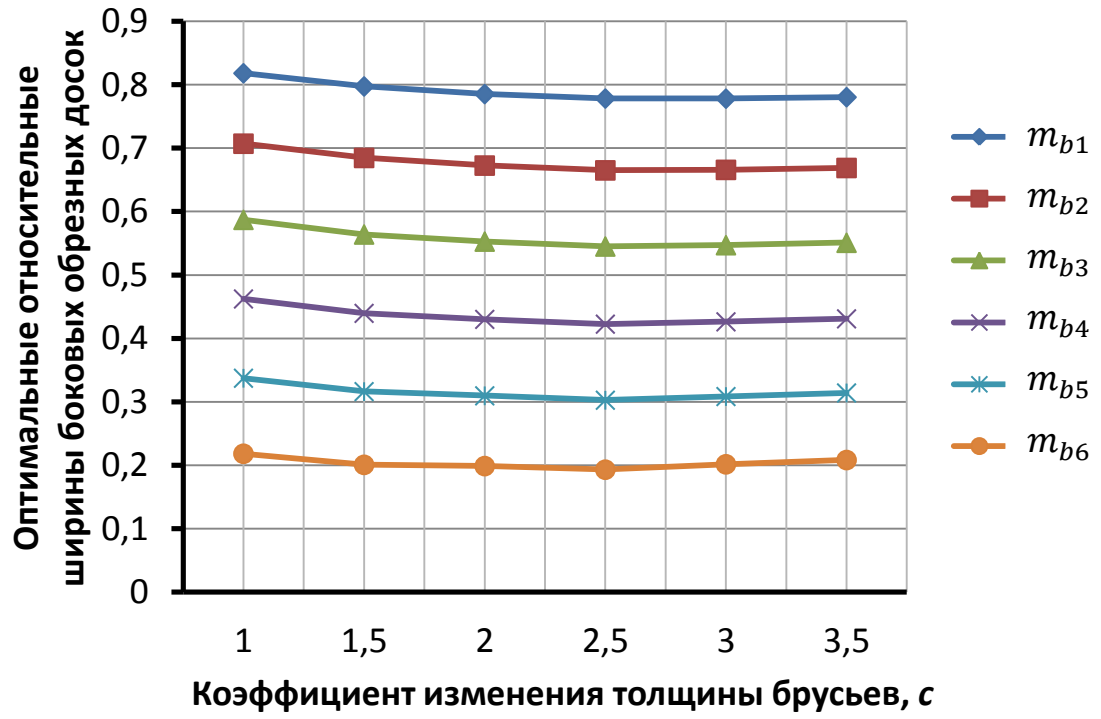


Рис. 4.60. Влияние коэффициента изменения толщины брусьев c на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и длине пиловочника l = 6,0 м

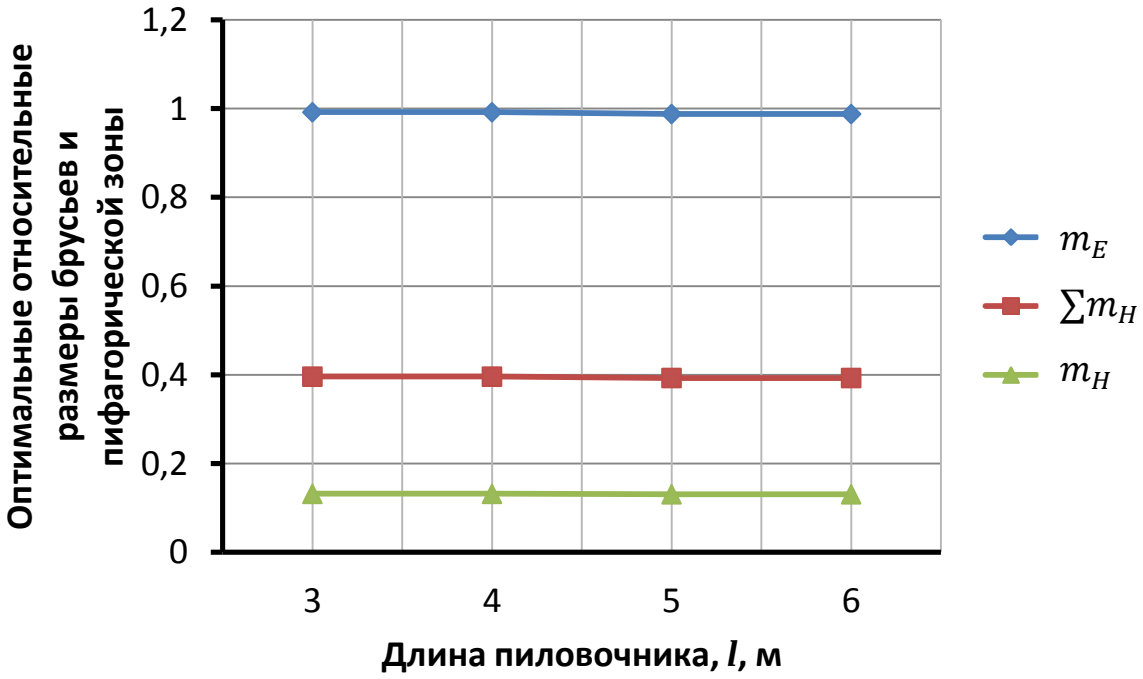


Рис. 4.61. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные m_E, $\sum m_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 1,0

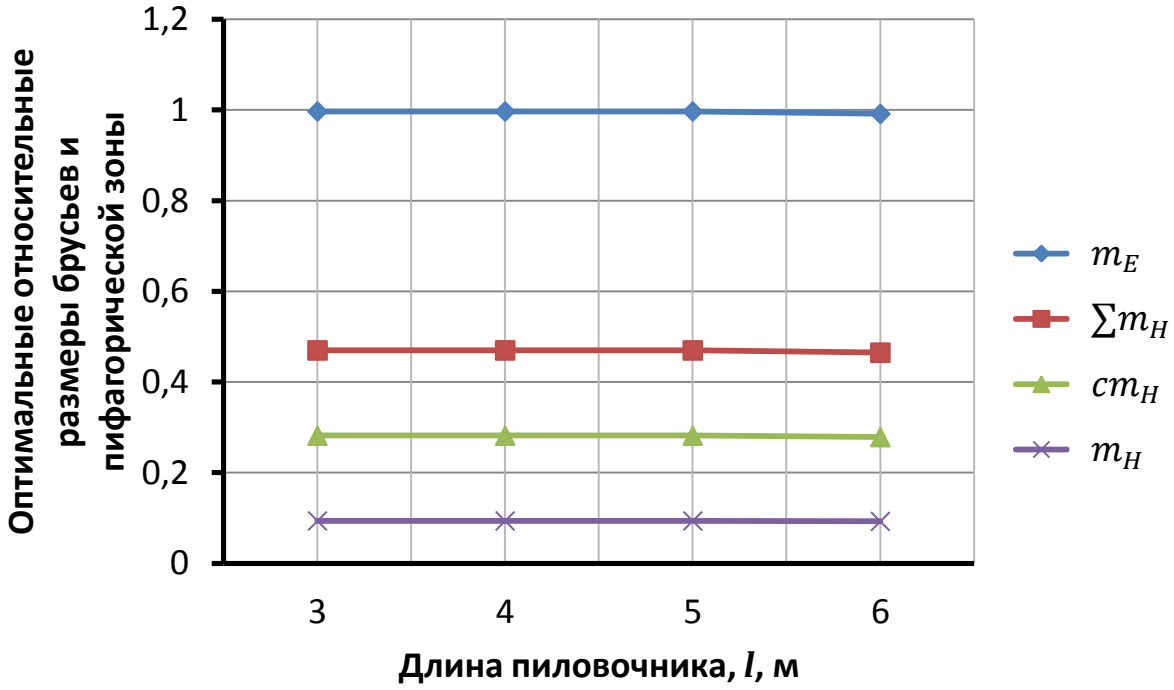


Рис. 4.62. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры $m_E, \sum m_H, m_H$ при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 3,0

На рис. 4.62 представлены результаты расчетов при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0. При этом следует отметить, что соотношения $\sum m_H$ и m_H отличаются между собой по сравнению с вариантом, когда c = 1,0. При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальная относительная сумма толщин всех трех брусьев также больше, чем при коэффициенте c = 1,0. В итоге пифагорическая зона при коэффициенте изменения c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Следует также отметить, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 оптимальная относительная толщина бокового бруса меньше, чем при коэффициенте c = 1,0. Длина пиловочника на размеры брусьев и боковых обрезных досок в пифагорической зоне не оказывает значительного влияния.

С увеличением длины пиловочника оптимальный относительный объем досок, получаемых из сбеговой зоны, возрастает. Оптимальный относительный объем досок, получаемых из пифагорической зоны, с увеличением длины пиловочника незначительно увеличивается, а оптимальный относительный объем брусьев незначительно уменьшается. При этом суммарный оптимальный относительный объем пиломатериалов, получаемых из бревна, увеличивается (рис. 4.63). Эти результаты представлены для относительной ширины

пропила m_e = 0,006 и коэффициента изменения толщины брусьев c = 1,0. Уменьшение оптимального относительного выхода пиломатериалов $П_V$ с увеличением длины пиловочника объясняется тем, что при увеличении длины пиловочника возрастает сбеговая зона и объем бревна возрастает в большей степени, чем объем пиломатериалов, получаемых из сбеговой зоны m_{Vc}.

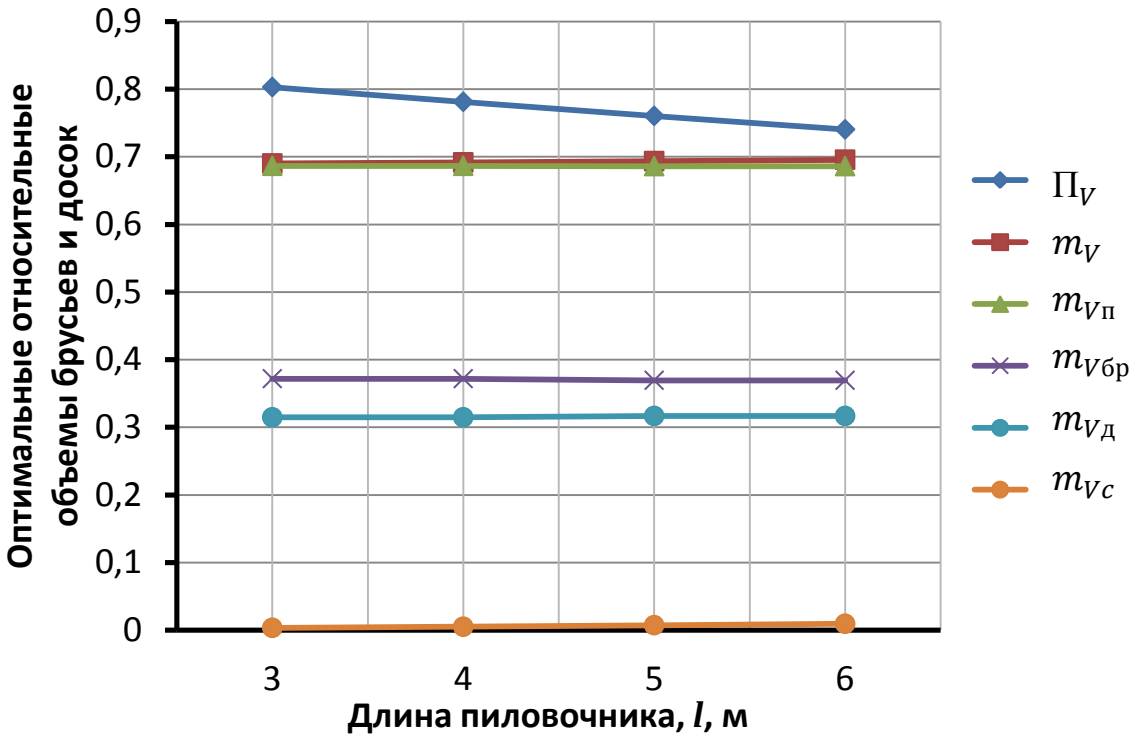


Рис. 4.63. Влияние длины бревна l на оптимальные относительные объемы, m_V, $m_{V\text{п}}$, $m_{V\text{бр}}$, $m_{V\text{д}}$, m_{Vc}, и выход пиломатериалов $П_V$ при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 изменение оптимальных относительных объемов получаемых пиломатериалов представлено на рис. 4.64. Закономерности изменения этих показателей примерно одинаковы, как и на рис. 4.63, но их соотношения несколько другие. Так, на рис. 4.64 при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 суммарный оптимальный относительный выход пиломатериала m_V больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Следует также отметить, что общий относительный выход пиломатериалов из пифагорической зоны $m_{V\text{п}}$ при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Это очень важная закономерность. В то же время оптимальный относительный объем боковых обрезных досок при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 больше, чем при коэффициенте c = 3,0. Общий оптимальный относительный

выход пиломатериалов при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 немного больше по сравнению с вариантом, когда коэффициент c = 1,0.

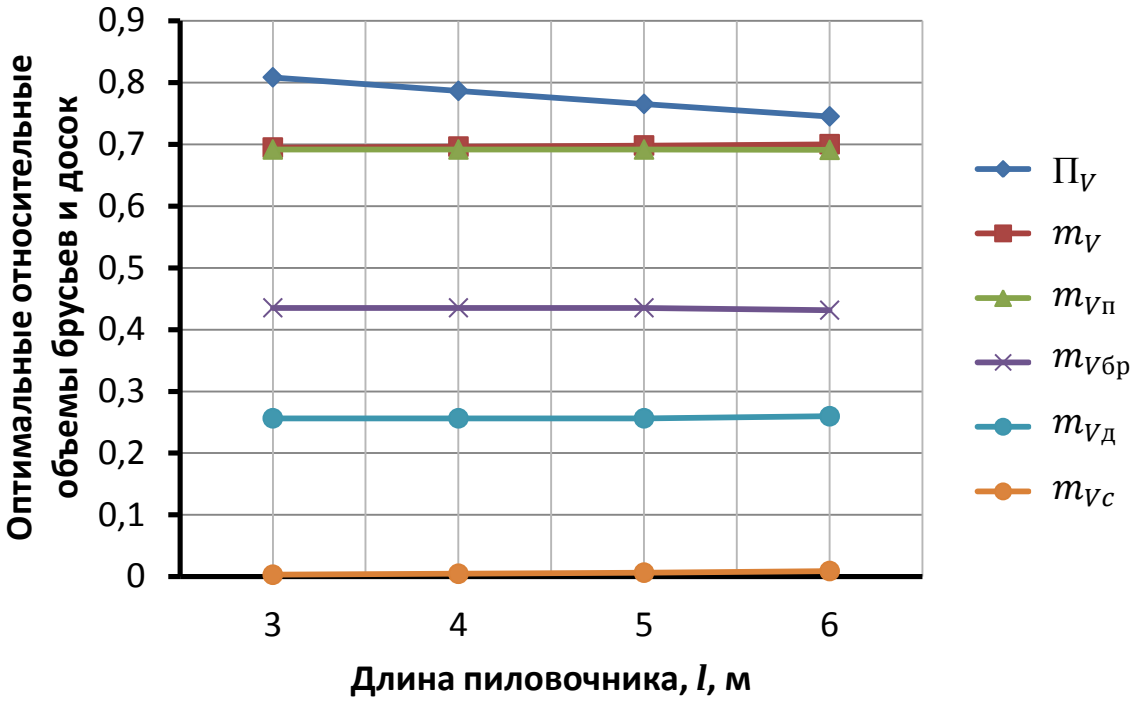


Рис. 4.64. Влияние длины бревна l на оптимальные относительные объемы, m_V, $m_{Vп}$, $m_{Vбр}$, $m_{Vд}$, m_{Vc}, и выход пиломатериалов $П_V$ при m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0

С увеличением длины бревна оптимальная относительная толщина доски, получаемой из сбеговой зоны, и оптимальная относительная ширина возрастают, а относительная длина незначительно уменьшается (см. рис. 4.65). Эти результаты получены при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0. Это объясняется тем, что с увеличением длины пиловочника сбеговая зона существенно возрастает, и поэтому оптимальные относительные размеры доски (ширина и толщина), получаемые из сбеговой зоны, увеличиваются.

Если рассматривать эти результаты путем сравнения размеров доски, получаемой из сбеговой зоны, с вариантом при длине бревна l = 3,0 м, необходимо отметить, что в наибольшей степени изменяются оптимальные относительные размеры (толщина и ширина) доски, получаемой из сбеговой зоны.

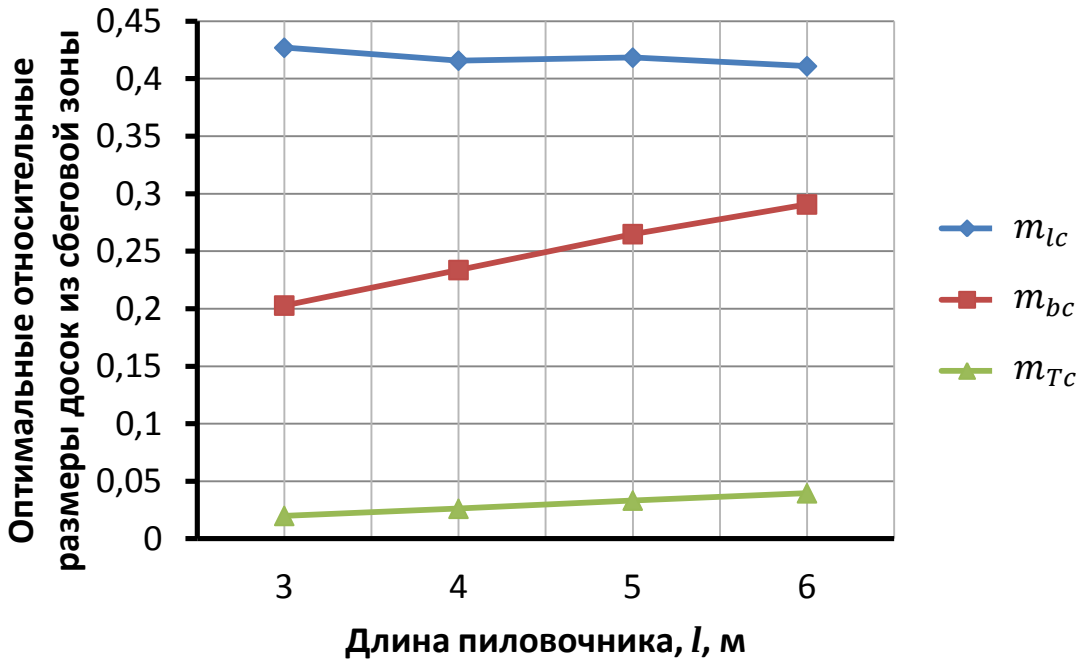


Рис. 4.65. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc}, получаемой из сбеговой зоны, при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 1,0

При коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальная относительная длина доски, получаемой из сбеговой зоны, немного изменяется (см. рис. 4.66). При этом оптимальная относительная толщина и оптимальная относительная ширина доски, получаемой из сбеговой зоны, возрастают. Следует отметить, что при коэффициенте c = 3,0 относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, несколько меньше, чем при коэффициенте c = 1,0. Это объясняется тем, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 немного больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Необходимо отметить, что оптимальные относительные размеры доски (толщина и ширина), получаемой из сбеговой зоны, с увеличением длины пиловочника возрастают в наибольшей степени, чем оптимальная относительная длина этой доски.

Сравнивая между собой рис. 4.65 и 4.66, можно отметить, что результаты отличаются незначительно. Это объясняется тем, что пифагорическая зона при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 немного отличается от варианта, когда коэффициент изменения толщины брусьев c = 3,0.

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев

c = 1,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (рис. 4.67).

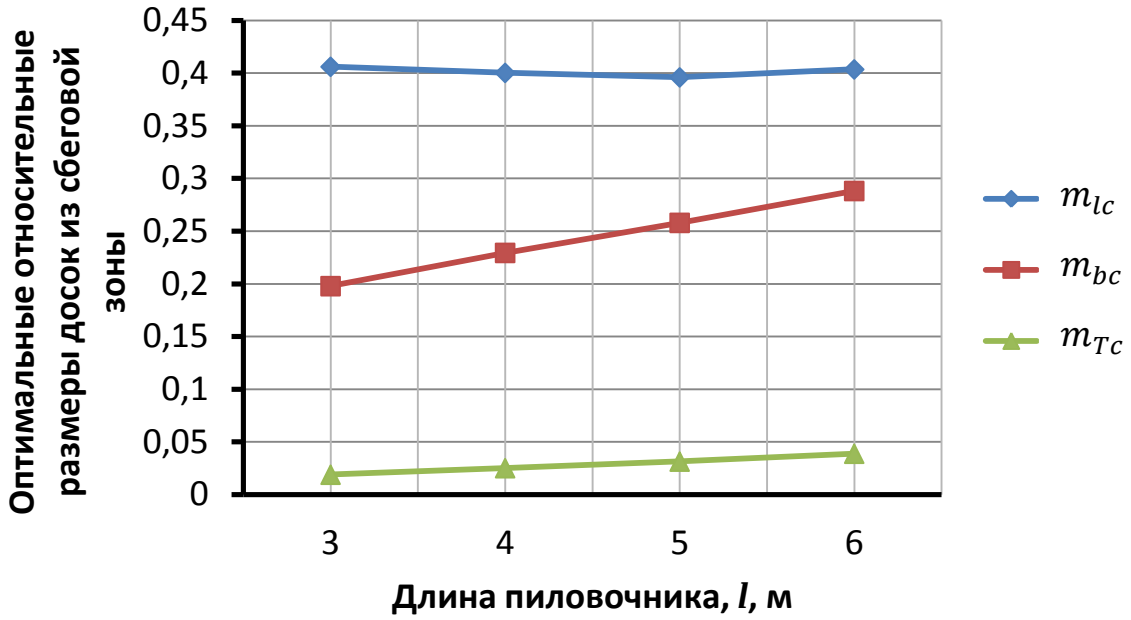


Рис. 4.66. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные размеры доски, получаемой из сбеговой зоны, m_{Tc}, m_{bc}, m_{lc} при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 3,0

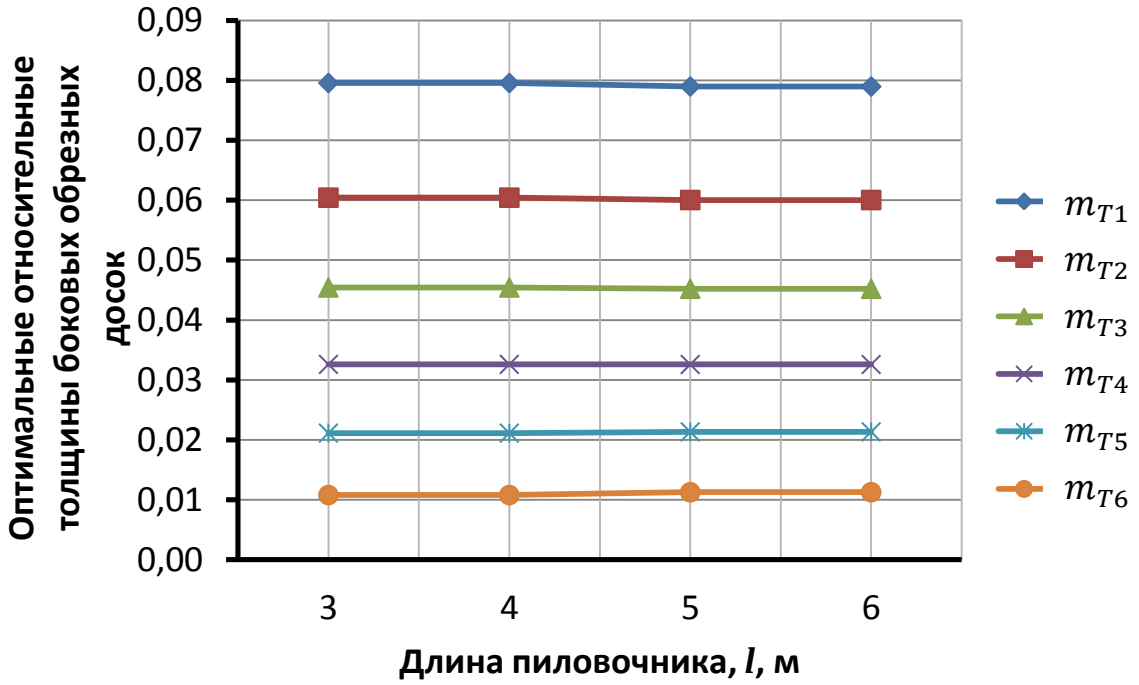


Рис. 4.67. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 1,0

Расчеты показали, что с увеличением длины пиловочника наблюдается незначительный рост оптимальных относительных толщин у двух крайних пар боковых обрезных досок, а у двух центральных пар досок, наоборот, происходит незначительное уменьшение оптимальных относительных толщин этих досок.

С увеличением коэффициента изменения толщин брусьев c при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок увеличиваются (рис. 4.68). Оптимальная относительная ширина четырех крайних боковых обрезных досок начинает интенсивно возрастать при длине пиловочника l = 4,0 м и более практически прямо пропорционально. При этом интенсивность увеличения оптимальной относительной ширины боковой обрезной доски снижается от крайней боковой обрезной доски к центру пиловочника. Следовательно, увеличение длины пиловочника при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 в наибольшей степени влияют на оптимальные относительные ширины крайних боковых обрезных досок и по мере приближения к центру пиловочника это влияние замедляется.

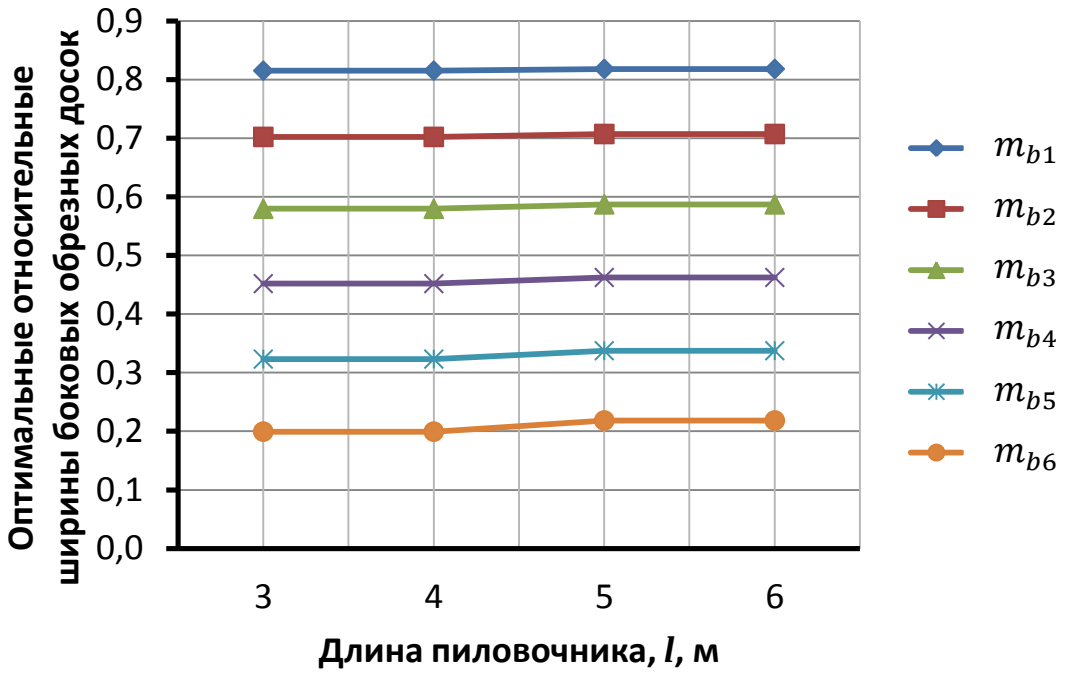


Рис. 4.68. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 1,0

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 4.69).

При коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 оптимальная относительная толщина крайней (шестой) пары боковых обрезных досок колеблется в пределах 0,0074...0,0081. Это объясняется тем, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 относительная доля брусьев в пиловочнике возрастает, а относительная доля боковых обрезных досок уменьшается. Поэтому получается, что шестую (последнюю) пару боковых обрезных досок практически выпиливать не целесообразно.

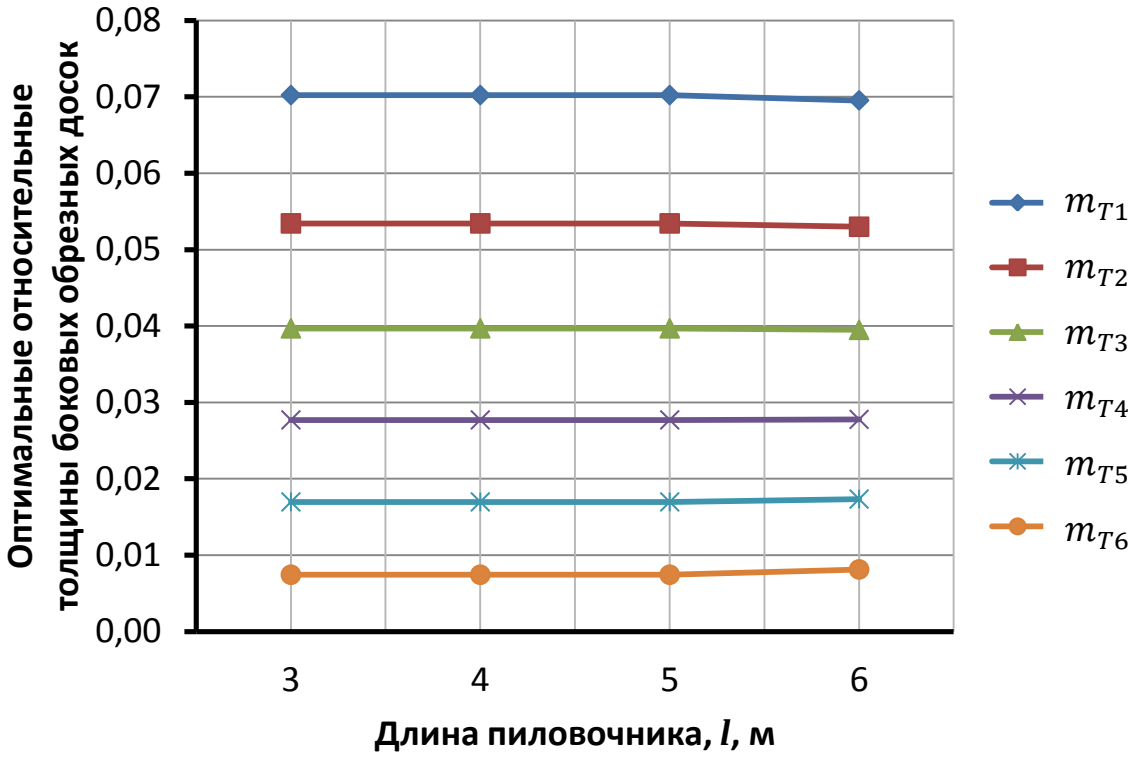


Рис. 4.69. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные толщины боковых обрезных досок при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте c = 3,0

С увеличением длины пиловочника l при относительной ширине пропила m_e = 0,006 и коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок практически мало изменяются (см. рис. 4.70). Наблюдается незначительный рост оптимальных относительных ширин, особенно трех крайних пар боковых обрезных досок, после длины пиловочника l = 5 м.

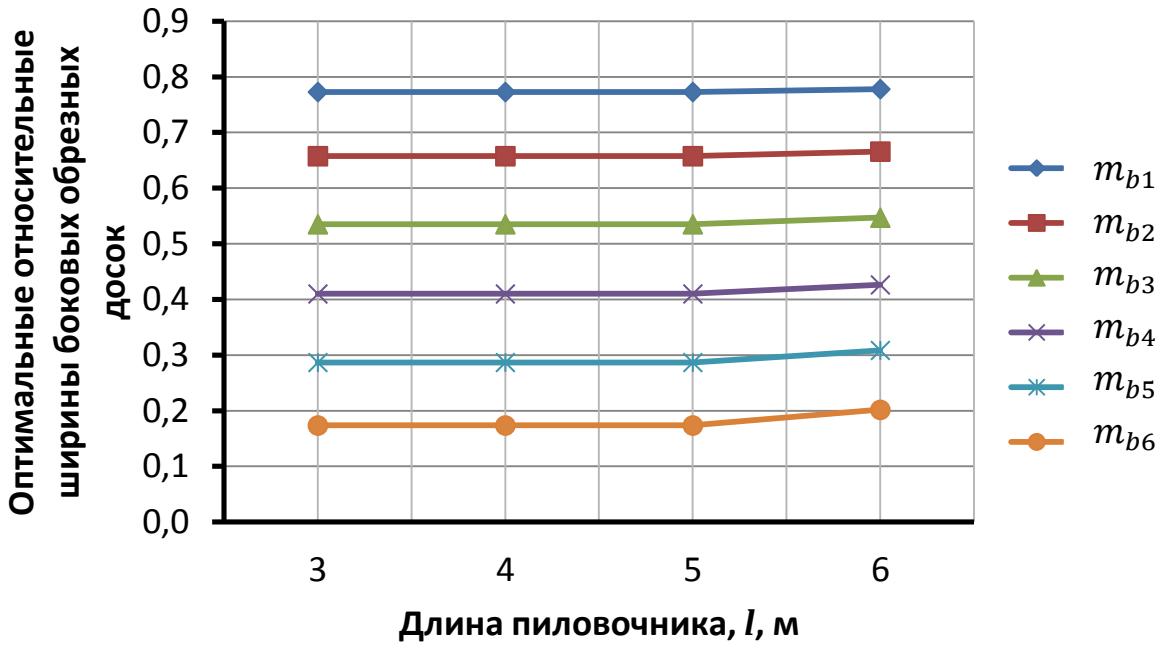


Рис. 4.70. Влияние длины пиловочника l на оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при m_e = 0,006 и коэффициенте c = 3,0

Необходимо отметить, что при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 оптимальная относительная ширина шестой (крайней) пары боковых обрезных досок получается небольшой величины и составляет m_{b6} = 0,17 ... 0,20 от диаметра пиловочника в вершинном торце. В этом случае ширина этой боковой обрезной доски получается стандартных размеров. Сравнивая между собой рис. 4.67 и 4.69, необходимо отметить, что относительные размеры толщин боковых обрезных досок при c = 1,0 немного больше, чем при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0. Это объясняется тем, что доля брусьев в пифагорической зоне при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Сравнивая между собой рис. 4.68 и 4.70, необходимо обратить внимание, что оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок при коэффициенте c = 1,0 по величине немного больше, чем при коэффициенте c = 3,0, хотя изменения этих размеров незначительны. Это связано с тем, что суммарная толщина брусьев при коэффициенте c = 3,0 больше, чем при коэффициенте c = 1,0. Поэтому при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 3,0 оптимальные относительные ширины боковых обрезных досок немного меньше, чем при коэффициенте c = 1,0.

Кроме того, с увеличением длины пиловочника при коэффициенте изменения толщины брусьев c = 1,0 наблюдается небольшой

рост оптимальных относительных ширин у трех периферийных боковых обрезных досок, начиная с длины пиловочника l = 4,0 м. Такая закономерность не наблюдается при коэффициенте изменения толщин брусьев c = 3,0 (см. рис. 4.70).

4.7. Основные выводы по главе

1. При раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием из пифагорической зоны трех брусьев одинаковой толщины [47] и шести пар боковых обрезных досок оказалось, что оптимальная относительная толщина бруса равна 0,116, при которой целевая функция принимает максимальное значение. В этом случае сумма толщин всех трех брусьев составляет 0,348 от диаметра пиловочника в вершинном торце [47]. Пифагорическая зона в этом случае равна 0,972 от диаметра бревна в вершинном торце. Оказалось, что при выпиливании трех брусьев одинаковой толщины и шести пар боковых обрезных досок имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором площадь поперечного сечения этих брусьев и досок принимает максимальное значение [58]. Следовательно, принятая гипотеза о наличии экстремума при составлении целевой функции подтверждается.

2. С увеличением ширины пропила оптимальная относительная толщина бруса незначительно возрастает. В связи с этим площадь поперечного сечения брусьев также возрастает, а площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается [54]. В итоге суммарная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок с увеличением ширины пропила уменьшается. Таким образом, установлена интересная зависимость, что с увеличением ширины пропила оптимальные толщины брусьев возрастают, а оптимальные толщины боковых обрезных досок уменьшается.

3. При раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины выход обрезных пиломатериалов вначале с увеличением коэффициента изменения толщины бруса возрастает, а затем уменьшается [44]. Максимальное значение целевая функция принимает при условии, когда толщина центрального бруса больше толщины бокового бруса в 3,0 раза. В этом случае относительная толщина бокового бруса равна 0,084 от диаметра пиловочника в вершинном торце, а относительная толщина центрального бруса равна 0,294 от этого диаметра пиловочника. Суммарная толщина всех брусьев составляет 0,462 от диаметра пиловочника в вершинном торце. Пифа-

горическая зона в этом случае равна 0,99 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При изменении коэффициента *c* в пределах 2,0…3,5 целевая функция изменяется незначительно.

4. При увеличении коэффициента изменения толщины бруса оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. Но в итоге имеется такое сочетание соотношение размеров брусьев и боковых обрезных досок, при котором получается максимальная сумма поперечных сечений получаемых пиломатериалов (брусьев и досок). Для каждого значения коэффициента изменения толщины брусьев имеется оптимальный вариант сочетания размеров брусьев и боковых досок, при котором целевая функция принимает максимальное значение. В результате расчетов определено глобальное оптимальное значение коэффициента изменения толщины брусьев, при котором целевая функция принимает максимальное значение из максимальных вариантов. Таким образом, подтверждается гипотеза о том, что, возможно, для каждого значения коэффициента изменения толщины бруса имеется такое сочетание размеров брусьев и боковых досок, при котором получается максимальный выход пиломатериалов.

5. С увеличением ширины пропила для различных коэффициентов изменения толщин брусьев *c* оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев возрастает, а относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. В итоге суммарная оптимальная относительная площадь поперечного сечения брусьев и боковых обрезных досок все-таки уменьшается. Следовательно, с увеличением ширины пропила размеры брусьев возрастают, а размеры боковых обрезных досок уменьшаются при любом значении коэффициента *c*. При этом оптимальное соотношение толщины центрального бруса $H_ц$ к толщине бокового бруса $H_б$ сохраняется прежним, т. е. $c = 3{,}0$. Такая важная закономерность должна также учитываться при расчете и составлении поставов.

6. При последующей распиловке брусьев на обрезные доски образуются потери древесины в виде опилок. В этом случае оптимальное (глобальное) соотношение толщин центрального бруса к толщине бокового бруса сохраняется и принимает величину равную $c = 3{,}0$. Это объясняется тем, что с уменьшением толщины центрального бруса потери древесины в опилки при его раскрое на обрезные доски снижаются в большей мере. С увеличением коэффициента *c* опти-

мальная относительная площадь поперечного сечения центрального бруса возрастает, а оптимальная относительная площадь поперечного сечения бокового бруса уменьшается, но суммарная площадь поперечного сечения брусьев вначале возрастает, а затем уменьшается. При этом оптимальная относительная площадь поперечного сечения боковых обрезных досок уменьшается. В итоге максимальное значение (глобальный оптимум) целевая функция принимает при c = 3,0.

7. При раскрое пиловочника длиной 6 м с учетом сбеговой зоны оказалось, что выход обрезных пиломатериалов повышается всего лишь примерно на 2,0%, причем их длина составляет примерно 0,4 от длины бревна, а относительная толщина сбеговой доски составляет 0,039 от диаметра пиловочника в вершинном торце. При длине бревна l = 3,0 м относительный выход пиломатериалов получается немного больше, чем при длине бревна l = 6,0 м [92]. При этом относительная оптимальная толщина сбеговой доски составляет 0,019, а оптимальная относительная ширина этой доски – 0,2 от диаметра пиловочника в вершинном торце.

8. Таким образом, разработаны алгоритмы решения задач оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров брусово-развальным способом с выпиливанием трех брусов и шести пар боковых обрезных досок. Для различных условий раскроя установлена сложная взаимосвязь влияния различных факторов на оптимальные размеры брусьев и боковых обрезных досок при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и шести пар боковых обрезных досок.

9. Анализируя совместно пифагорическую и сбеговую зоны пиловочника, следует отметить, что окончательный ответ по выбору рационального соотношения коэффициента изменения толщин брусьев c, а также его диаметра зависит от спецификации требуемых размеров досок. Зная алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника и спецификацию требуемых размеров досок, составляем программу по расчету и выбору оптимального диаметра пиловочника и схемы его раскроя, при которой получается максимальный выход пиломатериалов (при условии выполнения спецификационных (требуемых) размеров досок).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения традиционных и вновь предлагаемых способов раскроя пиловочника разработана методика определения оптимальных размеров брусьев и боковых обрезных досок с получением максимального (оптимального) выхода пиломатериалов. В методике используется классический подход при составлении математической модели. Целевая функция представляет собой объем получаемых пиломатериалов (брусьев и обрезных досок). Для пифагорической зоны пиловочника в качестве критерия оптимальности рекомендуется использовать площади поперечных сечений брусьев и боковых обрезных досок. В уравнениях связи устанавливается математическая взаимосвязь размеров брусьев и обрезных досок с размерами пиловочника (прежде всего с диаметром бревна в вершинном торце). В этих математических моделях задачи оптимизации раскроя пиловочника оказалось, что неизвестных факторов больше, чем количество уравнений связи. Такие задачи оптимизации классическим путем решить невозможно. Это сдерживало возможность определения оптимальных размеров пиломатериалов, получаемых из пиловочника. В связи с этим в работе используется метод множителей Лагранжа, который позволяет эту взаимосвязь факторов рассматривать в совокупности. Для этого составляется функция Лагранжа, а затем определяются частные производные, позволяющие получить новые дополнительные уравнения, раскрывающие взаимосвязь размеров брусьев и досок с размерами пиловочника. Рассматривая эти новые уравнения совместно с уравнениями связи, удалось найти систему уравнений (алгоритм), в которой в определенной последовательности устанавливается взаимосвязь размеров брусьев и боковых обрезных досок с размерами бревна. Для реализации этой системы уравнений используется численный метод, а размеры брусьев и боковых обрезных досок принимаются относительными. В результате такого методического подхода были определены оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок, при которых целевая функция принимает максимальное (оптимальное) значение. В монографии также используется метод последовательной оптимизации. Установлено влияние основных технологических и размерных характеристик (факторов) на оптимальный выход пиломатериалов. Алгоритмы решения задач оптимизации раскроя пиловочника рекомендуется использовать для подготовки программы расчета и составления поставов на ЭВМ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов А. И. Методические положения к расчету оптимальных размеров фигурного ступенчатого бруса при раскрое пиловочника на фрезернопильных линиях агрегатной переработки бревен // Машиностроение. Конструкции и технологии : сб. науч. тр. ВятГТУ. 1998. № 3. С. 24–27.

2. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров тарного ящика методом множителей Лагранжа // Машиностроение. Конструкции и технологии : сб. науч. тр. ВятГТУ. 1998. № 3. С. 56–60.

3. Агапов А. И. Влияние соотношения высоты бруса и диаметра бревна на оптимальные размеры боковых обрезных досок при брусово-развальном способе раскроя // Наука – производство – технологии – экология. 2002. Т. 3. С. 95–96.

4. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров боковых досок при раскрое бревен брусовым способом // Наука – производство – технологии – экология. 2002. Т. 3. С. 93.

5. Агапов А. И. Расчет оптимальных размеров бруса и обрезных боковых досок при брусово-развальном способе раскроя бревен // Наука – производство – технологии – экология. 2002. Т. 3. С. 97–98.

6. Агапов А. И. Влияние и учет сбега бревна при раскрое пиловочника // Актуальные проблемы лесного комплекса : сб. науч. тр. междунар. науч.-техн. конф. Вып. 4. Брянск, 2003. С. 94–95.

7. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров основного постава брусово-развального способа раскроя бревен // Наука – производство – технологии – экология : всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 5 т. Т. 5. ФАМ, ФСА. Киров : Изд-во ВятГУ, 2003. С. 97–98.

8. Агапов А. И. Определение пифагорической зоны при брусково-развальном способе раскроя бревен // Наука – производство – технологии – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 5 т. Т. 5. ФАМ, ФСА. Киров : Изд-во ВятГУ, 2003. С. 95–96.

9. Агапов А. И. Оптимизация раскроя крупномерных бревен // Наука – производство – технологии – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 5 т. Т. 5. ФАМ, ФСА. Киров : Изд-во ВятГУ,2003. С. 99–100.

10. Агапов А. И. Объем сегментов при раскрое пиловочника // Актуальные проблемы лесного комплекса : сб. науч. тр. междунар. науч.-техн. конф. Вып. 8. Брянск, 2004. С. 215–216.

11. Агапов А. И. Определение оптимального соотношения высоты бруса и диаметра бревна при брусово-развальном способе раскроя

бревен больших размеров // Наука – производство – технологии-экология. 2004. Т. 5. С. 81–82.

12. Агапов А. И. Определение оптимального соотношения высоты бруса и диаметра бревна при брусово-развальном способе раскроя бревен больших размеров. Киров, 2004. 6 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 26.03.04 № 499-В2004.

13. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров бруса и досок при брусово-развальном способе раскроя крупномерных бревен // Наука – производство – технологии-экология. 2004. Т. 5. С. 75–77.

14. Агапов А. И. Оценка пифагорической зоны при раскрое бревен брусово-развальным способом // Наука – производство – технология – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 5 т. Вып. 5. ФАМ, ИСФ. Киров : ВятГУ, 2004. С. 68–70.

15. Агапов А. И., Третьяков Д. Н. Решение уравнения оптимального соотношения высоты бруса и диаметра бревна при раскрое пиловочника крупных размеров // Наука – производство – технологии – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 5 т. Т. 5. ФАМ, ИСФ. Киров : Изд-во ВятГУ, 2004. С. 68–69.

16. Агапов А. И. Анализ раскроя пиловочника симметричным поставом с получением бруса квадратного сечения и четырех равных обрезных досок // Наука и образование на службе лесного комплекса : сб. материалов междунар. науч.-практ. конф. Воронеж, 2005. С. 254–255.

17. Агапов А. И. Математическая модель для определения оптимальных размеров досок в сбеговой зоне пиловочника // Наука – производство – технологии – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 6 т. Т. 3. ФАМ, ИСФ. Киров : Изд-во ВятГУ, 2005. С. 107–109.

18. Агапов А. И. Определение пифагорической зоны пиловочника // Наука – производство – технологии – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 6 т. Т. 3. ФАМ, ИСФ. Киров : Изд-во ВятГУ, 2005. С. 113–115.

19. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника средних размеров // Актуальные проблемы лесного комплекса : сб. науч. тр. междунар. науч.-техн. конф. Вып. 11. Брянск, 2005. С. 91–93.

20. Агапов А. И. Оценка формул для определения пифагорической зоны пиловочника // Наука – производство – технологии-экология. 2005. Т. 3. С. 116–118.

21. Агапов А. И. Уравнение параболы внешнего контура пласти необрезной доски, получаемой при раскрое пиловочника // Наука – производство – технологии-экология. 2005. Т. 3. С. 110–112.

22. Агапов А. И. Раскрой бревна с выпиливанием строительного бруса и боковых досок оптимальных размеров // Наука – производство – технологии – экология. 2006. Т. 5. С. 158–162.

23. Агапов А. И. Определение оптимальных соотношений размеров бруса и боковых досок при брусово-развальном способе раскроя бревен // Наука – производство – технологии – экология : Всерос. науч.-техн. конф. : сб. материалов : в 8 т. Т. 5. ФАМ, ФСА. Киров : Изд-во ВятГУ, 2007. С. 131–134.

24. Агапов А. И. Теоретические предпосылки к расчету оптимальных размеров пилопродукции при раскрое пиловочника брусово-развальным способом // Урал промышленный – Урал полярный: социально-экономические и экологические проблемы лесного комплекса : сб. материалов междунар. науч.-техн. конф. Екатеринбург, 2007. С. 116–119.

25. Агапов А. И. Определение оптимальной зоны размеров бруса и боковых досок при брусово-развальном способе раскроя пиловочника/ А. И. Агапов // Наука – производство – технологии – экология. Т. 4. ФАМ, ФСА. Киров, 2008. С. 139–140.

26. Агапов А. И. Анализ результатов расчета по определению оптимальной зоны размеров бруса и досок при брусово-развальном способе раскроя пиловочника // Наука – производство – технологии – экология. Т. 4. ФАМ, ФСА. Киров, 2008. С. 141–143.

27. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника больших размеров // Наука – производство – технологии – экология. Т. 2. ХФ, БФ, ФАМ. Киров, 2009. С. 188–191.

28. Агапов А. И. Определение оптимальных соотношений размеров боковых досок при брусово-развальном способе раскроя пиловочника // Наука – производство – технологии – экология. Т. 2. ХФ, БФ, ФАМ. Киров, 2009. С. 192–195.

29. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника больших размеров с выпиливанием двух брусьев // Актуальные проблемы развития лесного комплекса : материалы междунар. науч.-техн. конф., Вологда, 8–10 дек. Вологда, 2009. С. 104–107.

30. Агапов А. И. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры двух брусьев и двух пар боковых досок, получаемых при раскрое пиловочника брусово-развальным способом // Актуальные проблемы развития лесного комплекса : материалы междунар. науч.-техн. конф., Вологда, 8–10 дек. Вологда, 2010. С. 77–80.

31. Агапов А. И. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника с выпиливанием

трех брусьев и трех пар боковых досок // Актуальные проблемы развития лесного комплекса : материалы междунар. науч.-техн. конф., Вологда, 8–10 дек. Вологда, 2011. С. 94–97.

32. Агапов А. И. Оптимизация брусово-развального способа раскроя пиловочника с выпиливанием двух брусьев. Киров, 2011. 77 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 08.07.11 № 333-В20011.

33. Агапов А. И. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при брусово-развальном способе раскроя пиловочника больших размеров // Ежегодная открытая Всероссийская научно-техническая конференция «Общество, наука, инновации» (НТК-2011) : сб. материалов / ВятГУ. Киров, 2011. Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств».

34. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника больших размеров с получением трех брусьев и одной пары боковых досок // Ежегодная открытая Всероссийская научно-техническая конференция «Общество, наука, инновации» (НТК-2011) : сб. материалов / ВятГУ. Киров, 2011. Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств».

35. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев и трех пар боковых досок // Актуальные проблемы лесного комплекса. 2011. № 30. С. 179–182.

36. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев и трех пар боковых досок // Лесной комплекс: состояние и перспективы развития : сб. материалов Брянск, 2011. URL: http://science-bsea.bgita.ru/2011/les_komp_2011/agapov_algoritm.htm.

37. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров обрезной доски, получаемой из сегмента, с учетом ширины пропила // Актуальные проблемы и перспективы развития лесопромышленного комплекса : сб. материалов. Кострома, 2012. С. 59–61.

38. Агапов А. И. Оптимизация раскроя сегмента с выпиливанием двух обрезных досок // Лес-2012: сб. материалов. Брянск, 2011. URL: http://science-bsea.bgita.ru/2012/les_2012/agapov_optim.htm.

39. Агапов А. И. Оптимизация технологических процессов деревообработки: учеб. пособие. Киров, 2012. 81 с.

40. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров брусьев и досок при раскрое пиловочника брусово-развальным способом с выпиливанием трех брусьев // Юбилейные февральские чтения: сб. ма-

териалов науч.-практ. конф., Сыктывкар, 20–22 февраля 2012 г. С. 497–503.

41. Агапов А. И. Оптимизация раскроя сегмента с выпиливанием двух обрезных досок // Актуальные проблемы лесного комплекса. 2012. № 32. С. 36–39.

42. Агапов А. И. Особенности раскроя пиловочника круговым способом распиловки // Общество, наука, инновации : Всерос. ежегод. науч.-техн. конф. : НТК-2012: 16–27 апреля 2012 г. : сб. материалов. Киров, 2012. С. 1286–1290.

43. Агапов А. И., Веселов Н. В. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и пяти пар боковых досок // Общество, наука, инновации. (НПК-2013) : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов, 15–26 апр. 2013 г. Киров, 2013. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). (Факультет автоматизации машиностроения (ФАМ). Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств». Статья № 1).

44. Агапов А. И., Жилин А. А. Влияние толщины центрального бруса на оптимальные размеры пиломатериалов при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и шести пар боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2013 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф.: 15–26 апр. 2013 г. Киров, 2013. С. 1357–1360.

45. Агапов А. И., Ефимова К. Ю. Влияние толщины центрального бруса на оптимальные размеры пиломатериалов при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев и двух пар боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2013 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов, 15–26 апр. 2013 г. Киров, 2013. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). (Факультет автоматизации машиностроения (ФАМ). Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств». Статья № 5).

46. Агапов А. И., Ефимова К. О. Раскрой пиловочника больших размеров с выпиливанием трех брусьев и двух пар боковых досок // Научное творчество молодежи – лесному комплексу России : материалы IX Всерос. науч.-техн. конф. Ч. 1. Екатеринбург, 2013. С. 170–172.

47. Агапов А. И., Жилин А. А. Раскрой пиловочника больших размеров с выпиливанием трех брусьев и шести пар боковых досок // Научное творчество молодежи – лесному комплексу России : материалы IX Всерос. науч.-техн. конф. Ч. 1. Екатеринбург, 2013. С. 173–177.

48. Агапов А. И., Мчиславцев С. С. Особенности раскроя пиловочника крупных размеров с учетом сбеговой зоны // Общество, нау-

ка, инновации. НПК-2013 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов, 15–26 апр. 2013 г. Киров, 2013. С. 1361–1365.

49. Агапов А. И., Мчиславцев С. С. Раскрой пиловочника больших размеров с выпиливанием двух брусьев и двух сегментов // Общество, наука, инновации. НПК-2013 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов. Киров, 2013. С. 1367–1371.

50. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и двух пар боковых досок // Актуальные проблемы развития лесного комплекса : междунар. научно-техн. конф., Вологда, 3–4 декабря 2013 г. Вологда, 2014. С. 62–66.

51. Агапов А. И. Раскрой пиловочника средних размеров с выпиливанием одного бруса и двух сегментов // Общество, наука, инновации. НПК-2013 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов, 15–26 апр. 2013 г. Киров, 2013. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). (Факультет автоматизации машиностроения (ФАМ). Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств». Статья № 2).

52. Агапов А. И. Алгоритм определения оптимальных размеров брусьев и досок при раскрое пиловочника брусово-развальным способом // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2, № 2–2 (7-2). С. 287–291.

53. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи определения оптимальных размеров брусьев и досок при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев разной толщины и четырех пар боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2013 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов, 14–25 апр. 2014 г. Киров, 2014. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). (Факультет автоматизации машиностроения (ФАМ). Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств». Статья № 1).

54. Агапов А. И., Брагин А. В. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев и трех пар боковых досок // Инновационное развитие современной науки : междунар. науч.-практ. конф., Уфа, 31 янв. 2014 г. Уфа, 2014. Т. 3. С. 6–10.

55. Агапов А. И. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок // Лесотехнический журнал. 2014. Т. 4. № 2 (14). С. 128–135.

56. Агапов А. И., Глухова М. В. Влияние количества выпиливаемых досок, получаемых из брусьев, на выход пиломатериалов при

брусово-развальном способе раскроя пиловочника // Общество, наука, инновации. НПК-2014 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. : сб. материалов, 14–25 апр. 2014 г. Киров, 2014. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). (Факультет автоматизации машиностроения (ФАМ). Секция «Процессы и оборудование деревообрабатывающих производств». Статья № 3).

57. Агапов А. И., Глухова М. В. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника с выпиливанием трех брусьев и одной пары боковых досок // Актуальные проблемы развития лесного комплекса : междунар. науч.-техн. конф., Вологда, 3–4 декабря 2013 г. Вологда, 2014. С. 67–69.

58. Агапов А. И. Постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев одинаковой толщины и четырех пар боковых досок // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 2(22). С. 140–145. URL: http://brstu.ru/static/unit/journal_smt/number_22.php.

59. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров бруса и досок при раскрое пиловочника средних и больших размеров брусово-развальным способом // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 3(23). С. 167–174. URL: http://brstu.ru/static/unit/journal_smt/docs/number-23/167-174.pdf .

60. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника средних размеров при брусово-развальном способе распиловки // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения : 7-я междунар. дистанц. науч. конф., Липецк, 20–21 февраля 2014 г. Липецк, 2014. С. 16–24.

61. Агапов А. И. Оптимизация раскроя сегмента на обрезные пиломатериалы при брусовом способе распиловки пиловочника // Advanced science. 2014. № 1 (4). С. 38–58.

62. Пат. RU 2530997 C1 Российская Федерация, МПК [51]B27B 1/00. Способ изготовления обрезных пиломатериалов из пиловочника / А. И. Агапов; патентообладатель ВятГУ. № 2013123320/13; заявл. 21.05.13; опубл. 20.10.14, Бюл. № 29. 11 с.

63. Пат. RU 2592102 Российская Федерация, МПК[51] B27B/00. Способ изготовления обрезных пиломатериалов из пиловочника больших и крупных размеров / Агапов А. И.; патентообладатель ВятГУ. № 2014150290/13; заявл. 11.12.14; опубл. 28.06.16, Бюл. № 20. 25 с.

64. Агапов А. И. Постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника средних размеров брусово-развальным спосо-

бом с учетом ширины пропила // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2. № 3–4 (8-4). С. 375–382.

65. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи определения оптимальных размеров брусьев и досок при раскрое пиловочника крупных размеров с выпиливанием трех брусьев разной толщины и четырех пар боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2014 : Всерос. ежегод. науч.-техн. конф: НПК-2014, 15–26 апреля 2014 г. : сб. материалов. Киров, 2014. С. 1353–1356.

66. Агапов А. И., Ивликова М. В. Влияние толщины центрального бруса на оптимальные размеры пиломатериалов при выпиливании трех брусьев и одной пары боковых досок с учетом сбега бревна // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2. № 5-4(10-4). С. 9–13.

67. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров бруса и досок при раскрое пиловочника средних и больших размеров брусово-развальным способом // Актуальные проблемы лесного комплекса. 2014. № 40. С. 43–53.

68. Агапов А. И., Ивликова М. В. Влияние длины бревна на оптимальные размеры укороченной доски в сбеговой зоне при раскрое пиловочника брусово-развальным способом // Общество, наука, инновации. НПК-2015 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф., 13–24 апр. 2015 г. Киров, 2015. С. 734–739.

69. Агапов, А. И. Оптимизация раскроя пиловочника с выпиливанием строительного бруса и одной пары боковых обрезных досок // Общество, наука, инновации. НПК-2015 : Всерос. ежегод. науч.-практ. конф., 13–24 апр. 2015 г. Киров, 2015. С. 728–733.

70. Агапов А. И., Ивликова М. В. Влияние толщины центрального бруса на оптимальные размеры пиломатериалов при выпиливании трех брусьев и двух пар боковых досок // Леса России в XXI веке : сб. науч. тр. по итогам междунар. науч.-техн. интернет-конф. СПб., 2015. С. 100–103.

71. Агапов А. И. Постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника брусово-сегментным способом с учетом периферийной зоны и ширины пропила // Наука в современном информационном обществе : материалы V междунар. науч.-практ. конф., North Charleston, USA, 26–27 января 2015 г. 2015. С. 145.

72. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника больших размеров с выпиливанием трех брусьев и двух пар боковых досок //

Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2015. № 1 (343). С. 108–116.

73. Агапов А. И., Повышев А. В. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием трех брусьев разной толщины и трех пар боковых досок // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 7-1 (18-1). С. 36–42.

74. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника брусово-развальным способом с выпиливанием одного бруса и одной пары боковых обрезных досок с учетом потерь древесины в опилки // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8-3 (19-3). С. 160–171.

75. Агапов А. И., Ивликова М. В. Влияние длины бревна на оптимальные размеры брусьев и досок при раскрое пиловочника брусово-развальным способом с учетом сбеговой зоны // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8 – 3 (19-3). С. 172–180.

76. Агапов А. И., Попов А. И. Влияние количества граней призмы, получаемой при раскрое пиловочника, на полезный выход пиломатериалов // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8-3 (19-3). С. 180–190.

77. Агапов А. И. Постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием двух брусьев и четырех пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1244–1251.

78. Агапов А. И., Ивликова М. В. Влияние ширины пропила на оптимальные размеры пиломатериалов при выпиливании трех брусьев и двух пар боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1279–1285.

79. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника брусовым способом с выпиливанием двух брусьев и трех пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1234–1243.

80. Агапов А. И. Постановка и решение задачи оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием одного бруса и четырех пар

боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1257–1266.

81. Агапов А. И. Методика постановки и решения задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием двух брусьев и четырех пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2016. № 217. С. 142–157.

82. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника больших размеров брусово-развальным способом с выпиливанием одного бруса и пяти пар боковых досок // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1267–1278.

83. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с выпиливанием двух брусьев и четырех пар боковых обрезных досок с учетом ширины пропила // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1252–1256.

84. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров брусьев и досок при раскрое пиловочника брусово-сегментным способом с учетом ширины пропила // Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2016. № 1 (349). С. 138–146.

85. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника с выпиливанием двух брусьев и двух пар боковых обрезных досок с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски // Общество, наука, инновации. НПК-2016 : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2016, 18–29 апреля 2016 г. / ВятГУ. Киров, 2016. С. 1219–1233.

86. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника средних и больших размеров брусово-развальным способом // Вестник Московского государственного университета леса – Лесной вестник. 2016. Т. 20. № 3. С. 4–9.

87. Агапов А. И., Ивликова М. В. Определение оптимальных размеров бруса и досок при брусово-развальном способе раскроя пиловочника с учетом ширины пропила // Общество. Наука. Инновации (НПК-2017) : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2017, 1–29 апр. 2017 г. / ВятГУ. Киров, 2017. С. 605–613.

88. Агапов А. И. Ивликова М. В. Особенности новой методики постановки и решения задачи оптимизации брусового способа рас-

кроя пиловочника малых размеров // Общество. Наука. Инновации (НПК-2017) : сб. ст. Всерос. ежегод. науч.-практ. конф. НПК-2017, 1–29 апр. 2017 г. / ВятГУ. Киров, 2017. С. 614–626.

89. Агапов А. И. Определение оптимальных размеров досок в сбеговой зоне пиловочника // Advanced Science. 2017. № 1.

90. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника брусовым способом с получением из параболической зоны двух пар обрезных укороченных досок // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2017. Т. 2. С. 390–403.

91. Агапов А. И. Методика постановки и решения задачи оптимизации раскроя пиловочника больших размеров брусово-развальным способом с выпиливанием одного бруса и пяти пар боковых обрезных досок с последующей распиловкой бруса на обрезные доски // Лесотехнический журнал. 2017. Т. 7. № 1 (25). С. 137–150.

92. Агапов А. И. Алгоритм решения задачи определения оптимальных размеров бруса и досок при брусово-развальном способе раскроя пиловочника с учётом получения из сбеговой зоны одной пары укороченных досок // Advanced Science. 2017. № 2.

93. Агапов А. И. Особенности раскроя пиловочника крупных размеров брусово-сегментным способом с выпиливанием трех брусьев разной толщины // Общество. Наука. Инновации (НПК-2018) : сб. ст. : XVIII Всерос. науч.-практ. конф., 2–28 апр. 2018 г : в 3 т. Т. 2. Технические и физико-математические науки / ВятГУ. Киров, 2018. С. 17–25.

94. Агапов А. И., Криницын Н. П. Математическая модель задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с учетом сбеговой зоны // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2018. № 5 (41). С. 265–269.

95. Агапов А. И., Криницын Н. П. Алгоритм решения задачи оптимизации раскроя пиловочника крупных размеров с учетом сбеговой зоны // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2018. № 5 (41). С. 270–274.

96. Агапов А. И., Скорняков Ю.А. Оптимизация раскроя пиловочика крупных размеров с учетом последующей распиловки брусьев на обрезные доски // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2018. № 5 (41). С. 275–279.

97. Агапов А. И. Оптимизация раскроя пиловочника с выпиливанием строительного бруса и одной пары боковых досок с учетом ширины пропила // Юбилейные февральские чтения : сб. материалов

науч.-практ. конф., Сыктывкар, 17–20 февраля 2015. Сыктывкар, 2015. С. 369–376.

98. Технология пиломатериалов / П. П. Аксенов и др. М., 1976. 480 с.

99. Аксенов П. П. Технология пиломатериалов : учеб. для лесотехн. вузов. М., 1963. 579 с.

100. Аксенов П. П. Теоретические основы раскроя пиловочного сырья. М. ; Л., 1960. 216 с.

101. Ветшева В. Ф. Раскрой крупномерных брёвен на пиломатериалы. М., 1976. 165 с.

102. Виллистон Э. Производство пиломатериалов. М., 1981. 384 с.

103. Власов Г. Д. Новые методы технологических расчетов в лесопилении. М. ; Л. 1954. 60 с.

104. Калитеевский Р. Е. Теория и организация лесопиления. М., 1955. 352 с.

105. Калитеевский Р. Е., Юдин С. Б., Шевелев Л. Е. Оборудование и технологические процессы ленточнопильных потоков. М., 1962. 151 с.

106. Калитеевский Р. Е. Автоматизация технологических процессов лесопиления. М., 1964. 244 с.

107. Калитеевский Р. Е. Технология лесопиления : учеб. М., 1986. 264 с.

108. Калитеевский Р. Е. Лесопиление в XXI веке. Технология. Оборудование. Менеджмент. 2-е изд., испр. и доп. СПб., 2008. 499 с.

109. Калитеевский Р. Е., Артеменков А. М., Тамби А. А. Информационные технологии в лесопилении. СПб., 2010. 190 с.

110. Песоцкий А. Н., Ясинский В.С. Проектирование лесопильно-деревообрабатывающих производств. М., 1976. 376 с.

111. Песоцкий А. Н., Ясинский В. С. Рациональное использование древесины в лесопилении. М., 1977. 128 с.

112. Пижурин А. А., Розенблит М. С. Основы моделирования и оптимизации процессов деревообработки : учеб. М., 1988. 296 с.

113. Пижурин А. А., Пижурин А. А. Моделирование и оптимизация процессов деревообработки : учеб. М., 2004. 375 с.

114. Розенблит М. С., Пижурин А. А. Определение оптимальной длины бревен // Деревообрабатывающая промышленность. 1985. № 3. С. 5–6.

115. Рыкунин С. Н., Кандалина Л. Н. Технология деревообработки : учеб. М., 2005. 352 с.

116. Рыкунин С. Н., Тюкина Ю. П., Шалаев В. С. Технология лесопильно-деревообрабатывающих производств. 2-е изд. М., 2005. 225 с.

117. Рыкунин С. Н. Планирование раскроя сырья методом линейного программирования // Лесная промышленность. 1965. № 8. С. 25–27.

118. Соболев И. В. Оптимизация раскроя пиловочного сырья. М., 1971. 36 с.

119. Стоев Г. И. Определение максимального выхода пиломатериалов. М., 1961. 64 с.

120. Титков Г. Г. Краткое руководство по составлению и расчету поставов. М. ; Л., 1955. 50 с.

121. Турушев В. Г. Обрезка пиломатериалов. М., 1970. 56 с.

122. Турушев В. Г. Технологические основы автоматизированного производства пиломатериалов. М., 1975. 208 с.

123. Уласовец В. Г. Технологические основы производства пиломатериалов. Екатеринбург, 2002. 510 с.

124. Фельдман Х. Л. Система максимальных поставов на распиловку. Л. ; М., 1932. 276 с.

Приложение 3.1

Оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски, а также величина целевой функции при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}01$ для разного количества выпиливаемых досок из брусьев

№	c	m_e	$n_б$	$n_ц$	$m_Н$	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
1	1	0,01	0	0	0,16	0,987117	0,866025	0,727927	0,082828	0,571891	0,057337
2	1	0,01	6	8	0,157	0,987599	0,87116	0,739248	0,081217	0,591276	0,056518
3	1	0,01	8	10	0,157	0,987599	0,87116	0,739248	0,081217	0,591276	0,056518
4	1	0,01	10	12	0,156	0,987757	0,872844	0,74295	0,080674	0,597587	0,056229
5	1	0,01	12	14	0,155	0,987914	0,874514	0,746616	0,080128	0,603823	0,055931
6	1	0,01	14	16	0,155	0,987914	0,874514	0,746616	0,080128	0,603823	0,055931
7	1,5	0,01	0	0	0,149	0,974704	0,840701	0,698538	0,077036	0,540708	0,052819
8	1,5	0,01	6	8	0,146	0,975725	0,847372	0,712253	0,075461	0,563519	0,05209
9	1,5	0,01	8	10	0,146	0,975725	0,847372	0,712253	0,075461	0,563519	0,05209
10	1,5	0,01	10	12	0,145	0,97606	0,849555	0,716724	0,074928	0,570917	0,051826
11	1,5	0,01	12	14	0,144	0,976393	0,851718	0,721146	0,074392	0,578215	0,051551
12	1,5	0,01	14	16	0,144	0,976393	0,851718	0,721146	0,074392	0,578215	0,051551
13	2	0,01	0	0	0,135	0,96286	0,828493	0,688477	0,072629	0,535458	0,049652
14	2	0,01	6	8	0,134	0,963419	0,831182	0,69377	0,072098	0,544081	0,049418
15	2	0,01	8	10	0,133	0,963973	0,833844	0,698998	0,071562	0,552573	0,049171
16	2	0,01	10	12	0,133	0,963973	0,833844	0,698998	0,071562	0,552573	0,049171
17	2	0,01	12	14	0,132	0,964523	0,836478	0,704161	0,07102	0,560935	0,04891
18	2	0,01	14	16	0,131	0,965068	0,839085	0,70926	0,070473	0,56917	0,048636
19	2,5	0,01	0	0	0,122	0,952352	0,822338	0,683448	0,0705	0,532844	0,048107
20	2,5	0,01	6	8	0,122	0,952352	0,822338	0,683448	0,0705	0,532844	0,048107
21	2,5	0,01	8	10	0,121	0,953149	0,825433	0,689386	0,069947	0,542388	0,047867
22	2,5	0,01	10	12	0,121	0,953149	0,825433	0,689386	0,069947	0,542388	0,047867
23	2,5	0,01	12	14	0,12	0,953939	0,828493	0,695243	0,069387	0,551772	0,04761
24	2,5	0,01	14	16	0,119	0,954722	0,831517	0,70102	0,068821	0,560999	0,047338
25	3	0,01	0	0	0,11	0,943981	0,821645	0,684016	0,069734	0,535281	0,047603
26	3	0,01	6	8	0,11	0,943981	0,821645	0,684016	0,069734	0,535281	0,047603
27	3	0,01	8	10	0,11	0,943981	0,821645	0,684016	0,069734	0,535281	0,047603
28	3	0,01	10	12	0,109	0,945024	0,825091	0,690546	0,069144	0,545701	0,047346
29	3	0,01	12	14	0,109	0,945024	0,825091	0,690546	0,069144	0,545701	0,047346
30	3	0,01	14	16	0,108	0,946057	0,828493	0,696979	0,068546	0,555932	0,047068
31	3,5	0,01	0	0	0,099	0,93805	0,825433	0,689924	0,069691	0,543681	0,047705
32	3,5	0,01	6	8	0,099	0,93805	0,825433	0,689924	0,069691	0,543681	0,047705
33	3,5	0,01	8	10	0,099	0,93805	0,825433	0,689924	0,069691	0,543681	0,047705
34	3,5	0,01	10	12	0,098	0,939335	0,829168	0,696977	0,069047	0,554899	0,047412
35	3,5	0,01	12	14	0,098	0,939335	0,829168	0,696977	0,069047	0,554899	0,047412
36	3,5	0,01	14	16	0,098	0,939335	0,829168	0,696977	0,069047	0,554899	0,047412

Окончание приложения 3.1

№	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	$Z_{ц}$	$Z_{б}$	$Z_{бр}$	$Z_{д}$	Z
1	0,407	0,036	0,243	0,0182	0,098	0,002665	0,15633	0,27392	0,430267	0,225313	0,65558
2	0,437	0,0364	0,287	0,0192	0,158	0,004719	0,14092	0,25156	0,392487	0,231347	0,623834
3	0,437	0,0364	0,287	0,0192	0,158	0,004719	0,13778	0,24528	0,383067	0,231347	0,614414
4	0,446	0,036	0,300	0,0195	0,176	0,005254	0,13381	0,23800	0,371817	0,233227	0,605044
5	0,456	0,0363	0,314	0,0197	0,194	0,005728	0,12987	0,23079	0,360676	0,235027	0,595703
6	0,456	0,0363	0,314	0,0197	0,194	0,005728	0,12677	0,22459	0,351376	0,235027	0,586403
7	0,376	0,0326	0,215	0,0149	0,079	0,00017	0,21561	0,24754	0,46316	0,195802	0,658962
8	0,410	0,0328	0,265	0,016	0,147	0,002462	0,19397	0,22699	0,420966	0,202497	0,623464
9	0,410	0,0328	0,265	0,016	0,147	0,002462	0,18959	0,22115	0,410746	0,202497	0,613244
10	0,421	0,0328	0,280	0,0165	0,16	0,003043	0,18401	0,21447	0,398489	0,204596	0,603085
11	0,432	0,0328	0,295	0,0168	0,187	0,003552	0,17850	0,20785	0,386356	0,206609	0,592965
12	0,432	0,0328	0,295	0,0168	0,187	0,003552	0,17418	0,20209	0,376276	0,206609	0,582885
13	0,378	0,0304	0,230	0,0138	0,112	0,000219	0,25727	0,22099	0,478265	0,182677	0,660942
14	0,391	0,0305	0,248	0,0143	0,136	0,000961	0,23407	0,20399	0,438073	0,185097	0,62317
15	0,404	0,0305	0,265	0,0146	0,159	0,001605	0,22715	0,19786	0,425019	0,187438	0,612457
16	0,404	0,0305	0,265	0,0146	0,159	0,001605	0,22183	0,19254	0,414379	0,187438	0,601817
17	0,416	0,0306	0,282	0,0150	0,181	0,002163	0,21503	0,1865	0,401544	0,189685	0,591229
18	0,428	0,0306	0,299	0,0153	0,20	0,002647	0,20830	0,1805	0,388848	0,191827	0,580675
19	0,380	0,0293	0,237	0,0132	0,128	0,000118	0,28741	0,1982	0,485628	0,176281	0,661909
20	0,380	0,0293	0,237	0,0132	0,128	0,000118	0,26301	0,1835	0,446588	0,176281	0,622869
21	0,394	0,0294	0,256	0,0137	0,153	0,000836	0,25505	0,17797	0,433027	0,178892	0,611919
22	0,394	0,0294	0,256	0,0137	0,153	0,000836	0,24900	0,17313	0,422137	0,178892	0,601029
23	0,407	0,0295	0,275	0,0141	0,177	0,001452	0,24118	0,16763	0,40882	0,181398	0,590218
24	0,421	0,0295	0,294	0,0144	0,200	0,00198	0,23345	0,16220	0,395656	0,183784	0,57944
25	0,385	0,0291	0,245	0,0132	0,140	0,000317	0,30821	0,17856	0,486776	0,175374	0,662149
26	0,385	0,0291	0,245	0,0132	0,140	0,000317	0,28181	0,16536	0,447176	0,175374	0,622549
27	0,385	0,0291	0,245	0,0132	0,140	0,000317	0,27521	0,16096	0,436176	0,175374	0,611549
28	0,400	0,0292	0,26	0,0137	0,167	0,001036	0,26651	0,15589	0,422403	0,178206	0,600609
29	0,400	0,0292	0,266	0,0137	0,167	0,001036	0,25997	0,15153	0,411503	0,178206	0,589709
30	0,41	0,0292	0,286	0,0141	0,192	0,001646	0,25144	0,14655	0,397997	0,180904	0,5789
31	0,396	0,0293	0,260	0,0137	0,158	0,00092	0,32156	0,16145	0,483025	0,178778	0,661803
32	0,396	0,0293	0,260	0,0137	0,158	0,00092	0,29384	0,14957	0,443425	0,178778	0,622203
33	0,396	0,0293	0,260	0,0137	0,158	0,00092	0,28691	0,14561	0,432535	0,178778	0,611313
34	0,412	0,0294	0,282	0,0141	0,186	0,001627	0,27760	0,14095	0,418559	0,181814	0,600373
35	0,412	0,0294	0,282	0,0141	0,186	0,001627	0,27074	0,13703	0,407779	0,181814	0,589593
36	0,412	0,0294	0,282	0,0141	0,186	0,001627	0,26388	0,13311	0,396999	0,181814	0,578813

Приложение 3.2

Оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок и величина целевой функции с учетом сбеговой зоны пиловочника

№	L	c	m_e	m_D	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}
1	3	1	0	1,09	0,119	0,992894	0,934104	0,857987	0,078336	0,764189	0,0657
2	3	1	0,002	1,09	0,125	0,992157	0,925397	0,840012	0,079784	0,736946	0,0647
3	3	1	0,004	1,09	0,13	0,991514	0,917385	0,823615	0,080575	0,712645	0,0632
4	3	1	0,006	1,09	0,136	0,990709	0,907524	0,803148	0,081890	0,681656	0,0619
5	3	1	0,008	1,09	0,143	0,989723	0,895531	0,777924	0,083679	0,642742	0,0609
6	3	1	0,01	1,09	0,15	0,988686	0,882666	0,750677	0,085335	0,600472	0,0595
7	3	1	0,012	1,09	0,154	0,988071	0,873959	0,732720	0,085265	0,574335	0,0570
8	3	1,5	0,01	1,09	0,142	0,977052	0,855985	0,716440	0,080325	0,560004	0,0554
9	3	2	0,01	1,09	0,13	0,965609	0,841665	0,701821	0,076177	0,547181	0,0523
10	3	2,5	0,01	1,09	0,118	0,955497	0,834505	0,695300	0,073860	0,542605	0,0506
11	3	3	0	1,09	0,082	0,969270	0,912086	0,835214	0,069962	0,743084	0,0596
12	3	3	0,002	1,09	0,087	0,965339	0,898487	0,811242	0,070855	0,709102	0,0582
13	3	3	0,004	1,09	0,092	0,961158	0,883728	0,785192	0,071626	0,672213	0,0566
14	3	3	0,006	1,09	0,096	0,957630	0,870595	0,762343	0,071587	0,640799	0,0543
15	3	3	0,008	1,09	0,102	0,952032	0,850485	0,726232	0,072725	0,588550	0,0525
16	3	3	0,01	1,09	0,107	0,947079	0,831850	0,692930	0,073002	0,541010	0,0500
17	3	3,5	0,01	1,09	0,097	0,940606	0,832849	0,694513	0,072990	0,543285	0,0500
18	4	1	0,01	1,12	0,15	0,988686	0,882666	0,750677	0,085335	0,600472	0,0595
19	4	1,5	0,01	1,12	0,141	0,977378	0,858090	0,720843	0,079799	0,567388	0,0552
20	4	2	0,01	1,12	0,13	0,965609	0,841665	0,701821	0,076177	0,547181	0,0523
21	4	2,5	0,01	1,12	0,118	0,955497	0,834505	0,695300	0,073860	0,542605	0,0506
22	4	3	0,01	1,12	0,107	0,947079	0,831850	0,692930	0,073002	0,541010	0,0500
23	4	3,5	0,01	1,12	0,097	0,940606	0,832849	0,694513	0,072990	0,543285	0,0500
24	5	1	0,01	1,15	0,149	0,988837	0,884257	0,754252	0,084793	0,606625	0,0592
25	5	1,5	0,01	1,15	0,14	0,977701	0,860174	0,725199	0,079270	0,574675	0,0549
26	5	2	0,01	1,15	0,13	0,965609	0,841665	0,701821	0,076177	0,547181	0,0523
27	5	2,5	0,01	1,15	0,118	0,955497	0,834505	0,695300	0,073860	0,542605	0,0506
28	5	3	0,01	1,15	0,107	0,947079	0,831850	0,692930	0,073002	0,541010	0,0500
29	5	3,5	0,01	1,15	0,097	0,940606	0,832849	0,694513	0,072990	0,543285	0,0500
30	6	1	0,01	1,18	0,148	0,988987	0,885835	0,757792	0,084248	0,612708	0,0589
31	6	1,5	0,01	1,18	0,139	0,978022	0,862240	0,729508	0,078736	0,581864	0,0547
32	6	2	0,01	1,18	0,129	0,966145	0,844218	0,706927	0,075643	0,555564	0,0521
33	6	2,5	0,01	1,18	0,118	0,955497	0,834505	0,695300	0,073860	0,542605	0,0506
34	6	3	0,01	1,18	0,107	0,947079	0,831850	0,692930	0,073002	0,541010	0,0500
35	6	3,5	0,01	1,18	0,097	0,940606	0,832849	0,694513	0,072990	0,543285	0,0500

Продолжение приложения 3.2

№	m_{b3}	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_E	m_{Tc}	m_{bc}
1	0,6533	0,056031	0,5235	0,047485	0,368932	0,038716	0,929456	0,033006	0,256347
2	0,6182	0,053007	0,4835	0,042689	0,328937	0,032505	0,948352	0,029024	0,241702
3	0,5882	0,04958	0,4519	0,037686	0,303142	0,026444	0,960945	0,026385	0,231287
4	0,5486	0,046183	0,4079	0,032488	0,262506	0,019959	0,97693	0,023052	0,217179
5	0,497	0,042645	0,3490	0,026874	0,204691	0,012853	0,994827	0,019343	0,199958
6	0,4420	0,038677	0,2850	0,020755	0,145481	0,005426	1,009361	0,016348	0,184586
7	0,4117	0,034345	0,2596	0,015192	0	0	1,013695	0,015458	0,17971
8	0,3960	0,034876	0,2342	0,016963	0,093526	0,001725	1,015617	0,015064	0,177499
9	0,3870	0,032515	0,2321	0,015314	0,103863	0,000959	1,014592	0,015274	0,178682
10	0,3858	0,03129	0,2361	0,014568	0,116334	0,000753	1,01321	0,015558	0,180263
11	0,6356	0,051381	0,5108	0,043847	0,363313	0,036006	0,931667	0,032539	0,254689
12	0,5933	0,047915	0,4633	0,038616	0,31566	0,029352	0,952872	0,028075	0,238028
13	0,5476	0,044177	0,4126	0,033089	0,26657	0,022463	0,971816	0,024117	0,221811
14	0,5107	0,040005	0,3760	0,027431	0,240937	0,01598	0,982541	0,021887	0,211958
15	0,4443	0,035708	0,3003	0,020984	0,166998	0,008056	1,001957	0,017872	0,192592
16	0,3855	0,030838	0,2379	0,014295	0,12123	0,000672	1,012624	0,015678	0,180928
17	0,3886	0,030919	0,2420	0,014439	0,126283	0,000865	1,011994	0,015807	0,181641
18	0,4420	0,038677	0,2850	0,020755	0,145481	0,005426	1,009361	0,022535	0,218001
19	0,4072	0,034937	0,2505	0,017393	0,1161	0,002564	1,013237	0,021732	0,214308
20	0,3870	0,032515	0,2321	0,015314	0,103863	0,000959	1,014592	0,021451	0,213
21	0,3858	0,03129	0,2361	0,014568	0,116334	0,000753	1,01321	0,021737	0,214334
22	0,385	0,030838	0,2379	0,014295	0,12123	0,000672	1,012624	0,021859	0,214897
23	0,3886	0,030919	0,2420	0,014439	0,126283	0,000865	1,011994	0,021989	0,2155
24	0,4514	0,038652	0,2986	0,021032	0,164255	0,00603	1,006418	0,029392	0,250231
25	0,4182	0,034975	0,2663	0,017774	0,137685	0,003298	1,010476	0,028541	0,246859
26	0,3870	0,032515	0,2321	0,015314	0,103863	0,000959	1,014592	0,027681	0,24338
27	0,3858	0,03129	0,2361	0,014568	0,116334	0,000753	1,01321	0,027969	0,244554
28	0,385	0,030838	0,2379	0,014295	0,12123	0,000672	1,012624	0,028092	0,24505
29	0,3886	0,030919	0,2420	0,014439	0,126283	0,000865	1,011994	0,028224	0,245583
30	0,4607	0,038611	0,3119	0,021276	0,18241	0,006569	1,003223	0,036362	0,279726
31	0,4290	0,034992	0,2817	0,01811	0,158405	0,003943	1,007374	0,035484	0,276635
32	0,3996	0,032601	0,2500	0,015776	0,127919	0,001779	1,011785	0,034552	0,273301
33	0,3858	0,03129	0,2361	0,014568	0,116334	0,000753	1,01321	0,034251	0,272212
34	0,385	0,030838	0,2379	0,014295	0,12123	0,000672	1,012624	0,034375	0,27266
35	0,3886	0,030919	0,2420	0,014439	0,126283	0,000865	1,011994	0,034508	0,273141

Окончание приложения 3.2

№	m_{Ic}	m_{Vc}	$m_{Vбр}$	$m_{Vд}$	m_{Vn}	m_{V}	m_{Von}	m_{Vo}
1	0,689491	0,011668	0,340471	0,386276	0,726747	0,738415	0,859264	0,859357
2	0,610919	0,008571	0,355369	0,357597	0,712966	0,721537	0,859264	0,839715
3	0,55816	0,006812	0,367417	0,331211	0,698628	0,70544	0,859264	0,820982
4	0,490743	0,004914	0,381583	0,303654	0,685237	0,690151	0,859264	0,803188
5	0,414676	0,003208	0,397652	0,274895	0,672547	0,675755	0,859264	0,786434
6	0,352446	0,002127	0,413103	0,247164	0,660267	0,662394	0,859264	0,770885
7	0,333811	0,001855	0,421342	0,226648	0,64799	0,649845	0,859264	0,756281
8	0,325538	0,001741	0,451212	0,213061	0,664273	0,666014	0,859264	0,775098
9	0,329953	0,001801	0,469891	0,196676	0,666567	0,668368	0,859264	0,777838
10	0,335898	0,001884	0,478815	0,188861	0,667676	0,66956	0,859264	0,779225
11	0,680335	0,011276	0,388022	0,341784	0,729807	0,741083	0,859264	0,862462
12	0,592018	0,007913	0,40829	0,308677	0,716967	0,72488	0,859264	0,843605
13	0,512369	0,005482	0,427886	0,276182	0,704068	0,709549	0,859264	0,825764
14	0,466964	0,004333	0,442952	0,247897	0,690849	0,695181	0,859264	0,809043
15	0,384196	0,002645	0,46482	0,214459	0,679279	0,681924	0,859264	0,793614
16	0,338418	0,00192	0,482028	0,186022	0,66805	0,66997	0,859264	0,779702
17	0,341129	0,001959	0,480908	0,186992	0,667901	0,66986	0,859264	0,779574
18	0,360568	0,003543	0,413103	0,247164	0,660267	0,66381	0,8853	0,749813
19	0,34822	0,003244	0,448697	0,215423	0,664119	0,667363	0,8853	0,753827
20	0,343902	0,003143	0,469891	0,196676	0,666567	0,66971	0,8853	0,756478
21	0,348308	0,003246	0,478815	0,188861	0,667676	0,670921	0,8853	0,757846
22	0,350175	0,00329	0,482028	0,186022	0,66805	0,67134	0,8853	0,758319
23	0,352183	0,003338	0,480908	0,186992	0,667901	0,671238	0,8853	0,758204
24	0,372015	0,005472	0,410845	0,24918	0,660026	0,665498	0,912043	0,729678
25	0,361809	0,005098	0,446166	0,217729	0,663895	0,668993	0,912043	0,733511
26	0,351439	0,004735	0,469891	0,196676	0,666567	0,671302	0,912043	0,736043
27	0,354922	0,004855	0,478815	0,188861	0,667676	0,672531	0,912043	0,73739
28	0,356398	0,004907	0,482028	0,186022	0,66805	0,672957	0,912043	0,737857
29	0,357986	0,004963	0,480908	0,186992	0,667901	0,672863	0,912043	0,737754
30	0,37937	0,007717	0,408577	0,251123	0,6597	0,667417	0,939492	0,710402
31	0,370781	0,007279	0,44362	0,219965	0,663585	0,670864	0,939492	0,714071
32	0,361639	0,00683	0,467074	0,199233	0,666307	0,673137	0,939492	0,71649
33	0,35868	0,006688	0,478815	0,188861	0,667676	0,674364	0,939492	0,717796
34	0,359896	0,006746	0,482028	0,186022	0,66805	0,674797	0,939492	0,718256
35	0,361204	0,006809	0,480908	0,186992	0,667901	0,67471	0,939492	0,718164

Приложение 4.1

Оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок с учетом последующего раскроя брусьев на обрезные доски, а также величина целевой функции при относительной ширине пропила $m_e = 0{,}006$ для разного количества выпиливаемых досок из брусьев

№	c	m_e	$n_б$	$n_ц$	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
1	1	0,006	0	0	0,135	0,9908	0,9089	0,8062	0,0813	0,6869	0,0616	0,5566
2	1	0,006	6	8	0,134	0,9910	0,9103	0,8093	0,0807	0,6920	0,0612	0,5644
3	1	0,006	8	10	0,134	0,9910	0,9103	0,8093	0,0807	0,6920	0,0612	0,5644
4	1	0,006	10	12	0,133	0,9911	0,9116	0,8123	0,0802	0,6971	0,0608	0,5721
5	1	0,006	12	14	0,133	0,9911	0,9116	0,8123	0,0802	0,6971	0,0608	0,5721
6	1	0,006	14	16	0,133	0,9911	0,9116	0,8123	0,0802	0,6971	0,0608	0,5721
7	1,5	0,006	0	0	0,126	0,9820	0,8915	0,7866	0,0762	0,6670	0,0578	0,5379
8	1,5	0,006	6	8	0,125	0,9823	0,8933	0,7903	0,0756	0,6730	0,0574	0,5467
9	1,5	0,006	8	10	0,125	0,9823	0,8933	0,7903	0,0756	0,6730	0,0574	0,5467
10	1,5	0,006	10	12	0,125	0,9823	0,8933	0,7903	0,0756	0,6730	0,0574	0,5467
11	1,5	0,006	12	14	0,124	0,9825	0,8950	0,7939	0,0750	0,6789	0,0571	0,5555
12	1,5	0,006	14	16	0,124	0,9825	0,8950	0,7939	0,0750	0,6789	0,0571	0,5555
13	2	0,006	0	0	0,116	0,9727	0,8794	0,7728	0,0733	0,6525	0,0556	0,5233
14	2	0,006	6	8	0,115	0,9732	0,8816	0,7771	0,0727	0,6593	0,0552	0,5333
15	2	0,006	8	10	0,115	0,9732	0,8816	0,7771	0,0727	0,6593	0,0552	0,5333
16	2	0,006	10	12	0,114	0,9737	0,8837	0,7813	0,0721	0,6660	0,0549	0,5432
17	2	0,006	12	14	0,114	0,9737	0,8837	0,7813	0,0721	0,6660	0,0549	0,5432
18	2	0,006	14	16	0,114	0,9737	0,8837	0,7813	0,0721	0,6660	0,0549	0,5432
19	2,5	0,006	0	0	0,106	0,9642	0,8723	0,7641	0,0721	0,6424	0,0546	0,5120
20	2,5	0,006	6	8	0,105	0,9649	0,8748	0,7689	0,0714	0,6501	0,0542	0,5233
21	2,5	0,006	8	10	0,105	0,9649	0,8748	0,7689	0,0714	0,6501	0,0542	0,5233
22	2,5	0,006	10	12	0,104	0,9656	0,8773	0,7736	0,0708	0,6577	0,0538	0,5343
23	2,5	0,006	12	14	0,104	0,9656	0,8773	0,7736	0,0708	0,6577	0,0538	0,5343
24	2,5	0,006	14	16	0,104	0,9656	0,8773	0,7736	0,0708	0,6577	0,0538	0,5343
25	3	0,006	0	0	0,096	0,9576	0,8706	0,7623	0,0716	0,6408	0,0543	0,5108
26	3	0,006	6	8	0,095	0,9585	0,8734	0,7677	0,0709	0,6493	0,0539	0,5232
27	3	0,006	8	10	0,095	0,9585	0,8734	0,7677	0,0709	0,6493	0,0539	0,5232
28	3	0,006	10	12	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
29	3	0,006	12	14	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
30	3	0,006	14	16	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
31	3,5	0,006	0	0	0,087	0,9525	0,8714	0,7631	0,0719	0,6414	0,0545	0,5111
32	3,5	0,006	6	8	0,086	0,9536	0,8745	0,7690	0,0711	0,6508	0,0540	0,5247
33	3,5	0,006	8	10	0,086	0,9536	0,8745	0,7690	0,0711	0,6508	0,0540	0,5247
34	3,5	0,006	10	12	0,085	0,9547	0,8775	0,7748	0,0704	0,6599	0,0535	0,5380
35	3,5	0,006	12	14	0,085	0,9547	0,8775	0,7748	0,0704	0,6599	0,0535	0,5380
36	3,5	0,006	14	16	0,085	0,9547	0,8775	0,7748	0,0704	0,6599	0,0535	0,5380

Окончание приложения 4.1

№	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	$Z_{ц}$	$Z_{б}$	$Z_{бр}$	$Z_{д}$	Z
1	0,046	0,41	0,033	0,278	0,020	0,138	0,009	0,133	0,244	0,377	0,3080	0,6847
2	0,046	0,43	0,033	0,294	0,021	0,159	0,009	0,126	0,233	0,358	0,3103	0,6686
3	0,046	0,43	0,033	0,294	0,021	0,159	0,009	0,124	0,229	0,353	0,3103	0,6638
4	0,046	0,44	0,033	0,309	0,021	0,180	0,010	0,121	0,225	0,346	0,3126	0,6589
5	0,046	0,44	0,033	0,309	0,021	0,180	0,010	0,120	0,222	0,342	0,3126	0,6542
6	0,046	0,44	0,033	0,309	0,021	0,180	0,010	0,118	0,219	0,337	0,3126	0,6494
7	0,043	0,40	0,030	0,267	0,018	0,134	0,007	0,184	0,223	0,408	0,2793	0,6869
8	0,043	0,41	0,030	0,284	0,019	0,157	0,008	0,174	0,213	0,387	0,2819	0,6688
9	0,043	0,41	0,030	0,284	0,019	0,157	0,008	0,172	0,210	0,382	0,2819	0,6636
10	0,043	0,41	0,030	0,284	0,019	0,157	0,008	0,170	0,207	0,376	0,2819	0,6583
11	0,043	0,42	0,030	0,300	0,019	0,180	0,008	0,166	0,203	0,369	0,2845	0,6531
12	0,043	0,42	0,030	0,300	0,019	0,180	0,008	0,164	0,200	0,363	0,2845	0,6479
13	0,041	0,38	0,028	0,254	0,017	0,125	0,006	0,224	0,203	0,427	0,2614	0,6883
14	0,041	0,40	0,029	0,273	0,017	0,151	0,007	0,211	0,193	0,405	0,2644	0,6689
15	0,041	0,4	0,029	0,273	0,017	0,151	0,007	0,209	0,190	0,399	0,2644	0,6634
16	0,041	0,41	0,029	0,292	0,018	0,175	0,008	0,204	0,186	0,391	0,2672	0,6578
17	0,041	0,41	0,029	0,292	0,018	0,175	0,008	0,201	0,184	0,385	0,2672	0,6524
18	0,041	0,41	0,029	0,292	0,018	0,175	0,008	0,199	0,181	0,380	0,2672	0,6469
19	0,040	0,37	0,028	0,241	0,016	0,111	0,005	0,254	0,184	0,438	0,2514	0,6890
20	0,040	0,39	0,028	0,262	0,017	0,140	0,006	0,239	0,175	0,414	0,2548	0,6688
21	0,040	0,39	0,028	0,262	0,017	0,140	0,006	0,236	0,172	0,408	0,2548	0,6631
22	0,040	0,40	0,028	0,283	0,017	0,167	0,007	0,231	0,169	0,400	0,2580	0,6575
23	0,040	0,40	0,028	0,283	0,017	0,167	0,007	0,228	0,166	0,394	0,2580	0,6519
24	0,040	0,40	0,028	0,283	0,017	0,167	0,007	0,225	0,164	0,388	0,2580	0,6463
25	0,040	0,37	0,027	0,241	0,016	0,112	0,005	0,274	0,166	0,440	0,2491	0,6892
26	0,040	0,39	0,028	0,264	0,017	0,144	0,006	0,258	0,158	0,416	0,2528	0,6685
27	0,040	0,39	0,028	0,264	0,017	0,144	0,006	0,254	0,156	0,410	0,2528	0,6628
28	0,040	0,41	0,028	0,287	0,017	0,174	0,007	0,249	0,152	0,401	0,2563	0,6572
29	0,040	0,41	0,028	0,287	0,017	0,174	0,007	0,245	0,150	0,395	0,2563	0,6515
30	0,040	0,41	0,028	0,287	0,017	0,174	0,007	0,242	0,148	0,390	0,2563	0,6459
31	0,040	0,37	0,028	0,240	0,016	0,111	0,005	0,288	0,151	0,439	0,2502	0,6890
32	0,040	0,39	0,028	0,266	0,017	0,145	0,006	0,271	0,143	0,414	0,2543	0,6683
33	0,040	0,39	0,028	0,266	0,017	0,145	0,006	0,267	0,141	0,408	0,2543	0,6626
34	0,040	0,41	0,028	0,291	0,017	0,178	0,007	0,261	0,138	0,399	0,2582	0,6569
35	0,040	0,41	0,028	0,291	0,017	0,178	0,007	0,257	0,136	0,393	0,2582	0,6513
36	0,040	0,41	0,028	0,291	0,017	0,178	0,007	0,254	0,134	0,388	0,2582	0,6458

Приложение 4.2

Оптимальные относительные размеры брусьев и боковых обрезных досок и величина целевой функции с учетом сбеговой зоны пиловочника

№	L	c	m_e	m_D	m_H	m_{A1}	m_{A2}	m_{b1}	m_{T1}	m_{b2}	m_{T2}	m_{b3}
1	3	1	0	1,09	0,11	0,9939	0,9440	0,8797	0,0728	0,8009	0,0616	0,7089
2	3	1	0,002	1,09	0,117	0,9931	0,9349	0,8608	0,0749	0,7722	0,0612	0,6715
3	3	1	0,004	1,09	0,124	0,9923	0,9250	0,8404	0,0770	0,7410	0,0607	0,6310
4	3	1	0,006	1,09	0,132	0,9912	0,9130	0,8152	0,0796	0,7022	0,0604	0,5796
5	3	1	0,008	1,09	0,143	0,9897	0,8955	0,7779	0,0837	0,6427	0,0609	0,4977
6	3	1	0,01	1,09	0,152	0,9884	0,8794	0,7434	0,0864	0,5879	0,0600	0,4227
7	3	3	0	1,09	0,076	0,9737	0,9250	0,8597	0,0654	0,7820	0,0562	0,6924
8	3	3	0,002	1,09	0,082	0,9693	0,9103	0,8336	0,0672	0,7446	0,0556	0,6450
9	3	3	0,004	1,09	0,088	0,9645	0,8940	0,8048	0,0688	0,7033	0,0547	0,5928
10	3	3	0,006	1,09	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
11	3	3	0,008	1,09	0,099	0,9549	0,8596	0,7436	0,0708	0,6163	0,0515	0,4848
12	3	3	0,01	1,09	0,107	0,9471	0,8319	0,6929	0,0730	0,5410	0,0500	0,3855
13	3	1,5	0,006	1,09	0,124	0,9825	0,8950	0,7939	0,0750	0,6789	0,0571	0,5555
14	3	2	0,006	1,09	0,114	0,9737	0,8837	0,7813	0,0721	0,6660	0,0549	0,5432
15	3	2,5	0,006	1,09	0,104	0,9656	0,8773	0,7736	0,0708	0,6577	0,0538	0,5343
16	3	3	0,006	1,09	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
17	3	3,5	0,006	1,09	0,086	0,9536	0,8745	0,7690	0,0711	0,6508	0,0540	0,5247
18	4	1	0,006	1,12	0,132	0,9912	0,9130	0,8152	0,0796	0,7022	0,0604	0,5796
19	4	1,5	0,006	1,12	0,123	0,9828	0,8968	0,7974	0,0745	0,6847	0,0567	0,5641
20	4	2	0,006	1,12	0,114	0,9737	0,8837	0,7813	0,0721	0,6660	0,0549	0,5432
21	4	2,5	0,006	1,12	0,104	0,9656	0,8773	0,7736	0,0708	0,6577	0,0538	0,5343
22	4	3	0,006	1,12	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
23	4	3,5	0,006	1,12	0,085	0,9547	0,8775	0,7748	0,0704	0,6599	0,0535	0,5380
24	5	1	0,006	1,15	0,131	0,9914	0,9143	0,8182	0,0790	0,7072	0,0600	0,5871
25	5	1,5	0,006	1,15	0,123	0,9828	0,8968	0,7974	0,0745	0,6847	0,0567	0,5641
26	5	2	0,006	1,15	0,113	0,9741	0,8858	0,7854	0,0715	0,6727	0,0545	0,5529
27	5	2,5	0,006	1,15	0,103	0,9663	0,8797	0,7783	0,0702	0,6651	0,0534	0,5451
28	5	3	0,006	1,15	0,094	0,9594	0,8762	0,7730	0,0702	0,6577	0,0534	0,5353
29	5	3,5	0,006	1,15	0,085	0,9547	0,8775	0,7748	0,0704	0,6599	0,0535	0,5380
30	6	1	0,006	1,18	0,131	0,9914	0,9143	0,8182	0,0790	0,7072	0,0600	0,5871
31	6	1,5	0,006	1,18	0,123	0,9828	0,8968	0,7974	0,0745	0,6847	0,0567	0,5641
32	6	2	0,006	1,18	0,113	0,9741	0,8858	0,7854	0,0715	0,6727	0,0545	0,5529
33	6	2,5	0,006	1,18	0,103	0,9663	0,8797	0,7783	0,0702	0,6651	0,0534	0,5451
34	6	3	0,006	1,18	0,093	0,9603	0,8789	0,7782	0,0695	0,6659	0,0530	0,5472
35	6	3,5	0,006	1,18	0,084	0,9558	0,8805	0,7804	0,0696	0,6689	0,0531	0,5510

№	m_{T3}	m_{b4}	m_{T4}	m_{b5}	m_{T5}	m_{b6}	m_{T6}	m_E	m_{Tc}
1	0,0533	0,6029	0,0463	0,4804	0,0396	0,3358	0,0324	0,94194	0,0303
2	0,0508	0,5593	0,0420	0,4348	0,0338	0,2950	0,0255	0,95951	0,0266
3	0,0482	0,5126	0,0374	0,3871	0,0277	0,2553	0,0184	0,97487	0,0234
4	0,0454	0,4519	0,0326	0,3232	0,0211	0,1994	0,0108	0,99192	0,0199
5	0,0426	0,3490	0,0269	0,2047	0,0129	0,0818	0,0009	1,01265	0,0156
6	0,0387	0,2569	0,0201	0,1058	0,0040	0,0000	0,0000	1,03439	0,0112
7	0,0491	0,5899	0,0430	0,4724	0,0370	0,3344	0,0305	0,94244	0,0302
8	0,0464	0,5351	0,0383	0,4142	0,0307	0,2794	0,0230	0,96419	0,0257
9	0,0432	0,4754	0,0332	0,3524	0,0240	0,2248	0,0153	0,98241	0,0219
10	0,0397	0,4101	0,0277	0,2869	0,0170	0,1736	0,0074	0,99682	0,0189
11	0,0356	0,3566	0,0218	0,2421	0,0100	0,1621	0,0003	1,00277	0,0177
12	0,0308	0,2379	0,0143	0,1212	0,0007	0,0000	0,0000	1,03262	0,0115
13	0,0427	0,4278	0,0302	0,3002	0,0190	0,1796	0,0089	0,99575	0,0191
14	0,0409	0,4169	0,0287	0,2918	0,0178	0,1755	0,0080	0,99648	0,0190
15	0,0400	0,4078	0,0279	0,2828	0,0170	0,1672	0,0074	0,99792	0,0187
16	0,0397	0,4101	0,0277	0,2869	0,0170	0,1736	0,0074	0,99682	0,0189
17	0,0400	0,3949	0,0277	0,2660	0,0166	0,1454	0,0067	1,00137	0,0179
18	0,0454	0,4519	0,0326	0,3232	0,0211	0,1994	0,0108	0,99192	0,0261
19	0,0425	0,4397	0,0302	0,3164	0,0193	0,2009	0,0095	0,99161	0,0262
20	0,0409	0,4169	0,0287	0,2918	0,0178	0,1755	0,0080	0,99648	0,0252
21	0,0400	0,4078	0,0279	0,2828	0,0170	0,1672	0,0074	0,99792	0,0249
22	0,0397	0,4101	0,0277	0,2869	0,0170	0,1736	0,0074	0,99682	0,0251
23	0,0398	0,4133	0,0278	0,2906	0,0171	0,1779	0,0076	0,99605	0,0253
24	0,0452	0,4624	0,0326	0,3374	0,0213	0,2184	0,0113	0,98787	0,0332
25	0,0425	0,4397	0,0302	0,3164	0,0193	0,2009	0,0095	0,99161	0,0325
26	0,0407	0,4302	0,0287	0,3098	0,0181	0,1989	0,0086	0,99202	0,0324
27	0,0398	0,4227	0,0280	0,3028	0,0174	0,1933	0,0080	0,99315	0,0321
28	0,0397	0,4101	0,0277	0,2869	0,0170	0,1736	0,0074	0,99682	0,0314
29	0,0398	0,4133	0,0278	0,2906	0,0171	0,1779	0,0076	0,99605	0,0315
30	0,0452	0,4624	0,0326	0,3374	0,0213	0,2184	0,0113	0,98787	0,0396
31	0,0425	0,4397	0,0302	0,3164	0,0193	0,2009	0,0095	0,99161	0,0388
32	0,0407	0,4302	0,0287	0,3098	0,0181	0,1989	0,0086	0,99202	0,0387
33	0,0398	0,4227	0,0280	0,3028	0,0174	0,1933	0,0080	0,99315	0,0385
34	0,0395	0,4264	0,0278	0,3086	0,0173	0,2018	0,0081	0,99144	0,0388
35	0,0396	0,4311	0,0279	0,3143	0,0175	0,2085	0,0083	0,99003	0,0391

Окончание приложения 4.2

№	m_{bc}	m_{lc}	m_{Vc}	$m_{Vбр}$	$m_{Vд}$	$m_{Vп}$	m_V	$m_{Vоп}$	$П_V$
1	0,2468	0,6377	0,0096	0,3170	0,4179	0,7349	0,7444	0,8593	0,86637
2	0,2325	0,5642	0,0070	0,3350	0,3832	0,7182	0,7252	0,8593	0,84396
3	0,2191	0,4995	0,0051	0,3524	0,3494	0,7019	0,7070	0,8593	0,82279
4	0,2029	0,4271	0,0035	0,3719	0,3147	0,6866	0,6900	0,8593	0,80304
5	0,1809	0,3383	0,0019	0,3977	0,2750	0,6727	0,6746	0,8593	0,78510
6	0,1540	0,2443	0,0008	0,4176	0,2429	0,6605	0,6614	0,8593	0,76969
7	0,2464	0,6356	0,0095	0,3626	0,3745	0,7371	0,7465	0,8593	0,86880
8	0,2285	0,5445	0,0064	0,3877	0,3338	0,7215	0,7279	0,8593	0,84716
9	0,2121	0,4675	0,0043	0,4120	0,2942	0,7062	0,7106	0,8593	0,82695
10	0,1979	0,4062	0,0030	0,4353	0,2563	0,6916	0,6947	0,8593	0,80843
11	0,1917	0,3807	0,0026	0,4538	0,2237	0,6775	0,6801	0,8593	0,79144
12	0,1564	0,2520	0,0009	0,4820	0,1860	0,6681	0,6690	0,8593	0,77853
13	0,1990	0,4107	0,0031	0,4047	0,2845	0,6892	0,6923	0,8593	0,80570
14	0,1983	0,4076	0,0031	0,4235	0,2672	0,6907	0,6937	0,8593	0,80737
15	0,1968	0,4015	0,0030	0,4335	0,2580	0,6915	0,6945	0,8593	0,80821
16	0,1979	0,4062	0,0030	0,4353	0,2563	0,6916	0,6947	0,8593	0,80843
17	0,1932	0,3867	0,0027	0,4375	0,2544	0,6918	0,6945	0,8593	0,80825
18	0,2338	0,4158	0,0051	0,3719	0,3147	0,6866	0,6917	0,8853	0,78127
19	0,2340	0,4168	0,0051	0,4019	0,2868	0,6888	0,6939	0,8853	0,78380
20	0,2298	0,4014	0,0047	0,4235	0,2672	0,6907	0,6953	0,8853	0,78541
21	0,2285	0,3969	0,0045	0,4335	0,2580	0,6915	0,6960	0,8853	0,78620
22	0,2295	0,4004	0,0046	0,4353	0,2563	0,6916	0,6962	0,8853	0,78643
23	0,2301	0,4028	0,0047	0,4332	0,2582	0,6914	0,6961	0,8853	0,78629
24	0,2650	0,4184	0,0074	0,3694	0,3167	0,6861	0,6935	0,9120	0,76041
25	0,2621	0,4091	0,0070	0,4019	0,2868	0,6888	0,6958	0,9120	0,76285
26	0,2618	0,4081	0,9120	0,4204	0,2699	0,6902	0,6972	0,9120	0,76438
27	0,2609	0,4053	0,9120	0,4300	0,2610	0,6910	0,6979	0,9120	0,76515
28	0,2580	0,3961	0,9120	0,4353	0,2563	0,6916	0,6980	0,9120	0,76535
29	0,2586	0,3980	0,9120	0,4332	0,2582	0,6914	0,6979	0,9120	0,76522
30	0,2908	0,4110	0,9395	0,3694	0,3167	0,6861	0,6956	0,9395	0,74041
31	0,2881	0,4033	0,9395	0,4019	0,2868	0,6888	0,6978	0,9395	0,74275
32	0,2879	0,4025	0,9395	0,4204	0,2699	0,6902	0,6992	0,9395	0,74423
33	0,2870	0,4001	0,9395	0,4300	0,2610	0,6910	0,6999	0,9395	0,74497
34	0,2883	0,4037	0,9395	0,4314	0,2596	0,6910	0,7001	0,9395	0,74517
35	0,2893	0,4066	0,9395	0,4289	0,2618	0,6907	0,6999	0,9395	0,74502

Научное издание
Агапов Александр Иванович

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСКРОЯ ПИЛОВОЧНИКА С ВЫПИЛИВАНИЕМ ТРЕХ БРУСЬЕВ

Редактор *Ю. Н. Болдырева*
Технический редактор *Л. А. Кислицына*

Подписано в печать 12.09.2019 г.
Выход в свет 20.09.2019 г.
Формат 60×84/16.
Печать цифровая.
Бумага для офисной техники.
Усл. печ. л. 27,8
Тираж 500 экз.
Заказ № 5945.

Научное издательство Вятского государственного университета
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
www.vestnik43.ru, www.vyatsu.ru
Тел. 20-89-64

Отпечатано в центре полиграфических услуг
Вятского государственного университета,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36